Skolverket

# Problembanken
# - utmanande problem

**Gymnasieskolan, modul: Undervisa matematik utifrån problemlösning**

# Utmanande problem

Vissa problem kan användas för att få igång matematiklektionen och diskussionerna. Utifrån en uppgift som eleven kan lösa med sina redan tillägnade kunskaper kan uppgiften sedan utvecklas till att bli ett verkligt problem som eleven vill lösa.

Målen med att utveckla problemen ytterligare kan vara att

- Leda till en generell lösning,
- Introducera eller väva in andra matematiska områden,
- Hitta alternativa vägar för att lösa problemet.

*Att förändra en uppgift*
Genom att förändra vissa delar i uppgiften kan ett och samma problem utvecklas till ett problem:

*Jag var på en fest nyligt och lade märke till att var och en skakade hand med varje person exakt en gång. Det fanns 12 personer på festen. Hur många handskakningar blev det?*

| | |
|---|---|
| **Ändra problemets kontext**<br>- från en fest till en bordtennis-turnering. | Tolv elever i en klass bestämde sig för att ha en bordtennisturnering. De bestämde att var och en skulle spela en match mot varje elev. Hur många matcher spelades? |
| **Ändra talen**<br>- genom att ändra 12 till 20 eller n. | Jag var på en fest nyligt och lade märke till att var och en skakade hand med varje person exakt en gång. Det fanns 20 personer på festen. Hur många handskakningar blev det? Hur många handskakningar var det om det var n personer på festen? |
| **Förändra omständigheterna**<br>- istället för att skaka hand med alla endast en gång, gjorde värden det två gånger. | Jag var på en fest nyligt och lade märke till att var och en skakade hand med varje person exakt en gång. Förutom Tim som skakade hand med alla två gånger (när de kom till festen och när de lämnade festen). Det fanns 20 personer på festen. Hur många handskakningar blev det? |

| | |
|---|---|
| **Vända på frågeställningen**<br>- få antalet handskakningar och fråga hur många personer som deltog på festen | Jag var på en fest nyligt och lade märke till att var och en skakade hand med varje person exakt en gång. Om jag säger att det var 66 handskakningar, hur många personer deltog på festen? |
| **Förändra flera delar i uppgiften samtidigt**<br>- det finns då 11 kombinationer | Alla 20 elever i klassen bestämde sig för att ha en bordtennisturnering. De bestämde att alla skulle spela en match mot varje elev. Hur många matcher spelades? |

Nedan kommer några problem som ni kan använda och anpassa så att det passar för era olika elevgrupper. Ni kan anpassa kontexten, språket, de ingående talen, skapa fler delproblem m.m. som beskrivet ovan. Försök att lösa de valda problemen på så många olika sätt som möjligt (med olika uttrycksformer och strategier).

Exempel 1:
Visa att 1=2 genom att presentera följande bevis:

$a = b$
Multiplicera båda sidor med $a$
$a^2 = ab$
Subtrahera båda sidor med $b^2$
$a^2 - b^2 = ab - b^2$
Dividera med $(a - b)$
$\frac{a^2-b^2}{(a-b)} = \frac{ab-b^2}{(a-b)}$ vilket ger $a + b = b$
Eftersom $a = b$ så blir $(b + b) = b$ eller $2b = b$
Genom att dividera med b får vi att $2 = 1$.

Varför blir det så? Mer information och material om bevis finns i Del 6: Argumentation och bevis.

Exempel 2:
Summan av två tal är 28 och deras produkt är 5. Vad blir summan av deras inverser?

Förslag till lösning:
Uppgifterna kan användas för att ställa upp följande ekvationer:

$x + y = 28$

$xy = 5$

Att lösa ekvationen kan leda till en lång uträkning. Här presenteras ett alternativ:

Summan av inverserna kan skrivas

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy}$

Med hjälp av ekvationerna ovan går det sedan relativt enkelt att lösa problemet.

Finns det andra strategier som kan användas för att lösa uppgiften?

Exempel 3:
Man kastar en välbalanserad tärning upprepade gånger. Hur många gånger måste man i medeltal kasta den för att tre gånger i följd få samma ögontal (oberoende av vilket det är)? Beräkna väntevärdet av antalet kast.

Problemet förutsätter bekantskap med begreppet väntevärde. Den utnyttjar principen att tärningar inte har minne och den kräver analys av de olika utfallen steg för steg, t.ex. med hjälp av träddiagram.

Exempel 4:
20 personer ska ställa sig i kö. På hur många olika sätt kan detta göras?

En av strategierna kan vara son följer:
2 personer A och B: A först B sen, B först A sen.
3 personer …
4 personer …

Det blir snart naturligt att införa träddiagram för att systematiskt lista alla alternativ:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Första plats<br>3 möjligheter | A | B | C |
| Andra plats<br>2 möjligheter för varje val av första plats | B C | A C | A B |
| Tredje plats<br>1 möjlighet för varje val av 1:a och 2:a plats | C B | C A | B A |

Alltså 3 x 2 x 1 = 6 möjliga köer med tre personer.

Exempel 5:
Rita upp en godtycklig triangel ABC. Välj sedan en punkt på var och en av sidorna (inte hörnpunkterna). Sammanbind punkterna så att du får en ny triangel, mindre än triangeln ABC. Hur kan du välja punkterna på sidorna, så att den mindre triangelns area är exakt hälften av den större triangelns area? Finns det olika lösningar?

Ett förslag kan vara att börja via specialfall t.ex. en rätvinklig triangel. Här kan man studera vid vilka förhållanden de valda punkterna delar sidorna. Utgår man från att ”hörntrianglarnas” sammanlagda area ska vara hälften av utgångstriangelns area kan man härleda en formel som beskriver hur delningarna av de tre sidorna måste förhålla sig till varandra och man har då löst det generella fallet.

Problemet kan förändras genom att ändra omständigheterna, till exempel kan man ställa frågan om alla tre sidorna kan ha samma delningsförhållande (med ett symmetri- eller skönhetskrav).

Exempel 6:
Du har ett nioliterskärl och ett fyraliterskärl och tillgång till vatten i en sjö. Din uppgift är att ta upp exakt sex liter vatten ur sjön. Du har inga andra hjälpmedel till hands. Hur klarar du av det?

Problemet lämpar sig för lösning såväl framlänges som baklänges (två av Polyas strategier).

Ett exempel på lösning kan vara att använda talpar (x, y) som beskriver innehållen i nio- respektive fyraliterskärlet. En framåtlösning startar då från (0, 0) till antingen (9, 0) eller (0, 4) och i följande steg når man (5, 4), (9, 4) eller (4,0), osv. En bakåtlösning utgår istället från målet (6, 0), som kan nås från (2, 4) eller (6, 4) och dessa kan i sin tur nås från (2, 0) eller (9, 1), osv. De olika situationerna kan prickas in i ett koordinatsystem, och hela lösningsproceduren representeras då av en sicksacklinje i koordinatsystemet. Hur kan problemet förändras och generaliseras?

Exempel 7:
På vilket (vilka) sätt kan man lösa ekvationen $2x^x = \sqrt{2}$, där $x > 0$? Finns det en eller flera rötter till ekvationen? Hur kan man bevisa detta?

Förslag till lösning:

Ekvationen kan skrivas som $x^x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$, vilket ger en rot $x = \frac{1}{2}$.

Eftersom $\sqrt{2} = \sqrt[4]{4}$ så kan samtidigt ekvationen skrivas som

$$x^x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{4}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$$, vilket ger ytterligare en rot, $x = \frac{1}{4}$.

Om vi nu deriverar funktionen $f(x) = x^x = e^{x \ln x}$, så får vi

$f'(x) = e^{x \ln x}(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$.

Derivatan är positiv då $\ln x + 1 > 0$, dvs för $\ln x > -1$, alltså för $x > \frac{1}{e}$. Annars är derivatan negativ.

Funktionen avtar alltså mellan 0 och $\frac{1}{e}$ (och där ligger roten $x = \frac{1}{4}$), och avtar för $x > \frac{1}{e}$ (och $\frac{1}{2} > \frac{1}{e}$).

Inga fler rötter kan därför finnas.