

Problembanken

Grundskola åk 4–6, modul: Problemlösning

Kerstin Hagland, Maria Sundberg och Andreas Hårrskog

Problembank för åk 4-6

Kerstin Hagland, Maria Sundberg och Andreas Härskog

Innehåll

PROBLEMBANKEN	1
ANPASSNING AV PROBLEM SÅ ATT DET PASSAR ALLA ELEVER	2
DEL 1: PROBLEMET CHOKLADBOLLAR	4
DEL 2: PROBLEMET CYKELTUR	7
DEL 3: PROBLEMET KLUBBEN	11
DEL 4: PROBLEMET VÄXTER	15
DEL 5: PROBLEMET MÅLADE KUBER	19
DEL 6: PROBLEMET SNÖBOLLAR	25
ÖVRIGA PROBLEM	28

Problembanken

Problembanken består av en inledande text som handlar om hur du som lärare kan anpassa problemen till dina elever. Till varje del föreslår vi ett problem, när du gjort hela modulen har du också behandlat alla centrala innehåll. Problemet presenteras med en teoretisk genomgång och du får förslag på fler liknande problem med tillhörande facit. I slutet hittar du lite blandade problem där varken facit eller genomgångar finns tillgängliga. De problem vi rekommenderar har vi försökt anpassa så att hela klassen ska kunna arbeta med samma problem samtidigt. Dock behöver du som lärare kanske anpassa problemet ytterligare utifrån just dina elever (se texten om anpassning och tips i genomgångarna av problemen).

Anpassning av problem så att det passar alla elever

Kerstin Hagland och Eva Taflin

Detta är en omarbetad text från boken:

Hagland, K., Hedrén R., & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem: Inspiration till variation*. Stockholm: Liber. (sid. 53-58).

Denna text återfinns även i del 7.

Arbetet med problemlösning är ägnat att stimulera eleverna till att vilja lära sig matematik, att tillägna sig nya matematiska begrepp men även matematiska procedurer och tekniker samt att hjälpa eleverna att utveckla alla övriga matematiska förmågor och fördjupa och bredda sina kunskaper. För att detta ska kunna äga rum måste problemen uppfylla vissa villkor.

- Problemet ska introducera till viktiga matematiska idéer. (Med matematiska idéer menar vi här begrepp, procedurer, strategier, konventioner och formler).
- Problemet ska vara lätt att förstå och alla ska ha en möjlighet att arbeta med det. (Det innebär att du som lärare förvissas dig om att eleverna vet vad de ska ta reda på).
- Problemet ska upplevas som en utmaning, kräva ansträngning och tillåtas ta tid. (Ett matematiskt problem är inte en rutinuppgift, det är ett problem först när eleven vill lösa det men inte vet hur).

Att få dessa tre villkor uppfyllda i ett och samma problem kan vara ganska svårt. Här listas några svårigheter som kan uppstå och som du som lärare bör ta hänsyn till, men tänk på att överbygga de specifika svårigheterna utan att ta bort eller ändra den matematiska utmaningen i problemet.

- Språket kan innebära svårigheter. Texter med invecklad meningsbyggnad och många svåra ord kan vara knepiga att ta sig igenom för många elever och därigenom i onödan försvåra själva problemlösningsprocessen för dem. Samtidigt är det en del av den matematiska förståelsen att kunna läsa ut vad som ska undersökas och vad som ska besvaras. Läraren behöver fundera på hur problemet ska presenteras, t.ex. muntligt, rita på tavlan, åskådliggöra med dokumentkamera, använda interaktiv skrivtavla, med hjälp av konkret material eller formulera problemet med ett enklare språk.
- Talen som ingår kan ha betydelse för hur svåra problemen är för eleverna. Om texten innehåller stora naturliga tal eller tal i decimalform, tal i bråkform, negativa tal eller irrationella tal kan problemen upplevas krångliga. Dessa kan då t.ex. bytas ut mot lägre tal, heltal eller enklare bråktal.

- Flera tankesteg i lösningen av problemet kan vara en allt för stor utmaning för vissa elever och då kan problemet förenklas med färre tankesteg.
- Om kontexten, det sammanhang som beskrivs i problemet och som problemet ingår i, inte är välbekant för eleven kan det bli ett hinder i lösningsprocessen. Samtidigt kan kontexter som eleven är välbekant med också ställa till svårigheter, den kan då hamna i fokus och de matematiska ideér som problemet är avsett för, trängs undan.
- Illustrationer kan i vissa fall försvåra problemet, t.ex. om problemtexten och illustrationen inte hänger ihop. I andra fall kan den underlätta lösningen genom att leda in på en viss strategi. Här behöver läraren fundera över illustrationens funktion t.ex. om man vill leda in på en viss strategi eller för att underlätta förståelsen av problemet.

Att anpassa ett problem efter elevens förutsättningar och behov bör dock aldrig innebära att man gör om problemet till en ren rutinuppgift.

Sammanfattningsvis så finns det en hel del att tänka på när läraren ska anpassa problemen till sina elever. Därför är lärarens insats av mycket stor betydelse om arbetet med problemlösning ska bli givande för alla elever. Det är först och främst dennes uppgift att välja ut problemen och att anpassa dessa till sina elever. Samtidigt ska läraren ha i beredskap en eller helst flera utvidgningar och generaliseringar av problemet för att alla elever ska få tillräcklig utmaning och stimulans.

För att underlätta för lärare finns genomgångar av alla de problem som används i modulen. Det finns också tips på anpassningar, men det är alltid lärarens yttersta ansvar att anpassa problemet till just sina elever. Det finns också problem med liknande innehåll som alternativ och ytterligare valmöjlighet. Till dessa finns inga genomgångar men till vissa finns ett facit.

Problemens uppdelning från a-c är en anpassning där tanken är att a-uppgiften ska vara enklare än c-uppgiften. Som en sista d-uppgift ska eleverna formulera egna problem, det gör det möjligt för alla elever att arbeta samtidigt med samma problem med det gör det också möjligt för läraren att avgöra om eleven har uppfattat det matematiska innehållet.

Den typ av problem som presenteras här är tänkta för helklass där elevernas olika lösningar ska ligga till grund för den kommande undervisningen, en undervisning som beror av elevernas kreativitet och lärarens planering. En undervisning där lärarens analys av elevlösningar och genomgångar i matematik blir en naturlig följd av elevernas redovisade lösningar på problemen.

Del 1: Problemet Chokladbollar

Till 20 chokladbollar går det åt 100 g margarin, 2 dl strösocker, 3 dl havregryn och 3 msk kakao.

- Hur mycket av varje ingrediens går det åt till 10 chokladbollar?
- Hur mycket av varje ingrediens går det åt till 30 chokladbollar?
- Om man bara har 250 g margarin hemma men gott om övriga varor, hur många chokladbollar kan man göra då?
- Hitta på ett eget liknande problem. Lös det.

Något om problemet

Problemet behandlar proportionalitet, som definieras som ett samband mellan två storheter på så sätt att kvoten mellan dem är konstant. Om det ena värdet fördubblas så gör även det andra det. I svenska skolan hittade man fram till 1960-talet sådana problem under rubriken reguladetri. Det är latin och betyder regeln om tre; genom att använda tre givna tal kunde man beräkna det fjärde. Proportionalitet används inom många olika områden, till exempel när man vill rita något i en större eller mindre skala eller när man vill räkna ut bensinkostnaden för en given sträcka.

Matematiken i problemet

Här följer några exempel på matematik som elever och lärare kan använda sig av och utveckla när de löser problemet och som även återfinns i det centrala innehållet i kursplanen:

- Rationella tal och deras egenskaper särskilt dubbelt och hälften.
- Centrala metoder för beräkningar med rationella tal.
- Rimlighetsbedömning vid uppskattningar och beräkningar i vardagliga situationer.
- Tolkning av data i tabeller och diagram.
- Proportionalitet. (Diskreta samband).
- Strategier för matematisk problemlösning i vardagliga situationer.
- Matematisk formulering av frågeställningar utifrån vardagliga situationer.

Vanlig missuppfattning

En missuppfattning som elever ofta kan ha är att de tror att de först måste räkna ut hur mycket som går åt till 1 chokladboll för att sedan kunna besvara frågorna i delproblemen. Här behöver de aldrig göra det. När det gäller proportionalitetsproblem i största allmänhet kan det ofta löna sig om man istället utgår ifrån det givna förhållandet, dubblar och halverar. En annan missuppfattning kan vara att elever hävdar att man kan göra hur många chokladbollar man vill, eftersom man i en vardagssituation kan bestämma storleken.

Anpassning av problemet

Enklare problem

Kortare, enklare text och färre steg i beräkningarna kan underlätta. Sättet att presentera receptet kan också underlätta. Exempel:

20 chokladbollar

100 g smör
2 dl socker
4 dl havregryn
2 msk kakao.

- Hur ser receptet ut för 10 chokladbollar?
- Hur ser receptet ut för 5 chokladbollar?
- Om receptet innehåller 3 dl havregryn, hur många chokladbollar blir det då?
- Hitta på ett eget liknande problem. Lös det.

Svårare problem

Flera steg i beräkningarna och flera enheter kan försvåra. Exempel:

Till 40 chokladbollar går det åt 200 g margarin, 4 dl strösocker, 0,6 liter havregryn och 8 msk kakao.

- Hur mycket går det åt till 15 chokladbollar?
- Hur mycket går det åt till 25 chokladbollar?
- Om man bara har 350 g margarin hemma men gott om övriga varor, hur många chokladbollar kan man göra då?
- Hitta på ett eget liknande problem. Lös det.

Kommenterad elevlösning

Exempel delproblem a-c

Chokladbollar antal	Margarin g	Strösocker dl	Havregryn dl	Kakao msk
20	100	2	3	3
10	50	1	1,5	1,5
$30 = 20 + 10$	$100 + 50 = 150$	3	4,5	4,5
$20 + 30 = 50$	$250 = 100 + 150$			

Eleven har här gjort en tabell och skrivit in allt som ingår i receptet. Han beräknar sedan hälften av allt för att kunna besvara delfråga a. Han använder sig sedan av fakta i tabellen för att beräkna svaren på delfrågorna b och c.

Liknande problem

Här följer två problem som har liknande karaktär som ovanstående. Särskilt behandlas dubbelt och hälften. Till dessa finns enbart facit.

Pennor

Lotta får betala 12 kr för 16 pennor.

- a) Hur många pennor får Lotta för 6 kr?
- b) Hur många pennor får Lotta för 9 kr?
- c) Hur mycket kostar 28 pennor?
- d) Hitta på ett eget liknande problem. Lös det.

Facit:

- a) 8 pennor
- b) 12 pennor
- c) 21 kr

Bilbyte

Patrik och Agnes byter leksaksbilar med varandra. Agnes får 28 småbilar för 16 lastbilar.

- a) Hur många småbilar får Agnes för 8 lastbilar?
- b) Hur många småbilar får Agnes för 24 lastbilar?
- c) Hur många lastbilar får Patrik för 35 småbilar?
- d) Hitta på ett eget liknande problem. Lös det.

Facit:

- a) 14 småbilar
- b) 42 småbilar
- c) 20 lastbilar

Del 2: Problemet Cykeltur

Det brukar ta 12 min för Per att cykla till skolan som ligger 2 km bort.

- Hur lång tid tar det då för Per att cykla till biblioteket som är 3 km bort?
- Hur lång tid tar det då för Per att cykla till sin kompis som bor 4,5 km bort?
- Hur långt hinner Per cykla på en halvtimme?
- Hitta på ett eget liknande problem. Lös det.

Något om problemet

Detta är ett problem av samma typ som problemet Chokladbollar, men det finns en viktig skillnad. Cykelturen handlar om en kontinuerlig förändring. Den kan illustreras som en rät linje i ett koordinatsystem, där ena axeln visar tid och andra axeln visar sträcka, och där lutningen är linjens riktningskoefficient. När det gäller lösandet av problemet Cykeltur kan man även här med fördel arbeta med begrepp som dubbelt och hälften och andra proportionella samband.

Matematiken i problemet

Här följer några exempel på matematik som elever och lärare kan använda sig av och utveckla när de löser problemet och som även återfinns i det centrala innehållet i kursplanen:

- Rationella tal och deras egenskaper. Dubbelt och hälften.
- Tal i bråk- och decimalform och deras användning i vardagliga situationer.
- Centrala metoder för beräkningar med naturliga tal och enkla tal i decimalform.
- Rimlighetsbedömning vid uppskattningar och beräkningar i vardagliga situationer.
- Tabeller och diagram för att beskriva resultat från undersökningar. Tolkning av data i tabeller och diagram.
- Proportionalitet. (Kontinuerliga samband och Riktningskoefficient).
- Grafer för att uttrycka olika typer av proportionella samband.
- Strategier för matematisk problemlösning i vardagliga situationer.
- Matematisk formulering av frågeställningar.

Vanlig missuppfattning

Elever kan tro att de först måste räkna ut hur lång tid det tar för Per att cykla 1 km eller hur långt Per hinner på 1 minut för att sedan kunna besvara frågorna i delproblemen. Här behöver de aldrig göra det. När det gäller proportionalitetsproblem i största allmänhet kan det ofta löna sig om man istället utgår ifrån det givna förhållandet och till exempel halverar och dubblar sig fram till lösningarna.

Anpassning av problemet

Enklare problem

Kortare och enklare text, enklare tal samt färre steg i beräkningarna kan underlätta. Exempel:

Det tar 6 minuter för Laila att cykla 2 km.

- Hur lång tid tar det för Laila att cykla 4 km?
- Hur lång tid tar det för Laila att cykla 3 km?
- Hur långt hinner Laila cykla på 15 minuter?
- Hitta på ett eget liknande problem. Lös det.

Svårare problem

Flera steg i beräkningarna, flera enheter, högre tal samt flera rationella tal kan försvåra. Exempel:

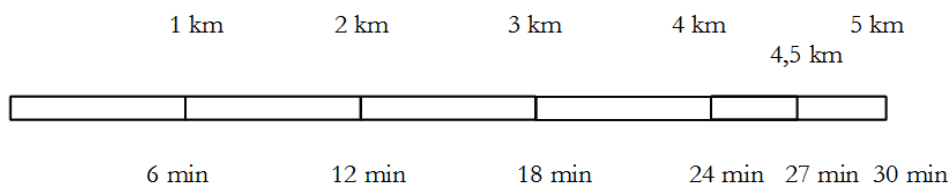
Det brukar ta 20 min för Sven att cykla till skolan som ligger 3 km bort.

- Hur lång tid tar det då för Sven att cykla till biblioteket som finns 4,5 km bort?
- Hur lång tid tar det då för Sven att cykla till sin kompis som bor 7,5 km bort?
- Hur långt hinner Sven cykla på 1 timme och 20 min?
- Hitta på ett eget liknande problem. Lös det.

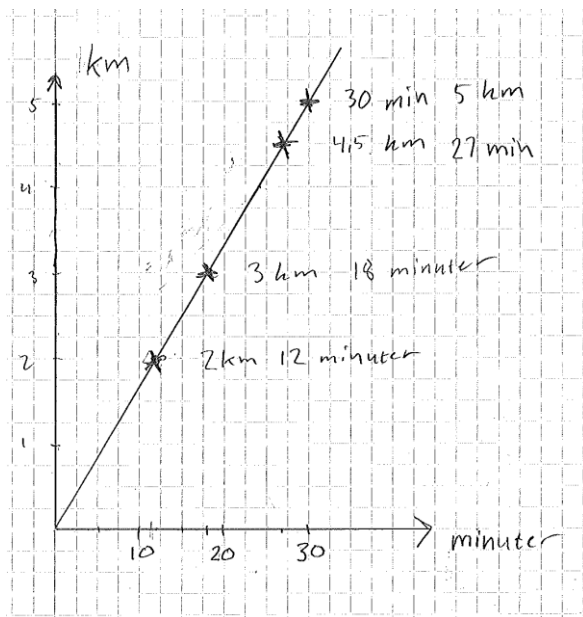
Kommenterad elevlösning

Exempel delproblem a-c

Eleven ritar en väg, delar in den i delsträckor och sätter ut tiden det tar att åka till de olika markeringarna. Eleven avläser alla svaren i figuren.



Här har eleven visat sambandet mellan tid och avstånd i ett koordinatsystem. Eleven börjar med att markera de samband som är givna i uppgiften och tar sedan reda på nya samband. Här finns också ett matematiskt resonemang där eleven visar förståelse för att 0 tid är 0 sträcka.



Liknande problem

Här följer två problem som har liknande karaktär som ovanstående. Till dessa finns enbart facit.

Snigeln

En snigel kröp lika långt varje dag. Efter 8 dagar hade den krupit 20 cm.

- Hur långt hade den krupit efter 12 dagar?
- Hur många dagar tog det innan den hade krupit 35 cm?
- Hur många dagar tog det innan den hade krupit $47 \frac{1}{2}$ cm?
- Hitta på ett eget liknande problem. Lös det.

Facit:

- 30 cm
- 14 dagar
- 19 dagar

Nadjas hår

Nadja sparar till långt hår. När hon börjar är håret 5 cm långt. Det växer lika mycket varje dag. Efter tre månader är det 4 cm längre.

- a) Hur långt var håret efter sex månader?
- b) Hur långt var håret efter nio månader?
- c) Hur lång tid tog det innan håret var 33 cm långt?
- d) Hitta på ett eget liknande problem. Lös det.

Facit:

- a) 13 cm
- b) 17 cm
- c) 21 månader

Del 3: Problemet Klubben

En skolkubb har 50 medlemmar. De går i klass 4, 5 eller 6.

15 går i klass 4.

15 går i klass 6.

7 är pojkar i klass 4.

8 är pojkar i klass 5.

29 är flickor.

- Hur många går i klass 5?
- Hur många flickor i klubben går i klass 6?
- Vad kan man mer tänka ut?
- Hitta på ett liknande problem och lös det.

Något om problemet

Detta är ett sorts statistikproblem. Här gäller det för eleven att beskriva, sortera, välja och räkna med de data man har fått reda på för att på smidigast möjliga sätt få fram svaret på frågan. Någon typ av uppställning eller tabell kan vara till god hjälp.

Matematiken i problemet

Här följer några exempel på matematik som elever och lärare kan använda sig av och utveckla när de löser problemet och som även återfinns i det centrala innehållet i kursplanen:

- Rationella tal och deras egenskaper.
- Tal i bråk- och decimalform och deras användning i vardagliga situationer.
- Centrala metoder för beräkningar med naturliga tal och enkla tal i decimalform.
- Rimlighetsbedömning vid uppskattningar och beräkningar i vardagliga situationer.
- Tabeller och diagram för att beskriva resultat från undersökningar. Tolkning av data i tabeller och diagram.
- Strategier för matematisk problemlösning i vardagliga situationer.
- Matematisk formulering av frågeställningar.

Vanlig missuppfattning

En del elever kan ha svårt för att ta till sig all information och provar då istället varierade sätt att räkna med hjälp av de tal som förekommer, alltså utan eftertanke. Andra elever kan tro att man måste räkna ut precis allt som kan räknas ut, men för att få svar på delfrågorna a och b behöver man inte det.

Anpassning av problemet

Enklare problem

Tydligare och mer kortfattad text, lägre tal och färre upplysningar kan underlätta. Exempel:

En klubb har 20 medlemmar. De går i klass 4 eller 5.

10 går i klass 4.

4 pojkar går i klass 5.

12 är flickor.

- Hur många går i klass 5?
- Hur många flickor går i klass 4?
- Vad kan man mer tänka ut?
- Hitta på ett liknande problem. Lös det.

Svårare problem

Högre tal och flera upplysningar kan försvåra. Exempel:

En skolkлубb har 100 medlemmar. De går i klass 3, 4, 5 eller 6.

58 är flickor.

30 går i klass 5.

14 pojkar går klass 6.

20 går i klass 3.

16 flickor går i klass 5.

40 går i klass 6.

10 pojkar går i klass 3.

- Hur många pojkar går i klass 5?
- Hur många flickor går i klass 4?
- Vad kan man mer tänka ut?
- Hitta på ett liknande problem. Lös det.

Här finns informationen inlagd i en tabell:

	Klass 3	Klass 4	Klass 5	Klass 6	totalt
pojkar	10			14	
flickor			16		58
totalt	20		30	40	100

Kommenterade elevlösningar:

Exempel 1, delproblem a och b:

Denna elev famlade lite först, räknade ut något på måfå:

$$15 - 7 = 8 \quad (\text{flickor i klass 4})$$

Hon funderade sedan lite och bytte taktik och fann en enkel lösningsväg för delproblem a:

$$15 + 15 = 30 \quad (\text{medlemmar i klass 4 och klass 6})$$

$$50 - 30 = 20 \quad (\text{medlemmar i klass 5})$$

Hon upptäckte till sist i delproblem b att hon kunde använda sin första uträkning där:

$$20 - 8 = 12 \quad (\text{flickor i klass 5})$$

$$8 + 12 = 20 \quad (\text{flickor i klass 4 och 5})$$

$$29 - 20 = 9 \quad (\text{flickor i klass 6})$$

Exempel 2, delproblem b:

Den här eleven ritade en tabell och skrev in informationen. Sedan skrev han ned resultatet av sina uträkningar (i huvudet) direkt i tabellen, det som nedan är markerat med rött:

	fyran	femman	sexan	alla
pojkar	7	8	6	21
tjejer			9	29
	15		15	50

Tolkning av hur eleven tänkt:

$$50 - 29 = 21 \quad (\text{medlemmar i klass 6})$$

$$7 + 8 = 15 \quad (\text{pojkar i klass 4 och 5})$$

$$21 - 15 = 6 \quad (\text{pojkar i klass 6})$$

$$15 - 6 = 9 \quad (\text{flickor i klass 6})$$

Liknande problem

Här följer två problem som har liknande karaktär som ovanstående. Till dessa finns enbart facit.

Gem

Hanna har 30 gem. De är av plast eller metall och antingen röda eller blå.

18 gem är av plast.

6 röda gem är av metall.

8 plastgem är blå.

- a) Hur många gem är av metall?
- b) Hur många plastgem är röda?
- c) Hur många gem är blå?
- d) Hitta på ett liknande problem och lös det.

Facit:

- a) 12 st
- b) 10 st
- c) 14 st

Ishockey

16 elever spelar ishockey. De har varsin klubba, svart eller röd.

Hur många flickor har svart klubba om det är 6 pojkar och

- a) 4 flickor har röd klubba?
- b) 8 elever har röd klubba och 4 pojkar har svart klubba?
- c) 10 elever har röd klubba och hälften så många flickor som pojkar har svart klubba?
- d) Hitta på ett eget liknande problem. Lös det.

Facit:

- a) 6 st
- b) 4 st
- c) 2 st

Del 4: Problemet Växter

Växten A är 120 cm hög och växer med 3 cm per dag. Växten B är 100 cm hög och växer med 5 cm per dag.

- Hur höga är A och B efter fem dagar?
- Hur höga kommer A och B att vara när de är lika långa?
- Efter hur många dagar är B 100 cm högre än A?
- Hitta på ett liknande problem och lös det.

Något om problemet

Den här typen av problem handlar om förändring över tid. Här efterfrågas höjden av växterna efter en viss tid och sedan när den, från början kortare men mer snabbväxande växten, vuxit ikapp den andra. En variant är att efterfråga tidpunkten då detta sker. Problemtypen kan lösas med många olika strategier.

Matematiken i problemet

Här följer några exempel på matematiskt innehåll som elever och lärare kan använda sig av och utveckla under lösningen av problemet och som även återfinns i det centrala innehållet i kursplanen.

- Centrala metoder för beräkningar med naturliga tal och enkla tal i decimalform.
- Enkla algebraiska uttryck och ekvationer i situationer som är relevanta för eleven.
- Tabeller och diagram för att beskriva resultat från undersökningar.
- Grafer för att uttrycka olika typer av proportionella samband vid enkla undersökningar.
- Strategier för matematisk problemlösning i vardagliga situationer.

Anpassningar av problemet

Enklare problem

En enklare variant på problemet är att bara låta en växt vara inblandad. Utifrån höjden från början och tillväxten kan man efterfråga tidpunkten för när den når en viss höjd eller hur hög växten är efter en viss tid. Ett förslag på hur ett enklare problem skulle kunna vara formulerat är:

En växt är 20 cm hög och växer med 5 cm per dag.

- Efter hur många dagar är växten dubbelt så hög?
- Hitta på ett liknande problem och lös det.

Svårare problem

Problemet blir svårare om man låter flera växter vara med. Med fler växter kan också problemet utvidgas. Till exempel kan man undersöka olika intervall för när vissa växter är högre än andra. Ett förslag på hur ett svårare problem skulle kunna vara formulerat är:

Växt A är 70 cm hög och växer med 4 cm per dag. Växt B är 90 cm hög och växer med 2 cm per dag. Växt C är 100 cm och den har vuxit klart.

- När kommer någon av växterna vara lika hög som en annan och hur höga är de då?
- Hitta på ett liknande problem och lös det.

Exempel på hur problemet kan lösas

Använda konkret material

Genom att till exempel använda ett måttband kan man steg för steg (dag för dag) undersöka tillväxten. Svaret syns direkt på måttbandet.

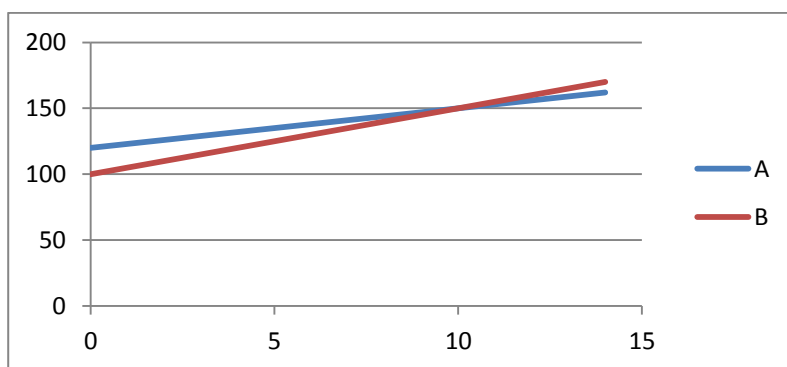
Logiskt resonemang

Ett logiskt resonemang som löser uppgiften skulle kunna vara:

Från början skiljer det 20 cm mellan växterna. Växt B växer ikapp växt A med 2 cm per dag. Då tar det 10 dagar innan de är lika långa. Efter 10 dagar har växt A växt $10 \cdot 4 = 40$ cm och är då (precis som växt B) 110 cm hög.

Rita ett diagram

Först ritas ett par värden för vardera växt in i ett diagram. Därefter dras linjer. Genom att titta var i diagrammet linjerna skär varandra kan man se när växterna är lika höga och hur lång tid som gått.



Använda tabell

Genom att i tabellen fylla i startvärden och fylla på med växtens tillväxt dag för dag framgår såväl höjden då växterna är lika höga som tidpunkten då detta sker.

Dagar	Växt A	Växt B
0	120 cm	100 cm
1	123 cm	105 cm
2	126 cm	110 cm
3	129 cm	115 cm
4	132 cm	120 cm
5	135 cm	125 cm
6	138 cm	130 cm
7	141 cm	135 cm
8	144 cm	140 cm
9	147 cm	145 cm
10	150 cm	150 cm

Liknande problem

Här följer två problem som har liknande karaktär som ovanstående. Till dessa finns enbart facit.

Mobilen

Jeff och Maria sparar till en varsin mobil. Jeff fick 1000 kr av sin farfar och sparar sedan 100 kr i månaden. Maria fick 1500 kr av sin mormor och sparar sedan 75 kr i månaden.

- Hur mycket pengar har Jeff och Maria när de har sparat ihop lika mycket pengar?
- När har Jeff råd att köpa en mobiltelefon som kostar 1990 kr?
- När har Maria råd att köpa en mobiltelefon som kostar 1990 kr?
- Hitta på ett liknande problem och lös det.

Facit:

- 3000 kr
- Efter 10 månader
- Efter 7 månader

Tunnan

En tunna rymmer 400 liter. Varje minut rinner det både in vatten i tunnan och läcker ut vatten i tunnan.

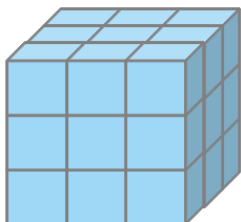
Hur lång tid tar det att fylla tunnan om det varje minut

- a) rinner in 200 liter och rinner ut 100 liter?
- b) rinner in 50 liter och rinner ut 10 liter?
- c) rinner in och rinner ut ett antal liter som du bestämmer?
- d) Hitta på ett liknande problem. Lös det.

Facit:

- a) 4 min
- b) 10 min

Del 5: Problemet Målade kuber



Lotta har limmat ihop 27 likadana små kuber till en stor kub som på bilden.

Sedan målar hon den stora kuben runt om på alla sidytor.

Hur många av de små kuberna har sedan

- Tre sidor målade?
- TVå sidor målade?
- En sida målade?
- Ingen målade sida?
- Hur många små kuber är målade på 0, 1, 2, 3 sidor om den stora kuben innehåller 64 eller 125 mindre kuber?
- Hitta på ett eget liknande problem. Lös det.

Något om problemet

Problemet handlar om en tredimensionell figur, en kub uppbyggd av mindre kuber. Eleverna kan upptäcka olika matematiska mönster. Antal mindre kuber som är omålade eller målade på ett bestämt antal sidor är kopplat till totala antalet mindre kuber som den stora kuben består av. Se exempel på matematiska mönster nedan.

Matematiken i problemet

Här följer några exempel på matematik som elever och lärare kan använda sig av och utveckla när de löser problemet och som även återfinns i det centrala innehållet i kursplanen:

- Rationella tal och deras egenskaper.
- Tal i bråk- och decimalform och deras användning i vardagliga situationer.
- Centrala metoder för beräkningar med naturliga tal och enkla tal i decimalform.
- Rimlighetsbedömning vid enkla beräkningar och uppskattningar.
- Hur mönster i talföljder och geometriska mönster kan konstrueras.
- Grundläggande geometriska objekt.
- Konstruktion av geometriska objekt.
- Vanliga lägesord för att beskriva föremåls och objekts läge i rummet.
- Enkla tabeller.
- Strategier för matematisk problemlösning.
- Matematisk formulering av frågeställningar.

Exempel på matematiska mönster som eleverna kan upptäcka:

Kub 3·3·3

Placering	Målade sidor	Antal klossar
Hörn	3	8
Övriga kanter	2	12
Övriga sidoytor	1	6
Inuti	0	1
Totalt		$3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

Kub 4·4·4

Placering	Målade sidor	Antal klossar
Hörn	3	8
Övriga kanter	2	$2 \cdot 12 = 24$
Övriga sidoytor	1	$2 \cdot 2 \cdot 6 = 24$
Inuti	0	$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
Totalt		$4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

Kub 5·5·5

Placering	Målade sidor	Antal klossar
Hörn	3	8
Övriga kanter	2	$3 \cdot 12 = 36$
Övriga sidoytor	1	$3 \cdot 3 \cdot 6 = 54$
Inuti	0	$3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$
Totalt		$5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

Kub $n \cdot n \cdot n$ (n är ett godtyckligt positivt heltal)

Placering	Målade sidor	Antal klossar
Hörn	3	8
Övriga kanter	2	$(n - 2) \cdot 12$
Övriga sidoytor	1	$(n - 2)^2 \cdot 6$
Inuti	0	$(n - 2)^3$
Totalt		n^3

Vanlig missuppfattning

Det kan vara svårt för en del elever att föreställa sig de delar som är skymda på bilden. De kan därför tro att de bara ska undersöka de kuber de ser. Ett tvådimensionellt objekt har hörn och sidor medan ett tredimensionellt objekt har hörn, kant och sida (sidoyta). Denna terminologi kan vara förvirrande.

Anpassning av problemet

Enklare problem

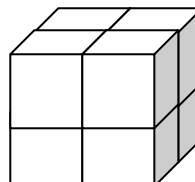
Enklare text, enklare byggnation med färre små kuber kan underlätta. Exempel:

Lotta har limmat ihop 8 likadana små kuber till en stor kub.

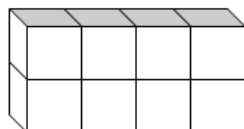
Sedan målar hon den stora kuben runt om på alla sidor.

Hur många av de små kuberna har sedan:

- a) tre sidor målade?
- b) två sidor målade?
- c) en sida målade?
- d) ingen sida målade?
- e) Hitta på ett eget liknande problem. Lös det.



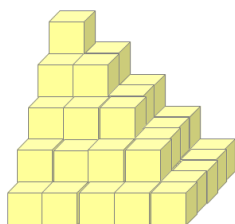
Problemet kan även förenklas genom att ändra objektet, t.ex. genom att utgå från åtta små kuber i form av ett rätblock och anpassa frågorna utifrån det objekt man valt.



Svårare problem

En mer komplicerad byggnation och fler kuber kan försvåra. Exempel:

Trappan



Lotta har limmat ihop 55 likadana små kuber till en trappa.

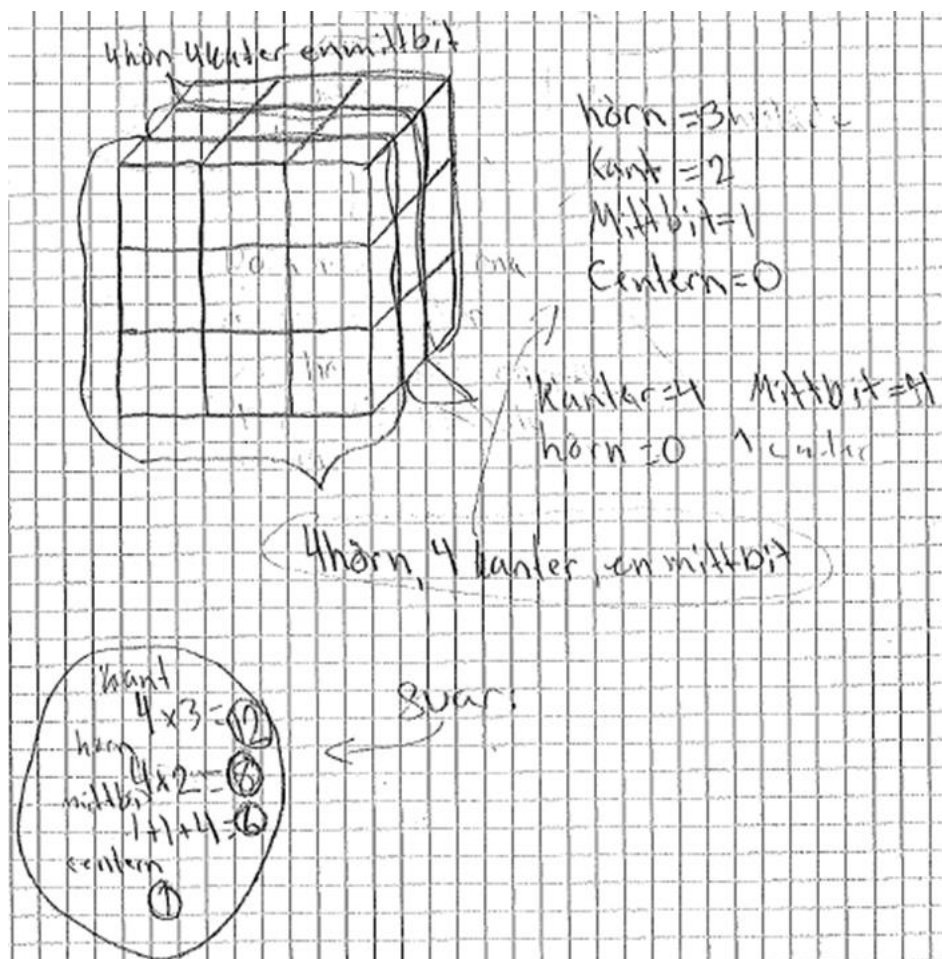
Sedan målar hon runt om på alla sidor.

Hur många av de små kuberna har sedan

- a) 5 sidor målade?
- b) 4 sidor målade?
- c) 3 sidor målade?
- d) 2 sidor målade?
- e) 1 sida målade?
- f) 0 sida målade?
- g) Hitta på ett eget liknande problem. Lös det.

Kommenterade elevlösningar

Exempel 1, delproblem a och b

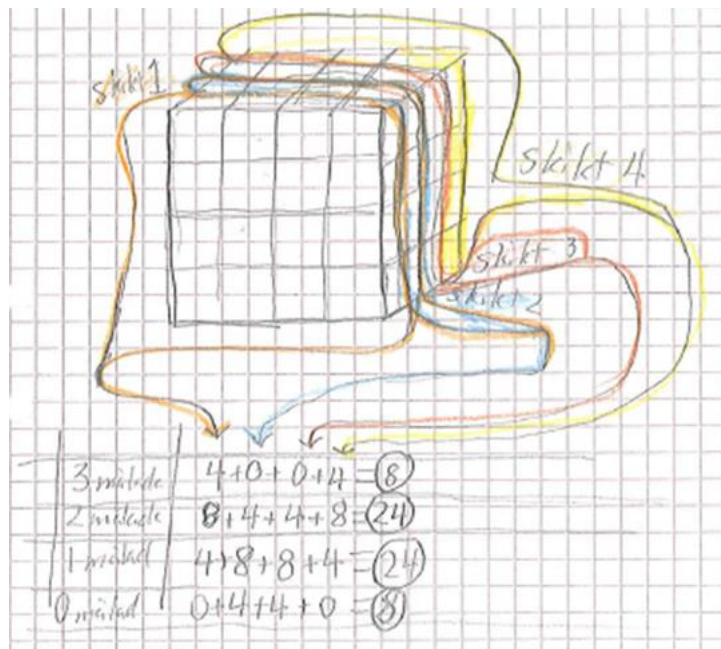


Eleven har ritat en figur och utifrån den börjat lösa delproblem a och b. Han har delat upp den stora kuben i tre skikt. Han har också gett de olika typerna av kuber egna beteckningar: kant, hörn, mittbit, centern. Sedan har han beräknat, skikt för skikt, hur många små kuber av varje typ det finns. Slutligen har han beräknat totala antalet kuber av varje typ.

Han har inte räknat ut antalet målade sidor totalt, men han har överst till höger nämnt hur många sidor som är målade på 1 kub av respektive typ.

Noterbart är att han på flera ställen har använt likhetstecknet på ett felaktigt sätt. Han har till exempel skrivit ” hörn = 3” när han menar att en kub av hörntyp har tre målade sidor och ”kanter = 4” för att ange att midskiktet innehåller fyra kuber av kanttyp.

Exempel 2, delproblem c



Den här eleven har, för att lösa en del av delproblem e, ritat en bild av en kub sammansatt av 64 små kuber. Hon har sedan med hjälp av olikfärgade markeringar sorterat upp den stora kuben i fyra skikt som hon också benämner skikt 1-4. Hon har slutligen gjort en tydlig tabell eller uppställning, där hon systematiskt, skikt för skikt och summerat, redovisar antalet kuber med 3, 2, 1 och 0 sidor målade.

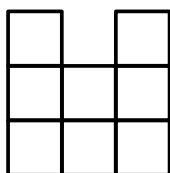
Liknande problem

Här följer två problem som har liknande karaktär som ovanstående. Till dessa finns enbart facit.

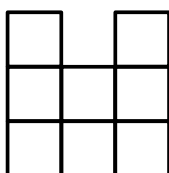
Slottet

Stig har ritat hur man kan bygga ett slott av kuber.

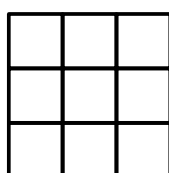
Bilderna visar hur slottet ska se ut från olika håll.



framifrån



från sidan



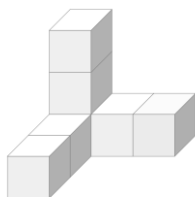
uppifrån

- Hur ser tornet ut bakifrån?
- Hur många kuber kan man använda som mest för att bygga slottet?
- Hur många kuber kan man använda som minst för att bygga slottet?
- Hitta på ett eget liknande problem. Lös det.

Facit: Förutsättningar och tolkningar kan göra problemet lite svårt, t.ex. sett uppifrån, finns det då en kloss i mitten?

- Likadant som framifrån
- 22 st
- 16 st

Kuben



Amal bygger med småkuber enligt bilden.

- Vilket är det minsta antal småkuber hon behöver fylla på med för att bygga en stor kub?
- Vilket är det minsta antal småkuber hon behöver fylla på med om hon vill att sidan i kuben ska vara 4 småkuber?
- Hitta på ett liknande problem och lös det?

Facit:

- 10 st
- 57 st

Del 6: Problemet Snöbollar

Agnes hade rullat tre gånger så många snöbollar som Sixten, sånär som på två. Hur många hade var och en av dem rullat om de tillsammans hade gjort

- 10 snöbollar?
- 26 snöbollar?
- mellan 40 och 60 snöbollar?
- Hitta på ett liknande problem. Lös det.

Något om problemet

Detta är ett problem där det gäller för eleverna att läsa texten noga. En strategi bland flera att lösa de första delproblemen kan vara att ställa upp en ekvation. I sista delproblemet gäller det att hitta flera lösningar. Under lösandets gång kan de upptäcka olika matematiska mönster som underlättar för dem.

Generellt kan man inse att om Sixten rullat n snöbollar har Agnes rullat $(3n - 2)$ snöbollar och tillsammans har de rullat $(4n - 2)$ snöbollar. Här är n ett godtyckligt positivt heltal.

Matematiken i problemet

Här följer några exempel på matematik som elever och lärare kan använda sig av och utveckla när de löser problemet och som även återfinns i det centrala innehållet i kursplanen:

- Centrala metoder för beräkningar med naturliga tal.
- Rimlighetsbedömning vid uppskattningar och beräkningar i vardagliga situationer.
- Obekanta tal och deras egenskaper samt situationer där det finns behov av att beteckna ett obekant tal med en symbol.
- Enkla algebraiska uttryck och ekvationer i situationer som är relevanta för eleven.
- Metoder för enkel ekvationslösning.
- Hur mönster i talföljder kan konstrueras, beskrivas och uttryckas.
- Tabeller och diagram för att beskriva resultat från undersökningar.
- Tolkning av data i tabeller.
- Strategier för matematisk problemlösning i enkla situationer.
- Matematisk formulering av frågeställningar utifrån enkla vardagliga situationer.

Vanlig missuppfattning

Innehållet i texten kan uppfattas som alltför komplicerad och därför vara svårt att ta till sig i sin helhet för vissa elever. Uttrycket ”sånär som på” kan vara obekant för några elever. En del av dem bortser därför från den sista detaljen i första meningen eller tolkar det fel.

Anpassning av problemet

Enklare problem

Enklare text, lägre tal, färre upplysningar att ta hänsyn till kan underlätta. Exempel:

Maria hade tre gånger så många snöbollar som Peter. Hur många hade Maria om de tillsammans hade

- a) 8 snöbollar?
- b) 12 snöbollar?
- c) mellan 15 och 25 snöbollar?
- d) Hitta på ett liknande problem. Lös det.

Svårare problem

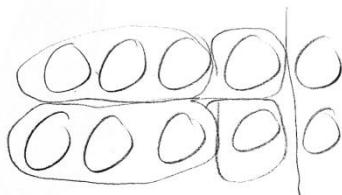
Högre tal och flera upplysningar att ta hänsyn till kan försvåra. Exempel:

Albin hade rullat tre gånger så många snöbollar som Frida, så när som på två. Ture hade rullat dubbelt så många som Frida, så när som på en. Hur många hade var och en av dem rullat om de tillsammans hade gjort

- a) 27 snöbollar?
- b) 39 snöbollar?
- c) mellan 60 och 70 snöbollar?
- d) Hitta på ett liknande problem. Lös det.

Kommenterade elevlösningar

Exempel 1 delproblem a



Eleven har här först ritat de tio snöbollarna. Sedan har han, med ett lodrätt streck, tagit bort de 2 snöbollar som Agnes **inte** hade gjort. Därefter återstod 8 snöbollar. Han fördelade dessa så att Agnes fick 6 snöbollar, tre gånger fler än Sixten, som fick 2 snöbollar. Detta är en felaktig lösning.

Exempel 2 delproblem b

S	A	alla
1	$3 - 2 = 1$	$1 + 1 = 2$
2	$6 - 2 = 4$	$2 + 4 = 6$
3	$9 - 2 = 7$	$3 + 7 = 10$

Den här eleven har noga och systematiskt provat sig fram hur många snöbollar det blev totalt, om Sixten rullat 1, 2 eller 3 snöbollar. Hon fann totala antalet snöbollar 10 på sista raden. I en sådan här uppställning kan man hitta flera användbara matematiska mönster.

Liknande problem

Här följer två problem som har liknande karaktär som ovanstående. Till dessa finns enbart facit.

Snäckor

Knatte, Fnatte och Tjatte har samlat snäckor. Knatte har samlat 3 snäckor fler än Fnatte, som har samlat 3 snäckor fler än Tjatte. Hur många snäckor har Knatte samlat om de tillsammans har samlat

- a) 24 snäckor?
- b) 36 snäckor?
- c) 48 snäckor?
- d) Hitta på ett liknande problem. Lös det.

Facit:

- a) 11 snäckor
- b) 15 snäckor
- c) 19 snäckor

Frimärken

Jolin har två frimärken fler än Tindra. Isak har tre frimärken fler än Tindra.

- a) Hur många frimärken har Isak om Jolin har 7 frimärken?
- b) Hur många frimärken har Jolin om Isak har 25 frimärken?
- c) Hur många frimärken har Tindra om alla tre tillsammans har 101 frimärken?
- d) Hitta på ett eget liknande problem. Lös det.

Facit:

- a) 8 frimärken
- b) 24 frimärken
- c) 32 frimärken

Övriga problem

Här finns en blandning av olika problem. Som lärare behöver du reflektera över och på olika sätt lösa problemen för att förstå vilket matematiskt innehåll som ingår, hur problemet ska behandlas samt hur det kan tolkas. En del problem är mer öppna vilket innebär att tolkningar av problemet kan leda till olika lösningar och till olika svar. Dessa tolkningar behöver man antingen komma överens om med eleverna innan alternativt kan läraren efteråt fråga eleverna hur de har tänkt och på så sätt få fram deras tolkning. Den senare kan leda till mer matematiska diskussioner än bara en lösning av uppgiften.

Fyll i talen

- a) $11 + _ = 15 - _$
- b) $76,5 + _ = 309,82 - _$
- c) $\frac{3}{4} + _ = 24 \frac{1}{2} - _$
- d) Hitta på ett eget liknande problem. Lös det.

Billys bok

Billy numrerade alla sidorna i sin bok 1, 2, 3 och så vidare.

- a) Hur många sidor hade boken om han använde 15 siffror?
- b) Hur många sidor hade boken om han använde 57 siffror?
- c) Välj ett eget antal siffror, hur många sidor har den boken?
- d) Hitta på ett eget liknande problem. Lös det.

Bandy

Några lag spelade bandy. Varje lag spelade en gång var mot de andra lagen. Hur många matcher spelades

- a) om det var tre lag?
- b) om det var fyra lag?
- c) om du själv får bestämma hur många lag som spelade?
- d) Hitta på ett eget liknande problem. Lös det.

Datorer

Några datorer skulle packas i lådor. I varje liten låda packades två datorer. I varje stor låda packades sex datorer. Hur många lådor av varje storlek kunde det gå åt om det var

- a) 10 datorer?
- b) 22 datorer?
- c) 56 datorer?
- d) Hitta på ett liknande problem. Lös det.

Frukt

Hugo köpte frukt. Varje äpple kostade 3 kr, varje banan 5 kr och varje apelsin 4 kr.

Vad kunde han köpa för

- a) 20 kr?
- b) 28 kr?
- c) 35 kr?
- d) Hitta på ett liknande problem. Lös det.

Familjen Knutsson

I familjen Knutsson finns mamma Maja samt barnen Bill och Bull. Hur gamla kan de vara om deras

- a) medelålder är 20 år och medianålder är 21 år?
- b) medelålder är 33 år och medianålder är 32 år?
- c) medelålder, medianålder och typvärde är bestämda av dig?
- d) Hitta på ett liknande problem. Lös det.

Glaskulorna

I en påse finns det röda, gröna, gula och blå glaskulor. Vile tar 2 kulor ur påsen utan att titta.

Vilka färger kan Villes två kulor ha om det finns

- a) 1 kula av varje färg?
- b) 2 kulor av varje färg?
- c) 1 röd, 1 blå, 2 gula och 2 gröna kulor?
- d) Hitta på ett liknande problem. Lös det.

Tärningar

Några klasskamrater kastar två likadana tärningar och adderar de två talen som kommer upp. Vilka är de vanligaste summorna de får om de använder

- a) två fyrsidiga tärningar?
- b) två sexsidiga tärningar?
- c) två tjugosidiga tärningar?
- d) Hitta på ett liknande problem. Lös det.

Skolgården

En gård är täckt av asfalt, gräs och grus. Gruset täcker halva gården.

- Om gräset täcker $\frac{1}{3}$ av gården, hur stor del täcker asfalten?
- Om gräset täcker 25 % av gården, hur stor del täcker asfalten?
- Om skolgården är 600 m^2 och gräset täcker 0,20 av gårdens area, hur många m^2 täcker asfalten?
- Hitta på ett eget liknande problem. Lös det.

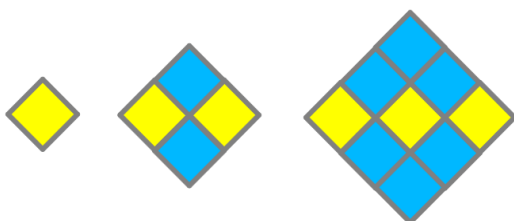
Glass

Lisa ska köpa lösglass i kulor och kan välja på lite olika smaker. Hon vill ha två glasskulor. På hur många olika sätt kan hon välja sin glass om det finns

- 3 smaker?
- 4 smaker?
- ännu fler smaker (du bestämmer hur många)?
- Hitta på ett liknande problem. Lös det.

Plattorna

Måns lägger ett mönster med hjälp av plattor, 4 cm^2 stora. Så här ser mönstret ut:



figur 1

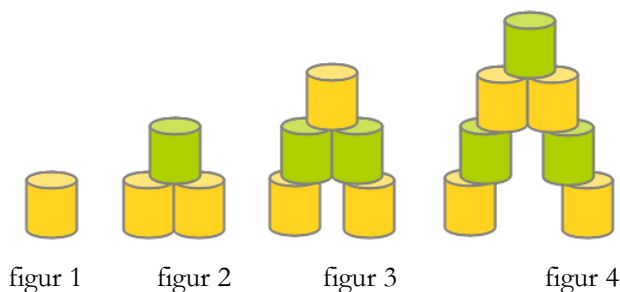
figur 2

figur 3

- Hur många plattor av varje färg går det åt till figur 4?
- Hur stor area har figur 5?
- Hur stor total area av plattor av varje färg har figur 1-8?
- Hitta på ett liknande problem. Lös det.

Cylindrar

Linnea och Erik bygger detta mönster med hjälp av gula och gröna cylindrar:



- Hur många cylindrar av varje färg går det åt till figur 5?
- Hur många cylindrar av varje färg går det åt till figur 7?
- Hur många cylindrar av varje färg går det åt totalt till de 10 första figurerna?
- Hitta på ett liknande problem. Lös det.

Skotta snö

Erik skottar snö på skridskobanan. Han skottar hela banan på 2 timmar.

- Anneli gör det på 4 timme. Hur lång tid tar det om Erik och Anneli hjälps åt?
- Bengt gör det på 1 timme och 20 min. Hur lång tid tar det om Erik och Bengt hjälps åt?
- Hur lång tid tar det om alla tre hjälps åt?
- Hitta på ett eget liknande problem. Lös det.

Ängen

En kvadratisk äng ska delas in i mindre hagar som alla har samma area men olika form.

Hur kan det se ut om det ska bli

- två mindre hagar?
- tre mindre hagar?
- fem mindre hagar?
- Hitta på ett eget liknande problem. Lös det.

Minnesmästare

Här är några siffror uppradade. Försök hitta en strategi för att minnas raden

- 246810121416,
- 171513119753,
- 452463474485.
- Hitta på ett liknande problem. Lös det.

Tomburkar

Tindra, Charlie och Jennifer hade pantat tomburkar. De bestämde sig för att dela lika på pengarna. Medan Tindra tog sin tredjedel satt Charlie och Jennifer och spelade ett spel, så de märkte inte det. När de tog sina delar tog de därför en tredjedel var av det som var kvar, för de trodde att resten var Tindras. Hur mycket pengar hade de tjänat totalt om det sedan fanns kvar

- a) 12 kr?
- b) 18 kr?
- c) 36 kr?
- d) Hitta på ett eget liknande problem. Lös det.

Tennisbollar

Johan har fått pengar för att köpa tennisbollar. Hur mycket kostar en gul, grön respektive röd tennisboll?

- a) Om han köper 5 gula bollar får han 20 kr kvar, men om han köper 7 måste han låna 20 kr.
- b) Om han köper 11 gröna bollar får han 10 kr kvar, men om han köper 13 måste han låna 10 kr.
- c) Om han köper 12 röda bollar får han 51 kr kvar, men om han köper 18 måste han låna 51 kr.
- d) Hitta på ett liknande problem och lös det.

Lejon

En djurpark har fler än 15 och färre än 25 lejon. Hur många lejon kan det vara

- a) om 20 % är hanar och resten honor?
- b) om en fjärdedel är hanar och resten honor?
- c) om 50 % är honor, en tredjedel unga hanar och resten vuxna hanar?
- d) Hitta på ett liknande problem. Lös det.

De fläckiga talen

Några tal är skrivna med tre siffror var. Tyvärr har fläckar gjort så man bara ser en del av talen. Vilka siffror ska stå istället för frågetecknen om

- a) $140 + ?32 = 572$
- b) $85,7 - 2?,8 = 64,9$
- c) $?? - 0,72? = 1,98$
- d) Hitta på ett liknande problem. Lös det.