Skolverket

Problembanken

Gymnasieskolan, modul: Undervisa matematik utifrån problemlösning

Skolverket

Modul: Undervisa matematik utifrån problemlösning
Problembank

Kombinatorik – paritetskontroll

Vi är vana att dela objekt runtomkring oss i två klasser, oftast med tanke på något slags motsatsförhållande. Det är svart och vit, söt och surt, kvinnlig och manligt, god och ond, Yin och Yang, och så vidare. Det kanske mest kända matematiska indelningen är jämnt och udda men det finns förstås många fler.

Med termen *paritetskontroll* menar man ofta en undersökning med avseende på jämna och udda tal. En sådan strategi kan i flera situationen förkorta lösningen av en uppgift väsentligt.

1. På varje ruta i ett 5 × 5 rutnät sitter en myra. På en given signal flyttar sig varje myra till en intilliggande ruta (två rutor är intilliggande om de har en gemensam sida). Kan förflyttningen organiseras så att efteråt finns det återigen en myra på varje ruta i nätet?

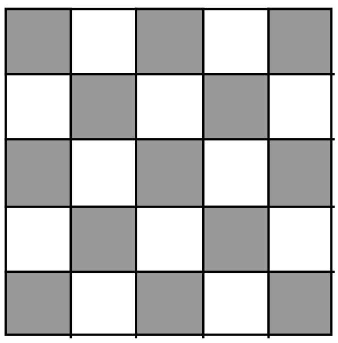
2. Ett heltal A delas med ett annat heltal B. Kvoten är C medan resttermen är D, alltså

$$\frac{A}{B} = C + \frac{D}{B}.$$

De sista siffrorna (entalssiffrorna) i talen A, B, C och D återfinns bland siffrorna 1, 3, 5, 7 och 9. Kan detta stämma?

3. Ett kvadratiskt pappersark är indelat i små kvadratiska rutor. Längs indelningslinjerna har man skurit ut en mindre kvadrat. Kan den återstående delen av arket bestå av precis 250 små rutor?

Svar och kommentarer



1. Måla rutorna i nätet på schackbrädevis som till exempel i figuren intill. I så fall finns det i nätet 13 svarta och 12 vita rutor. De 13 myror som ursprungligen sitter på de svarta rutorna kommer därför att hamna på de tolv vita rutor och tvärtom, de 12 myror som ur-

sprungligen sitter på de vita rutorna kommer att hamna på de 13 svarta rutor. Minst en av de svarta rutorna kommer därför att blir tom medan på minst en av de vita rutorna kommer det att hamna minst två myror. Nej, det är inte möjligt.

2. Om $\frac{A}{B} = C + \frac{D}{B}$ så är $A = B \cdot C + D$.

Eftersom de sista siffrorna i B och C är udda så är produkten $B \cdot C$ udda. Då D är ett udda tal också så är summan $B \cdot C + D$ är ett jämnt tal. Detta motsäger antagandet att även A är ett udda tal. Således stämmer inte påståendet.

3. Anta att det kvadratiska arket har sidan som svarar mot a rutor medan den kvadraten som man skurit bort har sidan som svarar mot b rutor. Den återstående delen består därför av $a^2 - b^2$ rutor. Då gäller det att $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = 250$. Om a och b är båda jämna eller båda är udda så är talen $a - b$ och $a + b$ båda jämna. I så fall måste deras produkt vara delbar med 4. Dessvärre är talet $250 = 2 \cdot 125$ inte delbart med 4, bara med 2, alltså kan a och b inte samtidigt vara jämna eller udda. Om ett av dessa tal är jämnt och det andra är udda så är båda talen $a - b$ och $a + b$ udda, vilket gör att produkten $(a - b)(a + b)$ är ett udda tal. Svaret är därmed att den återstående delen av arket aldrig kan bestå av precis 250 rutor.

Fördjupning i kombinatorik – paritetskontroll

Jämna och udda tal

Vi säger att heltal n är jämnt om det är delbart med 2, alltså kan skrivas som $n = 2k$ för något heltal k. I annat fall är talet n udda. Ett udda tal kan alltså skrivas på formen $n = 2k + 1$, för något heltal k.

Det är lätt att kontrollera att summan av två jämna tal eller två udda tal är jämn, medan summan av ett jämnt och ett udda tal är udda. Lite mera generellt kan vi säga att om $a_1, a_2, \dots, a_m$ är udda tal så är deras summa $s = a_1 + a_2 + \dots + a_m$ udda om m är udda, medan s är jämn om m är jämnt.

Mer information kan hittas här:

http://www.webbmatte.se/gym

http://www.matteguiden.se/

http://www.matteboken.se/

http://crest.cs.abo.fi/imped/impedseries/LN2.digi.pdf

Förslag på fler övningar

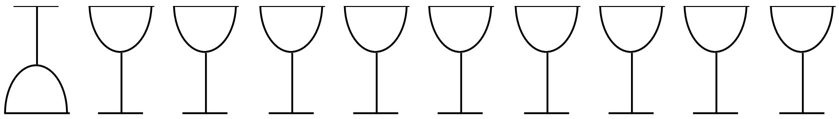
4. Jörgen säger ett positivt heltal. Jana säger ett tal som skiljer sig från Jörgens tal med 1 (alltså Jörgens tal + 1 eller Jörgens tal – 1). Sedan säger Jörgen återigen ett tal som skiljer sig från Janas tal med 1. Sedan är det Janas tur, osv. Den sista, åttonde gången är det återigen Jana som säger ett tal som skiljer sig från det talet Jörgen sist sade med 1. Kan summan av de åtta talen vara 345?

5. Kan stjärnorna i uttrycket $* 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 = 20$ ersättas med tecknen + eller – så att likheten blir sann?

6. Runt en cirkel placeras 99 heltal. Finns det alltid två intilliggande tal vars summa är jämn?

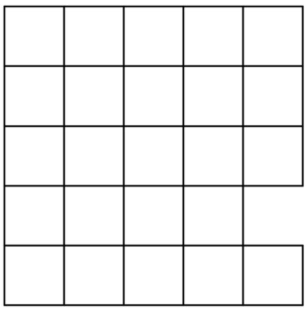
7. Några av rutorna i ett 6×7 rutnät målas röda, de övriga lämnas vita. Kan det målas på så sätt att antalet röda rutor är 7 färre än vita?

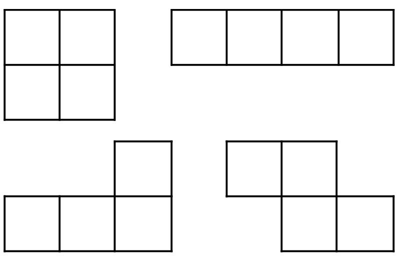
8. På bordet står tio vinglas: nio av dessa är vända uppåt och en är vänd nedåt. I ett steg får man vända på godtyckliga två eller fyra glas åt gången. Kan man efter ett antal sådana steg få alla glasen vända uppåt?



(Ledtråd: Hur förändras antalet nedåtvända glas i varje steg)

9. Från ett 5×5 rutnät har man klippt bort en ruta, enligt figuren intill. Kan det stympade rutnätet övertäckas med 6 lämpligt valda figurer av typ som visas nedan? Man kan alltså välja vilka som helst av dessa figurer bara att de är totalt 6. Bitarna kan vridas och vändas om så behövs men får inte överlappa varandra eller ”sticka ut” utanför det stympade nätet. De små rutorna är lika stora i alla figurer.





(Ledtråd: måla nätet på schackbrädevis.)

Förslag till lösningar

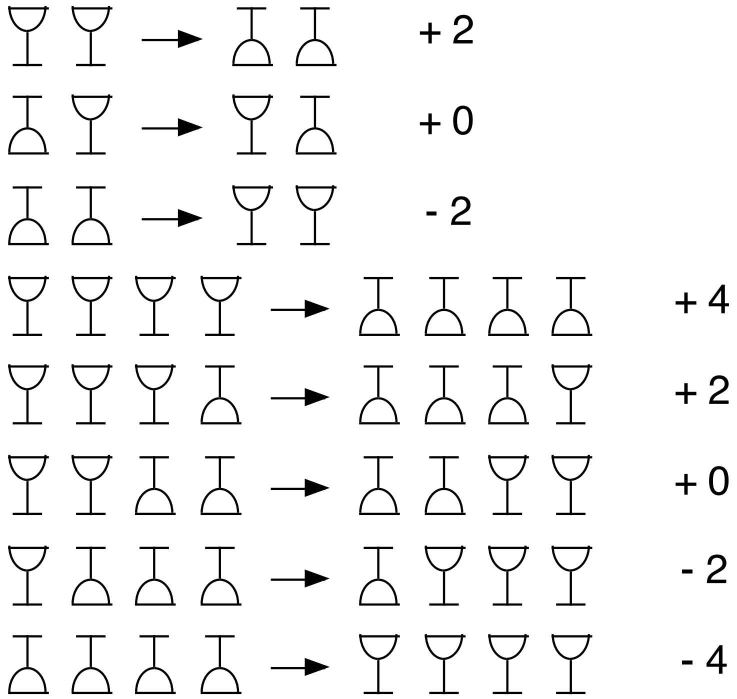
4. Om Jörgens första tal var udda så var nästa (Janas) tal jämnt, nästa udda, sedan jämnt osv. Om det första talet var jämnt så var det andra udda, det tredje jämnt, osv. Hälften av de åtta talen var därmed udda och hälften var jämna. Summan av fyra jämna tal och fyra udda tal är alltid jämn, därmed kan den inte vara 345.

5. Vänstra ledet innehåller fem udda tal och därför, hur man än sätter in tecknen + eller – så blir vänstra ledet ett udda tal, alltså aldrig 20. Nej, det är inte möjligt.

6. Summan av två tal är udda endast om ett av talen är udda och det andra jämnt. För att alla parvisa summor ska vara udda måste därför talen runt cirkel ligga vartannat jämnt, vartannat udda. Därmed måste det finnas lika många jämna som udda tal, vilket är hälften av alla tal. Detta är dock omöjligt i vårt fall då vi totalt har 99 tal och 99 är inte delbart med 2. Därmed kommer det säkert att finnas två intilliggande tal vars summa är jämn.

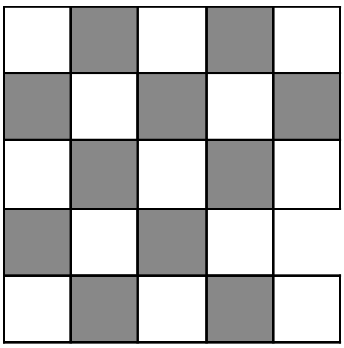
7. Rutnätet består av $6 \cdot 7 = 42$ rutor. Låt oss anta att det är möjligt att uppfylla uppgiftens villkor, alltså att antalet vita rutor är 7 fler än de röda. Om vi då tänker att vi avlägsnar 7 vita rutor från nätet så bör det återstå lika många vita som röda. Tillsammans skulle det därför vara kvar ett jämnt antal rutor. Talet $42 - 7 = 35$ är ett udda tal. Uppgiften är därför inte möjlig att genomföra.

8. Från början har vi ett glas som är vänt nedåt. Vi får titta på hur antalet nedåtvända glas förändras i varje steg:



Antalet nedåtvända glas ökar antingen med 2 eller 4, eller minskar med 2 eller 4. Förändringen är alltid ett jämnt tal. Från början fanns det 1 nedåtvänt glas, ett udda antal. Summan av ett udda och ett jämnt tal är alltid udda. Antalet nedåtvända glas kommer därmed alltid att vara ett udda tal. Därför kan det aldrig vara 10. Det är alltså omöjligt att få alla glasen vända nedåt.

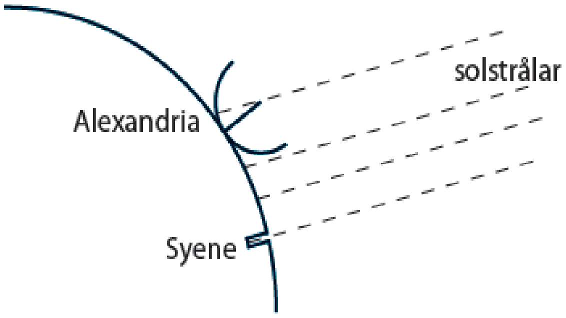
9. Nej, det blir aldrig möjligt. Låt oss börja med att måla nätet på schackbrädevis. Var och en av de fyra bitarna täcker alltid två vita och två svarta rutor, hur man än väder och vrider på biten. Tillsammans kommer 6 bitar att täcka lika många svarta som vita rutor. Det stympade brädet har dock 11 svarta och 13 vita rutor.



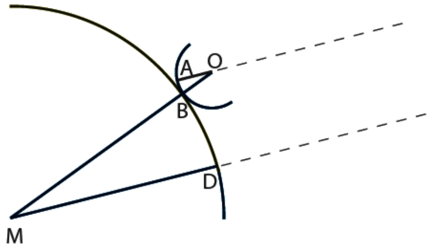
Geometri – likformighet

10. Hur stor är jorden?
För att beräkna hur stor jorden är började greken Eratostenes undersöka solens strålar. Han ville veta när solen befann sig längst ut ovanför den norra delen av halvklotet, precis ovanför Kräftans vändkrets. I staden Syene grävde han en djup grop i marken och la ned en spegel i hålet. När solens strålar reflekterades i spegeln den 21 juni visste han att den befann sig rakt ovanför. Han lät då tillverka en skål i form av ett halvt klot med en pinne i mitten där pinnen hade samma längd som klotets radie.

Ett år senare begav Eratostenes sig till staden Alexandria. Staden Syene låg 5000 stade (ca.785 km) från Alexandria. Den 21 juni det året placerade han skålen på marken så att pinnen pekade rakt upp.



När solen var som högst ovanför Alexandria markerade han punkten A i skålen sådan att BA var skuggan från pinnen OB.

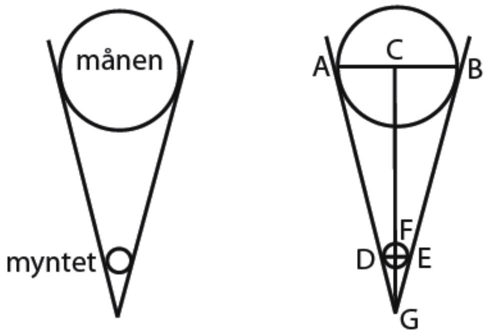


Figuren OAB kallas för cirkelns sektor. En annan cirkelsektor bildas i figuren av jordens mittpunkt M samt städerna Alexandria (punkten B) och Syene (punkten D). Sträckorna MB och MD är båda lika med jordens radie.

a. Kontrollera att cirkelsektorerna OAB och MDB är likformiga.
b. Formulera sambandet från vilket Eratostenes kunde bestämma jordens radie MB.
c. Bestäm jordens radie då OB = 1 m och AB = 12,6 cm.
d. Vilken var jordens diameter enligt Eratostenes? Vad är jordens verkliga diameter?

e. Hur stort är felet i hans beräkning?

11. Hur långt bort från jorden är månen?
Eratostenes utförde fler mätningar och kom fram till att månens radie var 1 557,5 km (se fördjupningsmaterialet). Han väntade sedan tills fullmånen var över hans huvud, tog ett litet mynt och sträckte sin hand så långt att myntet täckte precis månen.



a. Hur kan du avgöra om trianglarna ACG och DFG är likformiga? (Punkten F finns i mitten av den mindre cirkeln).
b. Hur kan Eratsotenes mäta sidorna i triangeln DFG?
c. Vilka sidor i triangeln ACG var kända?
d. Hur kan Eratostenes bestämma avståndet GC från jorden till månen? Skriv upp sambandet och utför beräkningarna med rimliga mått.

Efter att ha löst uppgifterna ser du kanske att Eratostenes uträkningar ger svar som är långt ifrån korrekta. Detta beror inte alls på grekernas okunskap. Deras matematiska resonemang är helt korrekta och det är inte något fel på deras logik. Beräkningarna baserades på astronomiska observationerna och vid sådana är det lätt att begå fel. Himlen observerades uteslutande med ögat enbart och det saknades moderna mätinstrument. Teleskopen uppfanns långt senare, 1800 år efter Eratostenes död.

Svar och kommentarer

10. a. Vinklarna AOB och BMD är alternatvinklar, alltså är de lika stora. Båda trianglarna OAB och MDB är likbenta eftersom OA = OB samt MD = MB. Således är trianglarna likformiga enligt Sida-Vinkel-Sida principen.

b. $\frac{OB}{MB} = \frac{AB}{DB}$, alltså $MB \cdot AB = OB \cdot DB$. Härifrån följer att $MB = \frac{OB \cdot DB}{AB}$.

c. Radien, där alla längder är omvandlade till meter är $MB = \frac{OB \cdot DB}{AB} = \frac{1 \cdot 785000}{0{,}126} =$ 6230158m, dvs cirka 6230 km.

d. Diameter = 2 · radien = 12460 km

11. a. Båda trianglarna har en rät vinkel (90° vid vinkel ACG och vid F) samt en gemensam vinkel (vid vinkeln DGE). Därför måste den tredje vinkel i den stora triangeln, vinkel GAC, vara lika stor som den tredje vinkeln i den lilla triangeln, vinkeln GDF. Således är trianglarna likformiga.

b. Sidan DF är myntets radie medan FG är avståndet från ögat till myntets mittpunkt.

c. Bara sidan AC, månens radie.

d. Eftersom trianglarna ACG och DFG är likformiga så är $\frac{GC}{GF} = \frac{AC}{DF}$.

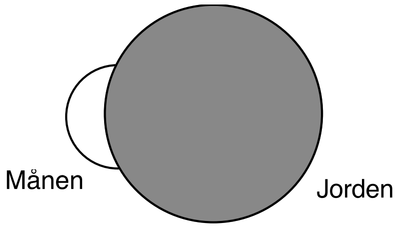
Likformighet - fördjupning

Hur stor är solen? Hur långt från jorden finns månen? Dessa och många andra liknande frågor sysselsatte de antika grekiska matematikerna 300 år före vår tideräkning. Svaren fann de slutligen med hjälp av relativt grundläggande geometri, enkla astronomiska observationer och sunt förnuft.

Arbetet pågick i ett par århundraden och den som till slut fick fram svaren var den grekiske matematikern Eratostenes som levde i Alexandria mellan 276 och 194 före vår tideräkning.

Även om uträkningarna inte gav precis samma resultat som vi har idag så var de förbryllande bra med tanke på att grekerna inte hade tillgång till moderna instrument så som teleskopet och klockan!

Genom flera olika observationer, några hundra år före vår tideräkning, kunde grekerna konstatera att jorden har formen av ett klot. Över havet såg man till exempel först toppen av en mast innan resten av den inkommande båten sakta blev synlig. Ännu viktigare var observationer av månen. Grekerna visste att månen inte lyser av sig själv utan speglar ljuset som kommer från solen. På natten såg grekerna månen i form av en skära och tolkade det som att jorden ligger i vägen för solens strålar. Jordens skugga visar då sig i form av en del av en cirkel, alltså måste jorden vara ett klot.



Mer information kan hittas här:

http://www.webbmatte.se/gym

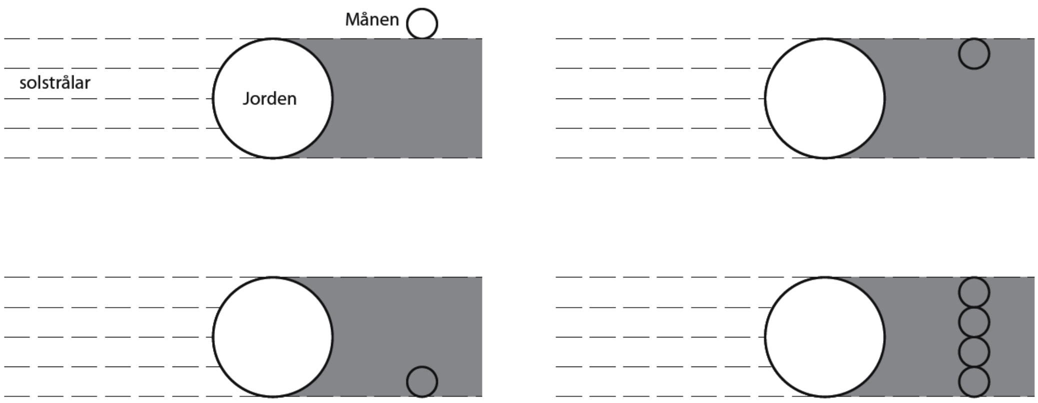
http://www.matteguiden.se/

http://www.matteboken.se/

Förslag på fler övningar

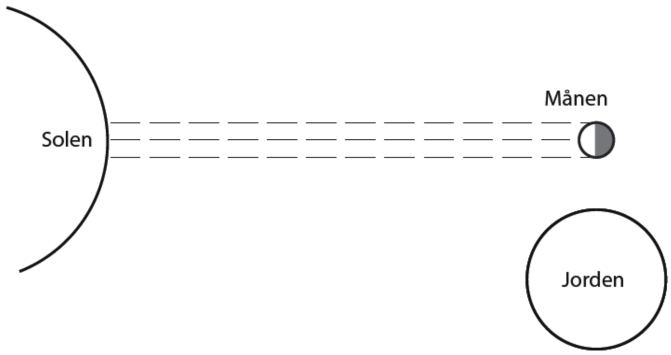
12. Hur stor är månen?
Den här frågan löste grekerna genom observationer under månförmörkelse. Månen och solen befinner sig då på motsatta sidor av jorden, månen är då i jordens skugga och syns inte. Titta på den första bilden: månen börjar dyka ner i jordens skugga. Den andra bilden visar tidpunkten då den sista biten av månen försvinner i skuggan. Grekiska astronomer antecknade den tid det tog från situationen i den första bilden till situationen i den andra. Låt oss säga att tiden var, enligt våra tidsenheter en timme.

Nu väntade de tills månen på nytt dök upp på andra sidan av skuggan (situationen i figur tre). Mellan bild ett och bild tre tog det fyra gånger längre tid, alltså fyra timmar.

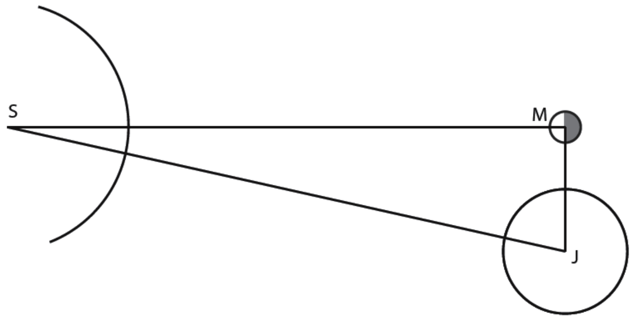


a. Vilken slutsats kunde de dra av detta?
b. Hur stor var månens diameter enligt grekerna?

13. Hur långt från jorden är solen?
För att kunna bestämma detta avstånd utgick astronomerna från observationen att när de såg halvmånen måste vinkel mellan solen-månen-jorden vara 90° (se figuren nedan).



Genom att rikta ett vinkelmätningsinstrument (en slags gradskiva) mot solen och månen kunde astronomerna bestämma att vinkeln SJM var 87°.

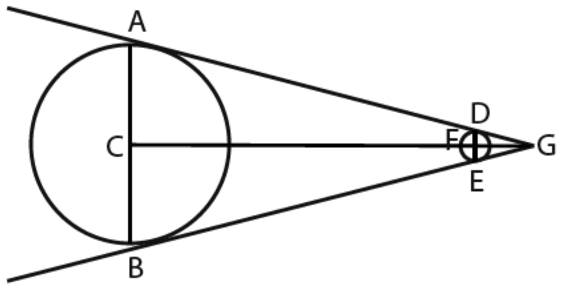


I triangeln SJM hade grekerna därför vinkeln SJM = 87˚, vinkeln JMS = 90˚. Avståndet JM från jorden till månen har du beräknat tidigare. För att bestämma avståndet JS kunde grekerna utföra en enkel uträkning baserad på då nyskapad teknik som vi idag kallar för trigonometri.

a. Skriv ned ett trigonometriskt samband med hjälp av bilden ovan.
b. Hur långt från Jorden finns Solen enligt de antika grekerna?
c. Utför dessa beräkningar med de mått vi har idag.

Eratsotenes fick avståndet till solen, JS, att vara cirka 19,1 gånger större än avståndet till månen. Dessvärre var Eratostenes verktyg lång ifrån exakta och det riktiga måttet av vinkeln SJM är större, nämligen 89,85˚. Detta medför att avståndet till solen i verkligheten är cirka 400 gånger större än avståndet till månen.

14. Hur stor är solen?
Det slutliga steget är återigen en enkel astronomisk observation och betraktande av likformiga trianglar. Astronomerna observerade att under solförmörkelse täcker månen så gott som hela solskivan (se figuren nedan). Detta kunde utnyttjas för att hitta solens radie.



Undersök trianglarna ACG och DFG. Försök hitta lämpliga samband och beräkna solens radie.

För övrigt baserade Eratostenes sina beräkningar på de tidigare astronomernas observationer (sol- och månförmörkelser inträffar ju inte så ofta). Hur som helst, om inte annat så bevisade de antika grekerna klart vilken styrka som ligger i de matematiska resonemangen och uträkningarna. I synnerhet i de vackra geometriska argument som huvudsakligen baserades på figurernas likformighet.

Förslag till lösningar

12. a. Månens storlek (diameter) är 4 gånger mindre än jordens.

b. Enligt grekerna var månens diameter $\frac{1}{4} \cdot 12460 = 3115$ km.

13. a. Trigonometriska samband ger att $\frac{MJ}{SJ} = \cos SJM$, och då blir $SJ = \frac{MJ}{\cos SJM}$.

b. Med $MJ = 311500$ km och vinkeln $SMJ = 87°$ ($\cos 87° \approx 0{,}052336$) får vi $SJ \approx$ 5950000 km.

14. Resonemanget är samma som i uppgiften 3a. Båda trianglarna har en rät vinkel (vid C och vid F), båda har en gemensam vinkel (vid G) och därmed är den tredje vinkeln i den ena triangel (vid A) lika med den tredje vinkeln i den andra triangeln (vid D). Således är trianglarna likformiga.

Vi känner till DF (månens radie), GF (avståndet till månen och GC (avståndet till solen) och vi söker AC, solens radie.

$\frac{AC}{DF} = \frac{GC}{GF}$

$AC = \frac{DF \cdot GC}{GF} = \frac{1557{,}5 \cdot 6011950}{311500} \approx 30060$ km.

I verkligheten är detta avstånd 1390000 km, mer än 46 gånger större.

Hur kan man vinna i ett spel?

Varje dag, från morgon till kväll, är vi konfronterade med situationer där vi måste ta ett beslut: ska det vara mackor eller gröt till frukost, ska jag ta bilen eller jogga till jobbet, ska jag genomföra det där obehagliga samtalet med min chef, osv. Flertalet av dessa situationer kan tolkas som ett spel där en väl uttänkt strategi förenklar eller leder till vinst.

Spel och strategi

Varje deltagare i ett spel är intresserad av att vara den vinnande parten. I spel vill man nå det bästa möjliga resultatet, lösa den uppgift man står inför på ett önskat sätt och eventuellt skapa en optimal strategi för att åstadkomma detta. I de fall spelet är menat för flera deltagare vill man försöka tänka ut en så kallad *vinnande strategi*. Det vill säga ett sätt att genomföra spelet som kommer att garantera vinst oberoende av motpartnerns drag. För två spelare antar man att dragen utförs växelvis och man vill då tänka ut ett sätt att spela så att motspelarens drag inte påverkar utgången.

Vägning

Som en modell för individuella spel ska vi ta upp några vägningsprocedurer. Det scenario man oftast använder är att spelaren har ett antal mynt (alternativt andra föremål) som alla ser likadana ut men där ett eller ett par är falska och väger mindre eller mer än de äkta. Man vill därefter finna vilka mynt som är falska med hjälp av ett bestämt antal vägningar på en balansvåg utan vikter. Här går det att variera svårighetsgraden på uppgiften beroende på elevgrupp.

Vår förutsättning är att vi har en väl fungerande balansvåg utan vikter. Vi får endast jämföra myntens vikter genom att lägga dem i vågskålarna. Resultatet av en vägning är antingen balans (jämvikt) eller obalans (inte jämvikt), men man får inga kvantitativa differenser mellan skålarnas vikt.

Symmetri

Vi ska titta nu på några uppgifter som handlar om olika spel för två personer och där målet är att finna en lämplig strategi som kan garantera att en av spelarna vinner, oberoende av hur motspelaren väljer sina drag. Om en sådan strategi finns så kallas den just för en vinnande strategi.

Det är klart att en vinnande strategi inte finns för alla typer av spel. Betrakta till exempel ett spel för två personer som i tur och ordning kastar tio mynt samtidigt. Om man bestämmer att den vinner som först kommer att få alla tio mynten att vara vända med samma sida upp så har man lämnat allt åt chansen och ett sådant spel kan pågå i evigheter, utan att något har större chans att vinna än motspelaren.

Som tur är finns det också spel där en av spelarna kan ha en vinnande strategi och vi ska illustrera detta genom att presentera några sådana spel.

De två spelarna kommer vi genomgående att kalla A (för Anna) och B (för Björn). Vi kan också anta att det är alltid Anna som gör det första draget. Därefter är det Björns tur, sedan Annas osv. Dragen utförs växelvist. Vi förutsätter också att båda spelarna gör sitt bästa för att vinna, samtidigt som de håller sig till spelreglerna.

Frågan i alla exempel är om det finns en vinnande strategi för någon av de två spelarna.

Övningar om vägning

15. Vi har tre mynt som ser likadana ut men bara två av dem är äkta. Det falska myntet väger mindre än ett äkta mynt.

a. Hur många vägningar behövs för att ta reda på vilket som är det falska myntet?

b. Hur många vägningar behövs ifall man inte vet om det falska myntet är lättare eller tyngre än ett äkta mynt?

16. Nu har du nio mynt som ser likadana ut men ett är falskt och väger mindre än ett äkta mynt. Hur kan du göra för att hitta det falska myntet och använda vågen så få gånger som möjligt?
Hur kan man variera och vidareutveckla uppgifterna?

Övningar om vinnande strategi

17. På bordet ligger 19 papperslappar i en rad. Alla är röda på den ena sidan och gula på den andra men i början är alla vända med den röda sidan upp. I ett drag får spelaren välja en röd lapp eller två röda lappar som ligger intill varandra och vända den/dem upp-och-ner till den gula sidan. Den som vänder på den sista röda lappen vinner spelet. Finns det någon vinnande strategi? Vilket blir svaret om antalet lappar från början är 20 istället för 19?

18. En chokladkaka är i form av ett 10 x 15 rutnät. I det första draget får man bryta kakan i två delar längs en linje som delar rutorna. I varje efterföljande drag ska man välja en av de mindre bitarna och dela den längs en linje. Finns det någon vinnande strategi om

a. Förloraren i spelet är den som först får en 1 x 1 bit.
b. Vinnaren i spelet är den som först får en 1 x 1 bit.

Svar och kommentarer

15. a. Ja, det kan man. Lägg två av mynten i var sin skål på vågen. Vid jämvikt är det tredje myntet falskt. Vid obalans är det lättare myntet falskt.

b. Ifall vi inte vet om det falska myntet är lättare eller tyngre än ett äkta mynt räcker det inte med en enda vägning. Vid balans i den första vägningen kan vi i och för sig genast avgöra att myntet utanför vågen är falskt (fast bara det, inte om det är lättare eller tyngre, vilket i och för sig inte ingick i frågan). Vid obalans däremot kan vi inte dra någon slutsats utöver den att det falska myntet finns på vågen.

Om man då i den andra vägningen jämför ett av mynten från vågen, till exempel det tyngre, med det tredje myntet (som vi nu vet är äkta) så kan frågan avgöras: Vid jämvikt är det myntet utanför vågen som är falskt (och är lättare), medan vid obalans är myntet som vägdes två gånger falskt och är tyngre än ett äkta mynt.

16. Lägg tre mynt i den ena vågskålen och tre i den andra. Vid jämvikt är det falska myntet utanför vågen. Vid obalans finns den bland de tre mynten i den lättare skålen.

Hur som helst har vi i den första vägningen identifierat tre mynt bland vilka finns det falska. Den andra vägningen genomförs som i den förra uppgiften.

17. Detta är ett symmetriskt spel. Anna (spelare A) kan vinna spelet om hon i sitt första drag vänder på den mittersta, den tionde lappen. Därefter kan Anna spela symmetriskt mot Björn (spelare B): om Björn vänder på en eller två lappar (i fall det är två lappar så ligger de förstås på samma sida om den mittersta, tionde lappen) så kan Anna vända om på motsvarande lapp (lappar) på den andra sidan om den tionde lappen, spegelvänt till Björns drag. Anna har därmed alltid ett drag efter Björns senaste drag. Därför kommer också hon, som gör det sista draget, att vinna spelet.

18. a. A kan vinna detta spel genom att i sitt första drag dela chokladkakan i två 5 x 15 bitar. Hon kan tänka att den ena 5 x 15 biten är gul medan den andra är blå. Därefter kan A spela symmetriskt mot B: om B delar en blå bit i två mindre delar och inte förlorar (alltså inte får en 1 x 1 bit), så kan A dela motsvarande gul bit i två delar på samma sätt som B gjorde. Och motsvarande för den andra färgen. Till exempel, om B i sitt första drag delar den gula 5 x 15 biten i två delar så svarar A med att dela den blå 5 x 15 biten i två delar, likadana till B:s indelning. A har alltid ett svar på B:s drag och därför kommer hon att vinna spelet.

b. Här är det igen A som har en vinnande strategi och hennes första drag bör återigen vara att dela chokladkakan i två 5 x 15 bitar. Liksom i förra delen spelar därefter A symmetrisk mot B. Så småningom måste B få en bit som består av ett antal chokladbitar i en rad (och han blir den första att få en sådan rad). Då kan A genast ändra strategin, bryta ut ur den raden en 1 x 1 chokladbit och vinna spelet.

Spel och strategier

En nära besläktad typ av **vägningsproblem** (som dock kräver lite annorlunda strategi) är följande:

19. Bland 61 till utseende identiska mynt finns ett falskt som skiljer sig från de äkta med vikt. Hur många vägningar behövs det för att avgöra om det falska myntet är lättare eller tyngre än ett äkta mynt? Observera att man inte behöver finna vilket mynt som är falskt.

20. Hur blir svaret om antalet mynt är 60 istället för 61?

21. Du har fyra stenar som ser likadana ut men som väger olika, och en balansvåg utan vikter.

   a. Hur många vägningar behöver du för att finna den lättaste stenen?
   b. Hur många vägningar behöver du för att finna den lättaste och den tyngsta stenen?
   c. Kan stenarna i fem vägningar ordnas från den lättaste till den tyngsta?

22. Du har fyra mynt som alla ser likadana ut. Du vet att ett av mynten är falskt och inte väger lika mycket som de äkta mynten.

   a. Kan du med hjälp av två vägningar på en balansvåg med två skålar avgöra om det falska myntet är lättare eller tyngre än ett äkta mynt? Du behöver alltså inte finna vilket mynt som är falskt bara avgöra om det är lättare eller tyngre.
   b. Kan du med hjälp av två vägningar på samma våg avgöra vilket mynt är falsk? Du behöver alltså inte avgöra om det är lättare eller tyngre än ett äkta mynt?

Symmetri

Frågan i alla exempel är om det finns en vinnande strategi för någon av de två spelarna.

23. 60 spelkulor ligger i två skålar, 30 kulor i varje skål. I ett drag kan A och B plocka mellan 1 och 4 kulor men enbart från en av skålarna, det vill säga den spelaren vars tur är att göra ett drag väljer en av skålarna och därifrån plockar mellan 1 och 4 kulor. Den som plockar den sista kulan vinner spelet. Har någon av spelarna en vinnande strategi?

Den viktiga observationen för spel av denna typ är att det kan spelas symmetriskt. Den ena spelarens drag är spegelbilder av den andra spelarens drag. Spelen som tillåter symmetriska drag har för det mesta en vinnande strategin för en av spelarna. Upptäckten av möjligheten till symmetriskt spel betyder nästan ett löst problem.

24. Samma spel som i uppgift 5 men denna gång finns det 32 kulor i den ena skålen och 30 i den andra.

25. Runt en cirkel placeras 100 punkter. A och B förbinder i tur och ordning punkterna med sträckor (Anna gör den första). Sträckorna får inte korsa varandra, men kan mötas vid ändpunkterna. Den som inte längre kan rita en sträcka förlorar spelet.

I vissa situationer syns det inte omedelbart att spelet är symmetriskt och själva symmetri-strategin behöver inte vara just så tydlig som i exemplen ovan. Uppgiften nedan är just ett sådant "nästan-symmetriskt" spel.

26. I en ask ligger 80 godisbitar. A och B turas om att ta minst en godisbit, men högst sju godisbitar åt gången. Vinnaren är den som tar den sista godisbiten. Kan någon av spelarna ha en vinnande strategi? Hur bli svaret om man i ett drag får ta minst ett men högst sex godisbitar?

27. Stina har 90 g guldpulver men för att tillverka guldfärg behöver han endast 10 gram. Kan Stina i endast tre vägningar väga upp 10 gram om han har en balansvåg utan skala och bara en enda vikt om 2 gram?

28. a. I varje ruta av ett 7 x 7 rutnät ligger en godisbit. I ett drag får man ta ett godtyckligt antal godisbitar som ligger efter varandra i en horisontell eller en vertikal rad (man får inte ta godisbitar mellan vilka det finns minst en tom ruta). Spelet vinner den som tar den sista godisbiten från nätet.

b. Samma spel på ett 8 x 8 rutnät.

Förslag till lösningar

19. Det räcker med två vägningar: I den första kan man lägga 30 mynt i den ena skålen och 30 i den andra. Vid jämvikt kan vi dra slutsatsen att myntet utanför denna vägning är falskt. Om man då jämför det myntet med vilket som helst av de övriga (äkta) mynt så får man svaret.

Vid obalans i den första vägningen kan man ta mynten från den ena skålen, till exempel från den tyngre, och dela de i två högar om 15 mynt som vägs mot varandra. Vid jämvikt är alla dessa mynt äkta och det falska finns i den andra mängden om 30 mynt och är lättare än ett äkta mynt. Vid obalans finns det falska myntet på vågen och är alltså tyngre än ett äkta.

20. Här räcker det också med två vägningar. Dela alla mynten i tre grupper, A, B och C, om 20 mynt var. Jämför A med B.

i) Vid jämvikt är alla mynten i dessa grupper äkta och om vi jämför då A med C (som innehåller det falska myntet) så kan vi avgöra om det falska myntet är lättare eller tyngre än ett äkta mynt.

ii) Vid obalans i den första vägningen ligger det falska myntet på vågen. Anta till exempel att gruppen A var tyngre. Om vi då jämför A med C (som bara består av äkta mynt) så kan vi vid jämvikt dra slutsatsen att det falska myntet är i B och är lättare. Vid obalans är det falska myntet i A och är tyngre än ett äkta mynt.

21. Kalla stenarna för A, B, C och D.
a. Det behövs tre vägningar. Först väger vi A mot B och sedan C mot D. De lättare stenarna i de två vägningar kan sedan jämföras mot varandra i den tredje vägningen.

b. Det behövs fyra vägningar. De tre första är som ovan för att identifiera den lättaste stenen. I den fjärde vägningen jämförs de två tyngre i de första två vägningar.

c. Ja, det kan göras. I de första fyra vägningarna finner man den lättaste och den tyngsta stenen. I den sista vägningen jämförs de övriga två stenarna.

22. a. Man kan börja med att väga två mynt mot två andra. Eftersom precis ett av mynten är falskt så kommer en av skålarna att visa övervikt. I den andra vägningen kan vi jämföra mynten från denna skål. Vid jämvikt kan vi dra slutsatsen att det falska myntet fanns tidigare i den andra skålen (som åkte upp) och är alltså lättare. Om skålarna inte visar jämvikt så är det falska myntet bland dessa två och måste därmed vara det tyngre myntet (här kunde man även peka på vilket mynt är det falska, inte bara konstatera att det är ett tyngre mynt).

b. Väg två av mynten, kalla dem för A och B, mot varandra. Vid jämvikt kan vi dra slutsatsen att A och B är äkta. Vi kan då väga A mot ett tredje mynt, C. Vid jämvikt kan vi säga att det är det fjärde mynt som är det falska. Om det inte är jämvikt så är det C som är falskt (och vi kan då också veta om C är lättare eller tyngre än A).

Om A och B inte visar jämvikt så är ett av dessa falskt. De övriga två är därmed äkta. Vi kan då väga A mot ett tredje mynt. Vid jämvikt är det B som är falskt (och då kan vi, med tanke på den första vägningen, också avgöra om B är lättare eller tyngre). Om A inte väger lika mycket som det tredje myntet så är det A som är falskt och vi kan förstås också avgöra om det är lättare eller tyngre.

23. Det är B som har en vinnande strategi. Varje gång A tar ett antal kulor från den ena skålen så tar B lika många kulor från den andra skålen. Följaktligen har han alltid ett motdrag efter Annas tur. Efter hans drag finns det alltid lika många spelkulor i var och en av skålarna. Därmed blir det han som tar den sista kulan och vinner spelet.

24. Detta är också ett spel som tillåter en symmetrisk strategi, men denna gång är det Anna som har den vinnande strategin. Det räcker att hon i sitt första drag tar två kulor från skålen

som innehåller 32 stycken och att hon därefter spelar symmetriskt mot Björn, precis som Björn gjorde mot henne i det förra spelet.

25. Det är A som har en vinnande strategi. I det första draget bör hon förbinda med en sträcka två punkter som delar hela punktmängden i två lika delar: det ska finnas 49 punkter på den ena sidan av hennes sträcka och 49 punkter på den andra.

Efteråt är det B:s drag men därefter, för A:s del, bör hon från och med sitt andra drag spela symmetriskt mot B (detta är också ett symmetriskt spel): varje gång B drar en sträcka mellan två punkter (hela sträckan måste finnas på en av två sidor som bildades av A:s första sträcka) så bör A svara med en sträcka mellan motsvarande punkter på den andra sidan. På sådant sätt har A alltid ett svar på B:s drag. Därför kommer hon också att dra den sista sträckan och vinna spelet.

26. I det första fallet är det Björn som har vinnande strategi. Varje gång Anna plockar k godisbitar, där $1 \leq k \leq 7$ så bör B plocka $8 - k$ godisbitar. Antalet godisbitar i asken minskar då med 8 varje gång efter att A och B gjorde sina drag (ett drag var). Efter bådas nionde drag finns det bara 8 godisbitar kvar. Ett drag till för A och ett, sista, för B kommer att tömma asken.

Om man får plocka som mest 6 godisbitar så är det A som har chans att vinna spelet. Hennes strategi gör gå ut på att i det första draget plocka 3 godisbitar och därefter, eftersom $77 = 11 \cdot 7$, varje gång B tar k godisbitar, där $1 \leq k \leq 6$, så bör A plocka $7 - k$ godisbitar. Det blir alltså hon som kommer att ta den sista godisbiten.

27. I den första vägningen kan Stina lägga 2 g vikt i den ena skålen och därefter balansera vågen genom att ha 44 g pulver i samma skål som vikten och 46 g i den andra skålen.

I den andra vägningen kan Stina dela 44 g pulver i två lika stora delar om 22 g var.

Slutligen, i den tredje vägningen kan Stina lägga 2 g vikt i den ena skålen och balansera vågen genom att ha 10 g pulver i samma skål som vikten och 12 g i den andra skålen.

28. a. A kan vinna spelet. Det räcker att hon först tar godisbiten från den mittersta ruta och därefter svarar symmetrisk mot B:s drag: om B tar godisbiten från bland annat rutan på plats (a, b) så tar A godisbiten från rutan (8-a, 8-b). Vad det innebär är följande: Om B tar några godisbitar från rad k så tar A sådana godisbitar som svarar mot B:s val vriden 180 grader runt nätets centrum, alltså från rad 8-k. A har alltså alltid ett svar på B drag och därmed kommer han att bli den som tar den sista godisbiten.

b. Här har B en vinnande strategi. Han kan direkt spela symmetrisk mot A, på samma sätt som A spelade i spelet a) ovan: om A tar godisbiten från bland annat rutan på plats (a, b) så tar B godisbiten från rutan (9-a, 9-b). B tar godisbitar som svarar mot A:s val vriden 180 grader runt nätets centrum.

Ekvationer och system av ekvationer

Ekvationslösning är ett av de viktiga målen i skolmatematiken. Ofta formuleras problemet som en vanlig textuppgift, och den ska först omvandlas till rät ekvation och därefter ska man finna en lösning. I högre årskurser handlar det även om system av två ekvationer, men de ekvationer som man behandlar berör nästan uteslutande klassen av första- och andragrads polynom.

Att lösa linjära ekvationer av typ $3x-7=5$, eller andragradsekvationer, som $2x^2-x-3=0$, ingår som standard i utbildningen på gymnasiet. Likaså enkla typer av ekvationssystem, som till exempel

$$\begin{cases} 2x-y=4 \\ -3x+4y=5 \end{cases}$$

Där man kan hänvisa till den geometriska tolkningen: skärningspunkten mellan två linjer i planet. Dessvärre är verklighetens utmaningar mer komplicerade än så och ekvationer som beskriver den (i fysik, ekonomi, biomedicin, kemi osv) är både mer invecklade och innehåller fler variabler än bara två.

Två exempel på ekvationer/ekvationssystem som vi ska titta närmare på är

$$x^2+2x=y^2 \text{ och } \begin{cases} x+y=a \\ y+z=b \\ z+x=c \end{cases}$$

Nyckelorden för lösning av den typen av ekvationer är faktorisering samt symmetri. I synnerhet upptäckten av symmetrin bör alltid anses som ett stort kliv mot lösningen av en ekvation (ekvationssystem) och man bör se till att försöka utnyttja den.

En anmärkning: Att lösa en ekvation eller system av ekvationer innebär att finna alla lösningar, inte bara en. I de fall där ekvationen innehåller två variabler (x och y) gäller det att finna alla talpar (x, y) som satisfierar ekvationen.

Några exempel

Exempel 1. Lös ekvationen $xy-2x+3y=16$ för heltalen *x* och *y*.

Lösning:
Ekvationen är varken linjär (termen *xy*) eller en ekvation med en variabel. Detta genast höjer graden av komplexitet men låt oss försöka faktorisera vänstra ledet:

Bryter man ut x ur de första två termerna så får vi i VL: $x(y-2)+3y.$

Eftersom vi vill behålla faktor $(y-2)$ så kan vi skriva om $3y$ som $3(y-2)+6$.

Ekvationen kan därmed skrivas som

$$x(y-2)+3(y-2)+6=16$$

eller, efter att vi bryter ut $(y-2)$, som

$$(x+3)(y-2)=10.$$

Då vänstra ledet är en produkt av två heltal, medan högra kan skrivas som $10 = 1 \times 10 = (-1) \times (-10) = 2 \times 5 = (-2) \times (-5)$ så har vi åtta möjliga fall:

$x+3$	1	-1	10	-10	2	-2	5	-5
$y-2$	10	-10	1	1	5	-5	2	-2

Lösningen får vi nu genom att subtrahera 3 från alla rutor i den första raden och addera 2 till alla rutor i den andra raden:

x	-2	-4	7	-13	-1	-5	2	-8
y	12	-8	3	1	7	-3	4	0

x+1–y	1	-1
x+1+y	1	-1

Alltså: Faktorisera där det är möjligt.

Exempel 2. Vilka heltal x och y uppfyller ekvationen $x^2+2x=y^2$?

Lösning:
Här är det inte uppenbart hur man ska faktorisera, men vänstra ledet liknar kvadreringsformeln. Det gäller att addera 1 till båda leden och då får vi

$$(x+1)^2=y^2+1.$$

Flytta y^2 till vänstra ledet och då, med uttrycket $(x+1)^2-y^2=1$, tänka på konjugatregeln. Detta ger $(x+1-y)(x+1+y)=1$.

Båda parenteser är heltal och deras produkt är 1.

Därmed har vi två alternativ:

$$\begin{cases} x+1-y=1 \\ x+1+y=1 \end{cases} \text{ och } \begin{cases} x+1-y=-1 \\ x+1+y=-1 \end{cases}$$

Vilka vi löser var för sig och erhåller två lösningar:

$$(x, y) = (0,0) \text{ samt } (x, y) = (-2,0).$$

Exempel 3. Lös ekvationssystem

$$\begin{cases} x + y = a \\ y + z = b \\ z + x = c \end{cases}$$

där *a*, *b* och *c* är tre givna reella tal.

Lösning:
Enligt den traditionella lösningsmetoden räknar man ut *x* från den första ekvationen:
$x = a - y$
och sätta in den i den tredje ekvationen. Därefter skulle man räkna ut *y* från den nya tredje ekvationen och sätta in detta *y*-värde i mittersta ekvationen. Då skulle man få en ekvation med en enda variabel *z*.

I detta fall går det bra, men inte om ekvationssystemet är mera invecklat.

En annan metod är att inse en viss symmetri: att systemets vänstra led beter sig likadant och resulterar i summan av två variabler.

Om vi då adderar ekvationerna ledvis (vänstra leden för sig och högra leden för sig) så får vi att $2(x + y + z) = a + b + c$, alltså $x + y + z = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Om vi nu från det erhållna sambandet subtraherar den första ekvationen (återigen ledvis) så får vi $z = \dfrac{a+b+c}{2} - a = \dfrac{-a+b+c}{2}$.

Subtraherar vi istället den andra och sedan den tredje ekvationen så får vi svaren:

$$y = \frac{a-b+c}{2} \text{ samt } x = \frac{a+b-c}{2}.$$

Använd symmetrin där den finns. Addera/subtrahera ekvationerna ledvis för att få ”snyggare” samband.

Exempel 4. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x(y+z)=5 \\ y(z+x)=10 \\ z(x+y)=13. \end{cases}$$

Lösning:

Eftersom systemet kan skrivas som

$$\begin{cases} xy+xz=5 \\ yz+yx=10 \\ zx+zy=13 \end{cases}$$

så kan vi resonera precis som i förra uppgiften, denna gång med variablerna xy, xz och yz istället för x, y och z. Ledvis addition och sedan division med 2 ger

$xy+xz+yz=14.$

Subtraktion av den första, andra och tredje ekvation kommer att medför att

$$\begin{cases} yz=9 \\ xz=4 \\ xy=1. \end{cases}$$

Använd symmetri igen, men denna gång multiplicera ledvis de första två ekvationerna och dividera med den tredje. Vi får i vänstra ledet $\frac{yz\cdot xz}{xy}=z^2$ och i högra $\frac{9\times 4}{1}=36$. Således är $z=\pm 6$ och då följer att $y=\pm\frac{3}{2}$ och $x=\frac{2}{3.}$ Systemet har därmed två lösningar

$$(x,y,z)=\pm\left(\frac{2}{3},\frac{3}{2},6\right).$$

Håll ögonen öppna för alternativa metoder att lösa ekvationer och ekvationssystem. Några av uppgifterna som följer kan lösas på ”skolmässigt” sätt, det vill säga med substitutioner. Dock blir lösningar både långa och svårlästa. Det är därför bra att fundera en stund och försöka hitta alternativa strategier.

Övningar

29: Bestäm heltalslösningar till ekvationen

$$xy-13=5x-2y.$$

30: Anta att a, b och c är tre reella talen sådana att ekvationssystem

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy} = a \\ \dfrac{y+z}{yz} = b \\ \dfrac{z+x}{zx} = c \end{cases}$$ har en lösning. Bestäm x, y och z.

Lös följande ekvationssystem

31. $\begin{cases} 1 + x + y = xy \\ 2 + y + z = yz \\ 5 + z + x = zx \end{cases}$

32. $\begin{cases} x^2 + 3 = 4y \\ y^2 + 5 = 6z \\ z^2 + 6 = 2x \end{cases}$

Svar och kommentarer

29: Omskrivningen $xy - 5x + 2y - 13 = 0$ samt faktorisering ger $(x+2)(y-5) = 3$. Eftersom $3 = 1 \times 3 = (-1)$ så får vi fyra möjliga fall:

$x+2$	1	-1	3	-3
$y-5$	3	-3	1	-1

Subtrahera 2 från den första raden och addera 5 till den andra och vi får fyra lösningar:

x	-1	-3	1	-5
y	8	2	6	4

30: Eftersom $\dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{x}{xy} + \dfrac{y}{xy} = \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x}$ så kan den första, andra och tredje ekvationen skrivas som $\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x} = a$, $\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{y} = b$ och $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} = c$. Ledvis addition ger

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{a+b+c}{2}.$$

Subtraherar vi(ledvis) i tur och ordning från detta uttryck de föregående tre ekvationerna så får vi: $\frac{1}{z} = \frac{-a+b+c}{2}$, $\frac{1}{x} = \frac{a-b+c}{2}$ och $\frac{1}{y} = \frac{a+b-c}{2}$.

Följaktligen $x = \frac{2}{a-b+c}$, $y = \frac{2}{a+b-c}$ och $z = \frac{2}{-a+b+c}$.

31: Faktorisering av var och en av ekvationerna ger tre nya samband: $(x-1)(y-1) = 2$, $(y-1)(z-1) = 3$ och $(x-1)(z-1) = 6$.

Första sambandet multiplicerat ledvis med det andra och dividerat med det tredje medför att $(y-1)^2 = 1$, vilket betyder att $y-1 = \pm 1$. Därmed är $y = 0$ eller $y = 2$.

Vi kan nu använda de ursprungliga ekvationerna och få snabbt att $x = -1$ eller $x = 3$ samt $z = -2$ eller $z = 4$.

Systemet har alltså två lösningar: $(x, y, z) = (-1, 0, -2)$ samt $(x, y, z) = (3, 2, 4)$.

32: Ledvis addition ger ekvationen $x^2 + y^2 + z^2 + 14 = 4y + 6z + 2x$, alltså $(x^2 - 2x) + (y^2 - 4y) + (z^2 - 6z) + 14 = 0$. Med tanke på kvadreringsformlerna kan vi upptäcka att det är samma som $(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) + (z^2 - 6z + 9) = 0$, det vill säga $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 0$.

Kvadraterna är aldrig negativa så summan är 0 enbart om alla termer är 0. Därmed är $x = 1$, $y = 2$ och $z = 3$ är den enda möjliga lösningen till $x^2 + y^2 + z^2 + 14 = 4y + 6z + 2x.$

Dessa tal utgör dock ingen lösning till den ursprungliga ekvationen (vilket alltid bör kontrolleras) och detta betyder att systemet saknar lösningar.

Fördjupning: ekvationer och system av ekvationer

Lös följande ekvationssystem

33. $\begin{cases} x^2+3x+1=\dfrac{y+z}{2} \\ y^2+3y+1=\dfrac{x+z}{2} \\ z^2+3z+1=\dfrac{x+y}{2} \end{cases}$ **34.** $\begin{cases} \dfrac{xy}{z}=2 \\ \dfrac{yz}{x}=3 \\ \dfrac{zx}{y}=5 \end{cases}$ **35.** $\begin{cases} (x+y)^2=z \\ (y+z)^2=x \\ (z+x)^2=y \end{cases}$

36: Låt *p* vara ett primtal. Bestäm heltalen *x* och *y* sådana att $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{p}$.

37: Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x+y=zt \\ z+t=xy \end{cases},$$

där *x*, *y*, *z* och *t* är positiva heltalen.

Förslag till lösningar

Övning 33: Återigen ledvis addition!

Vi får $x^2+3x+1+y^2+3y+1+z^2+3z+1=x+y+z$, och $(x^2+2x+1)+(y^2+2y+1)+(z^2+2z+1)=0$. Detta är samma som $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=0$, och eftersom kvadraterna är aldrig negativa så blir summan 0 enbart om alla termer är 0. Den enda lösningen är därför $x=y=z=-1$.

Övning 34: Ledvis multiplikation ger $\dfrac{xy}{z}\cdot\dfrac{yz}{x}\cdot\dfrac{zx}{y}=30$, alltså $xyz=30$. Division i tur och ordning med den första, andra och tredje ekvation medför $z^2=15$, $x^2=10$ samt $y^2=6$ Således är $x=\pm\sqrt{10}$, $y=\pm\sqrt{6}$ och $z=\pm\sqrt{15}$.

Lägg märke till att antingen är alla tre talen x, y, z positiva eller så är precis två av dessa tal negativa (om till exempel x är negativ och y, z positiva så skulle vänstra leden i de givna ekvationerna vara negativa). Därmed har systemet fyra lösningar:

$$(x,y,z)=(\sqrt{10},\sqrt{6},\sqrt{15}),(\sqrt{10},-\sqrt{6},-\sqrt{15}),(-\sqrt{10},\sqrt{6},-\sqrt{15}),(-\sqrt{10},-\sqrt{6},\sqrt{15})$$

Övning 35: Subtrahera ledvis den andra ekvationen från den första. Vi får då med konjugatregeln att $VL = (x+y)^2 - (y+z)^2 = (x-z)(x+2y+z) = HL = z - x = -(x-z)$.

Vi skulle nu tänka oss att dividera båda sidor i $(x-z)(x+2y+z) = -(x-z)$ med $(x-z)$, men det får vi göra enbart om $x - z \neq 0$.

Så låt oss anta att $x \neq z$. Efter divisionen får vi att $x+2y+z=-1$. Likheten är dock helt orimligt eftersom från de givna ekvationerna följer att x, y och z är icke-negativa (alla är ju kvadrater). Därmed var antagandet falskt och vi har $x = z$.

Av symmetri skäl (de givna ekvationerna är symmetriska) kan vi utan vidare räkningar dra motsvarande slutsatser för $x = y$. Därmed är $x = y = z$.

Den första ekvationen omvandlas då till $(2x)^2 = x$, alltså $4x^2 - x = 0$. Faktorisering ger $x(4x-1) = 0$, vilket medför att $x = 0$ eller $x = \frac{1}{4}$.

Ekvationen har två lösningar: $x = y = z = 0$ och $x = y = z = \frac{1}{4}$.

Övning 36: Multiplikation av båda leden med xyp ger $yp + xp = xy$, alltså, $xy - yp - xp = 0$. Faktoriserar vi uttrycket så får vi $(x-p)(y-p) = p^2$ och eftersom $p^2 = 1 \cdot p^2 = (-1)\cdot(-p^2) = p \cdot p = (-p)\cdot(-p)$ så har vi sex alternativ att titta på

$x-p$	1	-1	p^2	$-p^2$	p	$-p$
$y-p$	p^2	$-p^2$	1	-1	p	$-p$

För att få x och y adderar vi p till alla rutor i båda raderna. Vi får då

x	$1+p$	$-1+p$	p^2+p	$-p^2+p$	$2p$	0
y	p^2+p	$-p^2+p$	$1+p$	$-1+p$	$2p$	0

Det blir bara fem giltiga lösningar, för det sista alternativet, $x = y = 0$, måste förkastas (x och y i nämnaren).

Övning 37: Ledvis addition ger $x + y + z + t = zt + xy$, dvs $zt - z - t + xy - x - y = 0$.

Faktorisering $zt - z - t = (z-1)(t-1) - 1$ och $xy - x - y = (x-1)(y-1) - 1$ medför då att ekvationen omvandlas till $(z-1)(t-1) + (x-1)(y-1) = 2$. Inget av parenteser är negativt så vi har tre fall att betrakta:

(1) $2 + 0 = 2$,

(2) $0 + 2 = 2$ samt

(3) $1 + 1 = 2$.

(1) Eftersom $2 = 1 \cdot 2 = 2 \cdot 1$ så innebär likheten $(z-1)(t-1) = 2$ att antingen $z - 1 = 1$

och $t - 1 = 2$, eller att $z - 1 = 2$ och $t - 1 = 1$. Vi får då att $z = 2$, $t = 3$, eller $z = 3$, $t = 2$. I båda fallen är $zt = 6$.

Samtidigt har vi att $(x-1)(y-1) = 0$, så minst en av parenteser måste vara 0. Om $x - 1 = 0$ så är $x = 1$ och den första givna ekvationen ger $y = zt - x = 6 - 1 = 5$. Om $y - 1 = 0$ så blir $y = 1$ och $x = zt - y = 5$.

Vi har fått fyra lösningar: $(x, y, z, t) = (1, 6, 2, 3)$, $(1, 6, 3, 2)$, $(6, 1, 2, 3)$ och $(6, 1, 3, 2)$.

(2) Här kan vi åberopa symmetrin med ovanstående och bara skriva upp nästa fyra lösningar:

$(x, y, z, t) = (2, 3, 1, 6)$, $(2, 3, 6, 1)$, $(3, 2, 1, 6)$ och $(3, 2, 6, 1)$.

(3) I detta fall får vi att $(x-1)(y-1) = 1$ och $(z-1)(t-1) = 1$, vilket medför att $x - 1 = y - 1 = z - 1 = t - 1 = 1$, dvs $(x, y, z, t) = (2, 2, 2, 2)$.

Sammanlagt har ekvationen nio lösningar.

Tre bevis för Pythagoras sats

Om man frågar en förbipasserande om vad hon eller han kommer ihåg från skolgeometrin så kommer de med all säkerhet säga: Pythagoras sats. Inte för att de minns vad denna sats egentligen handlar om men namnet kommer de ihåg!

Pythagoras sats sammanfattar en viktig egenskap som delas av alla rätvinkliga och endast rätvinkliga trianglar. Denna egenskap gäller för alla rätvinkliga trianglar, oberoende av längderna av deras sidor.

Det finns två ord som man använder i samband med rätvinkliga trianglar: katet och hypotenusa. Kateten är den sida i en rätvinklig triangel som ligger intill den räta vinkeln. Triangeln har därmed två kateter. Hypotenusan är namnet på den tredje sidan, den mittemot den räta vinkeln.

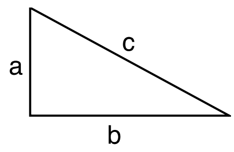
Satsen som bär namnet Pythagoras sats säger något om sambandet mellan kateterna och hypotenusan i en rätvinklig triangel. Vi kommer att presentera tre olika bevis för denna sats och kort diskutera för- och nackdelar med dessa bevis.

Själva sambandet var känt redan 1500 år innan Pythagoras levde (vilket han gjorde på 500 talet före vår tideräkning). Första gången man hänvisar sambandet till hans namn var i en avhandling av Proclus, femte århundrade f.Kr. Själva termen "Pythagoras sats" myntades dock först i den engelska boken A New Mathematical Dictionary (1726), skriven av Edmund Stone.

Sambandet

Vad Pythagoras sats egentligen säger är att i en rätvinklig triangel, där kateterna har längderna a och b och hypotenusan har längden c, gäller att

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Man kan visa att det inte bara är en implikation utan villkoren är ekvivalenta (vilket man ofta inte uppmärksammar): om sambandet gäller för en triangel vars sidor har längderna a, b och c så är triangeln rätvinklig med sidan c som hypotenusa.

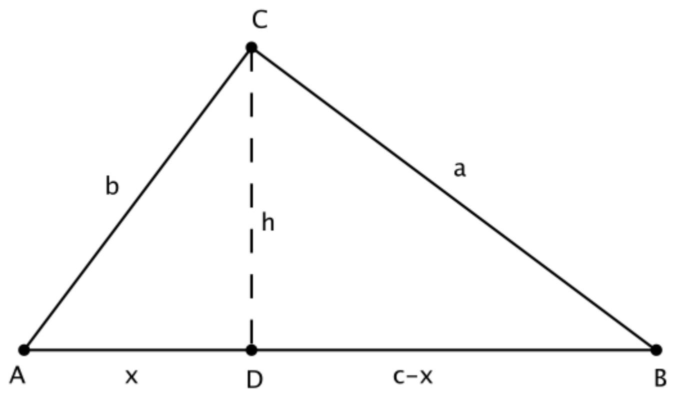
Vi presenterar nedan tre olika bevis för Pythagoras sats och diskuterar deras för- och nackdelar. En sats kan bevisas på många olika sätt. Sedan går det att diskutera vilket sätt som är "vackrare", mer överskådligt, enklare, mera övertygande, osv. Det är en av de fina sakerna med matematiken, att se att hur många olika resonemang leder till samma sanning. För Pyhagoras sats finns det hundratals olika bevis. Många professionella matematiker och entusiaster har ägnat sin tid åt att hitta allt nyare bevis. Så gjorde till exempel även den store konstnären Leonardo da Vinci (1452-1519) och James Garfield (1831-1881), USA:s 20-e president.

Första beviset.

Det första beviset är det som oftast förekommer i dagens skolböcker. Beviset är inte så gammalt och den äldsta varianten finns nedtecknad av den indiske matematikern Bhaskara (1114–1185). Argumentation refererar till figuren nedan.

Triangel ABC är alltså en rätvinklig triangel med den räta vinkel vid C. Punkten D är fotpunkten för höjden från C.

Övriga beteckningar följer figuren (längden av AB är lika med c).



38. Visa att trianglarna *ADC* och *ACB* är likformiga.

39. Visa att $\frac{x}{b} = \frac{b}{c}$.

40. Visa att trianglarna *BDC* och *BCA* är likformiga.

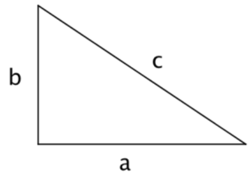
41. Visa att $\frac{c-x}{a} = \frac{a}{c}$.

Från ovan följer att $b^2 = x \cdot c$ och $a^2 = (c-x)c$.

Ledvis addition medför nu att $a^2 + b^2 = (c-x)c + xc = c^2$, vilket skulle visas.

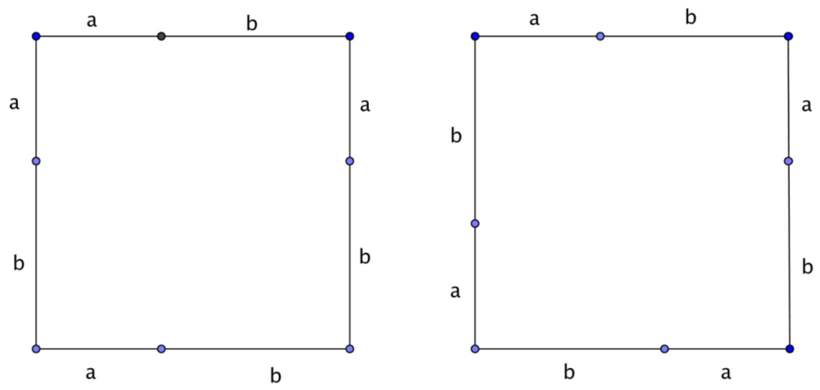
Andra beviset.

Detta eleganta klippa-och-klistra bevis finns i avhandlingen *Aryabhatiya* av den indiske matematikern Aryabhata (476–550). Sambandet var känt i Indien minst ett tusen år tidigare då denna egenskap hos rätvinkliga trianglar hade tillämpningar bland annat vid byggandet av altare och heliga eldstäder. Dessa skulle alltid konstrueras efter vissa bestämda regler.

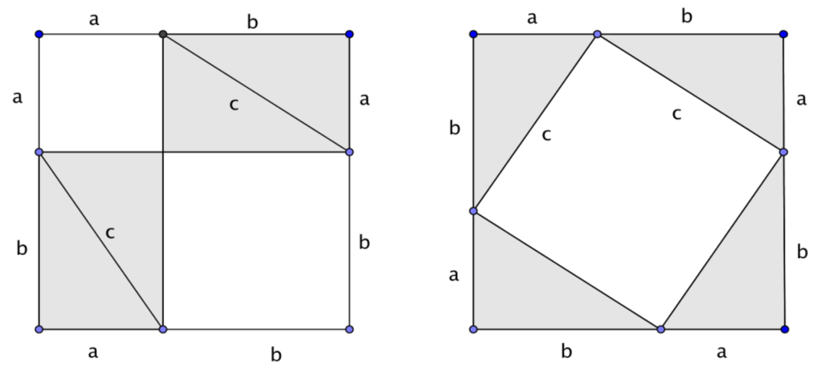


Vi börjar med att titta på en godtycklig rätvinklig triangel, som den i figuren intill.

Låt oss titta nu på bilden nedan. Den förställer två identiska kvadrater. Sidorna i båda kvadrater är lika långa: $a + b$. Det som skiljer de två bilderna åt är att vi har delat in kvadraternas sidor i två linjesegment, *a* och *b*, på olika sätt.



Nu ska vi göra dra några linjer i var och en av kvadraterna. Vi kommer därmed att få fyra trianglar i den första, och fyra trianglar i den andra kvadraten, precis som i figurerna A och B nedan.

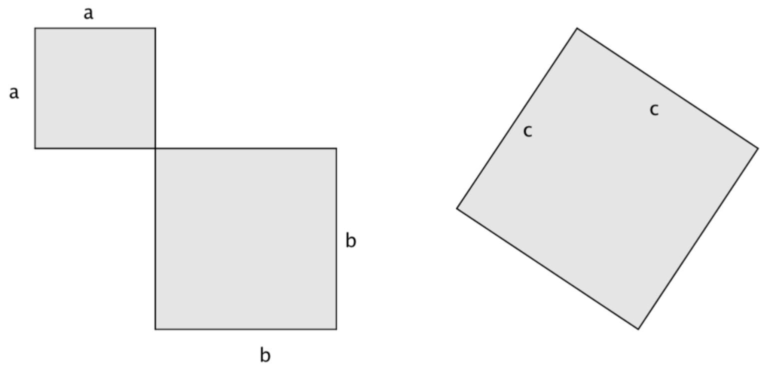


Figur A   Figur B

42. a) Visa att alla dessa åtta trianglar är identiska (kongruenta).

b) Visa att de andra två fyrhörningarna i figur A är kvadrater samt att fyrhörningen i mitten av figur B är en kvadrat.

Det sista steget i resonemanget är nu följande: Låt oss från figuren A avlägsna de fyra skuggade trianglarna och låt oss från figuren B också avlägsna de fyra trianglarna. Kvar kommer vi då att ha två nya figurer som finns nedan.



43. a) Kan vi dra slutsatsen att den area som är kvar i den första figuren är lika stor som den arean som är kvar i den andra figuren?

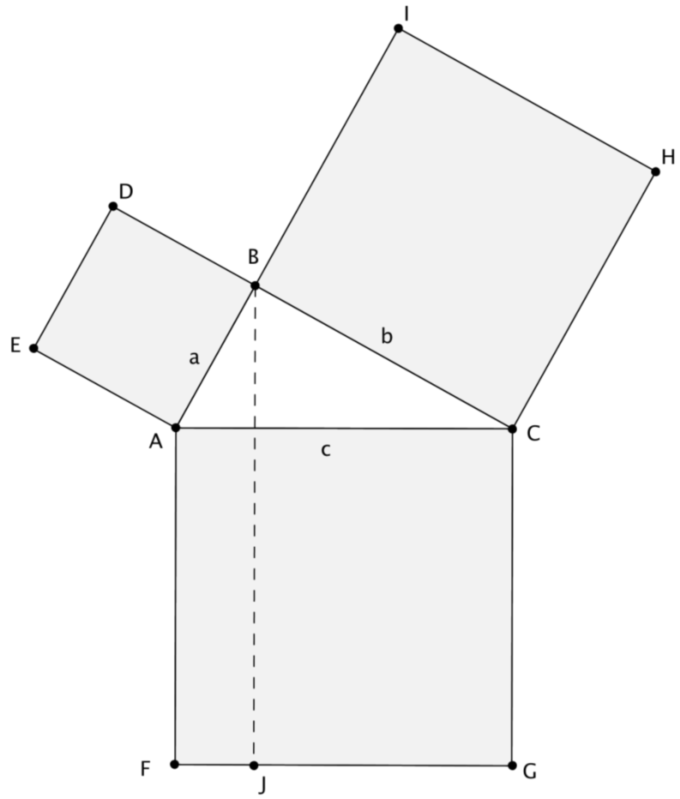
c) Formulera dina slutsatser med hjälp av symboler *a*, *b* och *c*.

44. Prästen och matematikern Katyayana (Indien, cirka 200 f.Kr.) fick i uppdrag från översteprästen att konstruera en ny helig eldstad för gudarna Shiva och Parvati. Enligt traditionen måste den nya eldstaden vara i form av en kvadrat och vara till ytan lika stor som de gamla eldstäderna för Shiva och Parvati tillsammans. Dessa två var båda kvadratiska och Katyayana visste hur långa var deras sidor. Hur kan Katyayana lösa sitt uppdrag att ange hur lång sida måste den nya eldstaden ha?

Tredje beviset.

Det tredje beviset är det äldsta nedskrivna bevis och finns i boken *Elementa* skriven av Euklides, cirka år 300 f. Kr. *Elementa* användes som standardtext i geometrin ändå fram till 1950-talet. Satsen finns i den första av *Elementas* tretton böcker och bär nummer 47. Euklides bevis bygger på betraktande av figuren nedan.

På sidorna av den rätvinkliga triangeln *ABC* (rät vinkel vid *B*) konstruerar man tre kvadrater med sidan *a*, *b* och *c* respektive.



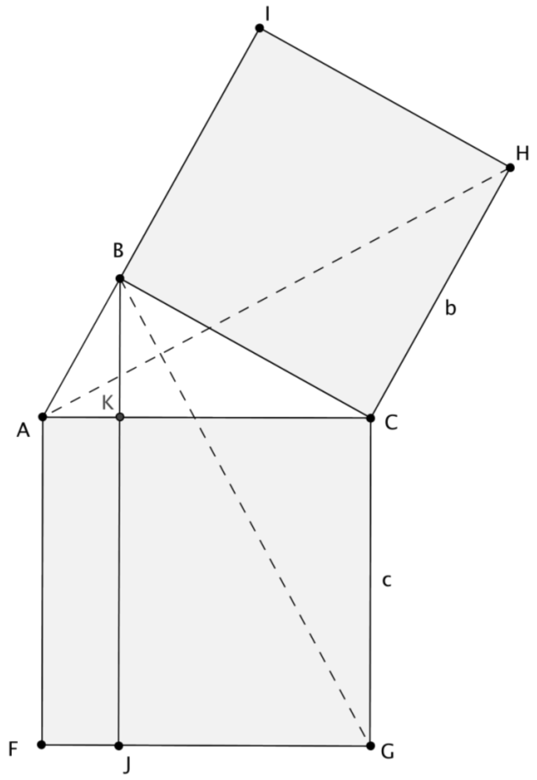
Linjen *BJ* är vinkelrät mot sidan *AC*. Euklides smarta bevis går ut på att visa att linjen *BJ* delar kvadraten *ACGF* i två rektanglar vars areor är lika med areor av de två kvadraterna konstruerade på triangelns kateter. Vi ska visa att rektangeln vars tre hörn ligger i *C*, *G* och *J* har samma area som kvadraten *BCHI*. På motsvarande sätt visas att rektangeln, vars tre hörn ligger i *A*, *F*, *J*, har samma area som kvadraten *ABDE*. Tillsammans medför det förstås att $c^2 = a^2 + b^2$.

Vi genomför resonemanget i tre steg:

(i) Vi börjar med att studera triangeln *CHA*. Om vi betraktar sidan *CH* som basen så utgår höjden mot denna bas från punkten *A*. Eftersom linjen *AI* är parallell med basen *CH* så är denna höjd lika med *IH*. Därför är arean av triangel *CHA* lika med $\frac{CH \cdot IH}{2} = \frac{b^2}{2}$.

(ii) I nästa steg tittar vi på triangeln *GCB*. Tar vi basen *GC* så är höjden från *B* lika lång som sträckan *JG*: linjen *BJ* är ju parallell med basen *GC*. Därmed är arean av triangeln *GCB* lika med $\frac{GC \cdot JG}{2}$.

(iii) Nu kommer det roliga steget: trianglarna *CHA* och *GCB* har precis samma area. Titta bara på triangeln *CHA* och tänk att vi roterar den 90^0 i moturs riktning. Sidan *CA* övergår då på *CG* medan sidan *CH* övergår till *CB*. Därmed övergår triangeln *CHA* på triangeln *GCB*, och således har de två trianglarna samma area.



Nu kan vi dra den förväntade slutsatsen:

area av rektangeln *CGJK* = $GC \cdot JG = 2 \cdot \frac{GC \cdot JG}{2} = 2 \cdot area\ av\ triangeln\ GCB =$

$$2 \cdot area\ av\ triangeln\ CHA = 2 \cdot \frac{CH \cdot IH}{2} = 2 \cdot \frac{b^2}{2} = b^2.$$

(den tredje likheten följer ur (ii), den fjärde ur (iii) och den femte ur (i) ovan).

Diskussion.

De tre bevisen är förstås olika och man kan fråga sig vad det är som skiljer dessa bevis, vilket är mera elegant, eller enklare, eller lämpligare för att användas i klassrummet.

Ett viktigt argument är just lämpligheten. Det förefaller att det andra beviset är det allra enklaste: rita två kvadrater, dela dessa i trianglar och kvadrater och sudda bort motsvarande (lika stora) trianglar. Det är ett bevis som kan fungera även i grundskolan då överskådligheten är mycket enklare än i de två andra bevisen.

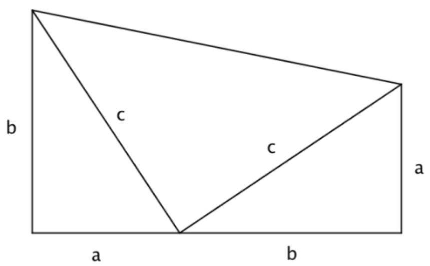
Det första beviset, som ofta figurerar i skollitteraturen, innehåller ett uppenbart algebraiskt inslag, vilket saknas i de andra två alternativen. Utöver insikten om likformigheten är resten en mekanisk uträkning som inte ger mycket utrymme för geometrisk fantasi och förståelse för vad som händer.

Det tredje, det mest klassiska beviset, är ett praktexempel på det vi kallar för *den syntetiska geometrin*, med ett geometriskt resonemang.

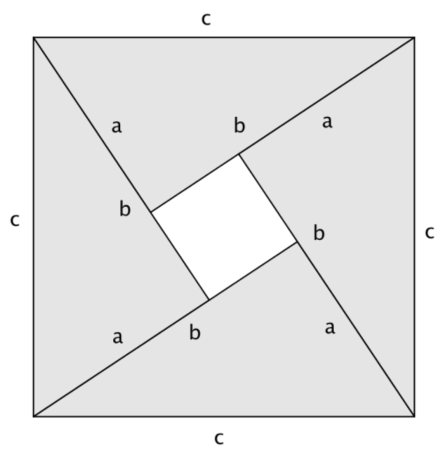
Det är intressant och viktigt att titta på vilken slags matematik man använder i själva beviset. Det centrala i det första beviset är begreppet likformighet. Utan denna kunskap och lite algebra, kan ett sådant bevis inte genomföras. Ett viktigt och avgörande faktum i det andra beviset är kongruensen av de involverande trianglarna och uträkningarna av vinklar (för att visa att fyrhörningen med sidan c är en kvadrat). När satsen bevisas på detta sätt åberopas kongruensen (och därmed lika areor) intuitivt utan något formellt bevis, vilket ger ett bristfälligt argument.

Det tredje beviset däremot använder sig varken av likformighetsbegrepp, kongruens eller algebraiska uträkningar. Det enda som behövs här är grundkunskap om triangelns och rektangelns areor. Dessutom innehåller argumentet en mycket fyndig idé med en vridning av en triangel. Matematiskt sett är därför det tredje beviset mest elegant och synnerligen ”vackrast”, trots att figuren den bygger på inte är den mest överskådliga.

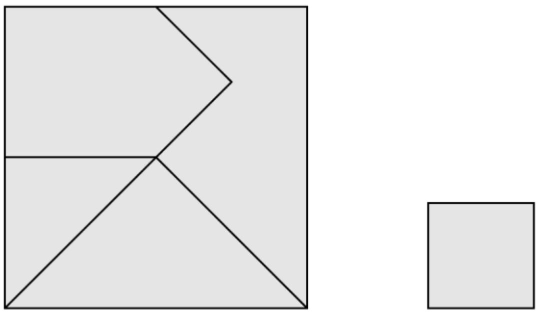
38. Bevisa Pythagoras sats genom att använda figuren nedan (detta är president Garfields bevis).



39. Bevisa Pythagoras sats utifrån figuren nedan (Bhaskara andra bevis).



40. (Bonuspussel) Fem pusselbitar bildar två kvadrater som i figuren nedan. Arrangera om bitarna så att de tillsammans bildar en enda kvadrat.



Flera bevis kan hittas till exempel på

http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml

och

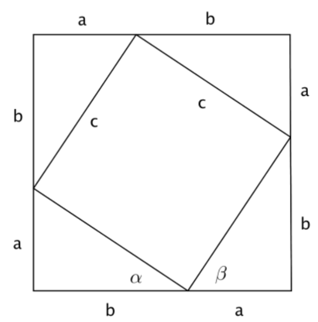
http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/FalseProofs.shtml.

Svar och kommentarer

38 – 41. Följer automatiskt från likformighetsfallen.

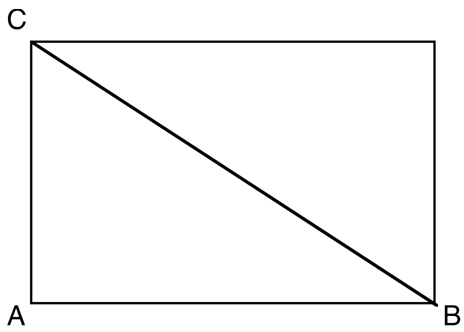
42. a) Följer från kongruensfallen.

b) För fyrhörningar i figur A följer slutsatsen från själva konstruktionen. För figur B räcker det att visa att summan av vinklarna a och b i figuren intill är 90^0. Detta följer dock automatiskt från det att alla trianglar är kongruenta och rätvinkliga.



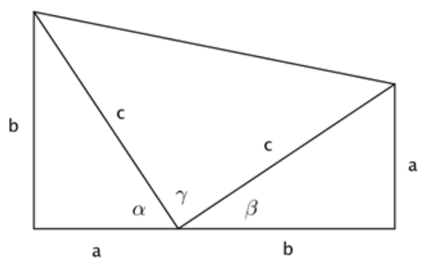
43. a) Ja, vi avlägsnar fyra kongruenta trianglar från var och en av kvadraterna, alltså avlägsnas lika mycket area från två lika stor kvadrater. De delar som är kvar har därför lika stora area.

44. Vad Katyayana kan göra (och vad de indiska matematiker brukade göra i sådana sammanhang) var att rita en rektangel där den ena sidan var lika lång som den ena kvadratens sida (till exempel *AB* i figuren intill är lika lång som Shivaseldstad) och den andra sidan lika lång som den andra kvadratens sida (*AC* = längden i sidan av Parvatis eldstad). Därefter drar man diagonalen *BC* i denna kvadrat. Enligt Pythagoras sats är summan av kvadrater på kateterna ($AB^2 + AC^2$) samma som kvadraten på hypotenusan (BC^2).



45. Figuren är en parallelltrapets och arean av parallelltrapetsen räknas som summan av längder av de parallella sidorna multiplicerat med hälften av höjdens längd. Det betyder att

$$area = (a+b)\frac{a+b}{2} = \frac{(a+b)^2}{2}.$$



Samtidigt är summan av vinklarna α och β är 90^0 (de två mindre rätvinkliga trianglar är kongruenta) och därmed är vinkel γ rät. Triangel med sidorna c är alltså halvan av en kvadrat. Figurens area är summan av areor av tre trianglar: $\frac{ab}{2}+\frac{c^2}{2}+\frac{ab}{2}=ab+\frac{c^2}{2}$.

Likheten $\frac{(a+b)^2}{2}=ab+\frac{c^2}{2}$ medför att $a^2+b^2=c^2$.

46. Vi noterar först att den stora fyrhörningen är

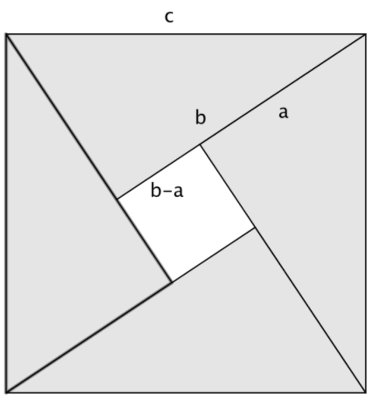
en kvadrat (visa att alla vinklar är räta), sedan

att den mindre fyrhörningen också är en kvadrat

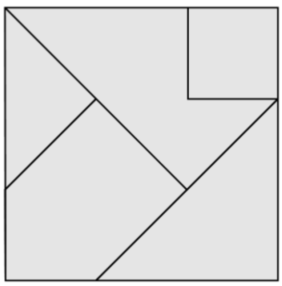
med sidan $b-a$.

Arean av den stora kvadraten är c^2, samtidigt

som den är summan av areor av fyra rätvinkliga trianglar och en kvadrat, alltså är $4\cdot\frac{ab}{2}+(b-a)^2=2ab+b^2-2ab+a^2=b^2+a^2$.



47. Lösningen presenteras nedan.



Matematisk modellering

38. Du äger en stuga på en ö, 6 km norr om en rak strand som går i öst-västlig riktning. En kabel ska dras från din stuga till ett kraftverk som ligger 14 km öst om den punkt på stranden som är närmast din stuga. Kostnaden för att dra kabeln i vattnet är 6000 kr/km, medan det kostar 4000 kr/km att dra den längs strandkanten. Hur ska kabeln dras för att minimera kostnaden?
Låt oss anta att kraftverket ligger 5 km öst om den punkt på stranden som är närmast din stuga. Vad skulle detta innebära för er kalkyl?

39. En jeep kan sammanlagt ta 200 liter bensin i tanken och i lösa dunkar. Jeepen kommer 2,5 km på 1 liter bensin. Anta att du ska färdas 10 000 km in i öknen och att bränsle bara

finns vid startpunkten och vid målet. Vill du klara färden måste du först placera ut bensin i depåer längs färdvägen. Hur mycket bränsle går det åt och var ska dunkarna placeras ut? Finn en lösning på problemet, gärna en som är ”så bra som möjligt”.

40. Hur snabbt svalnar te i olika typer av muggar?

Skaffa först en serie mätvärden för temperaturen i temuggen T^0C vid olika tider *t* min. Notera rumstemperaturen R^0C. (Samla gärna in mätdata automatisk med hjälp av en temperatur-givare kopplad till en dator eller grafritande miniräknare). Undersök sedan hur temperaturdifferensen mot omgivningen $T - R$ beror av *t*.

a) Är $T - R = at + b$?(linjär modell)

b) Är $T - R = b \cdot a^t$? (exponentiell modell)

c) Är $T - R = b \cdot t^a$? (potens modell)

Rita grafen $T - R = y$ och $t = x$ och undersök vilken modell som passar bäst. Bestäm sedan konstanterna *a* och *b* så bra som möjligt. Hur ser uttrycket för $\frac{dT}{dt}$ ut för en vanlig temugg?

Mer uppgifter finns i Problembank för Modulen Problemlösning grundskola åk 7-9.

Ni kan också använda Ole Björkqvist kompendium från 1998 *Matematiskt rika matematikuppgifter för högstadiet och gymnasiet* publicerade vid Åbo Akademi.