

Modul: Sannolikhet och statistik
Del 4: Klassrumsnormer och experimentbaserad sannolikhet

Experimentbaserad undervisning i sannolikhet

Per Nilsson, Örebro Universitet
Cecilia Kilhamn, Göteborgs Universitet

Den senare tidens forskning på lärande och undervisning i sannolikhet menar att undervisning i sannolikhet bör starta från att elever experimenterar med slump. Poängen med sådan undervisning är att ändra perspektiv: *från* en undervisning där elever först lär sig en uppsättning begrepp och räkneregler i sannolikhet, som sedan ska tillämpas i konkreta situationer, *till* en undervisning där samtal om matematiska begrepp och räkneregler utgår från elevernas undersökningar och iakttagelser. I en sådan experimentbaserad undervisning samlar elever in data och genom dessa kan de sedan bli engagerade i att formulera frågor om slump, sannolikhet och statistik. I den här texten kommer vi att diskutera fyra övergripande teman som på olika sätt belyser didaktiska strategier att reflektera över i utformning och analys av experimentbaserad undervisning i sannolikhet. I texten hänvisas till en aktivitet med kulor i en flaska med dolt utfallsrum. Denna aktivitet finns beskriven i ett separat dokument.

Binda samman aktiviteter för lärande i sannolikhet

Variation i stickprovstorlek

En viktig aspekt i sambandet mellan teoretisk och experimentell sannolikhet är stickprovets storlek. Det gäller att få eleverna att inse att vi får ett säkrare samband mellan de båda modellerna för sannolikhet om vi tar ett stort stickprov än om vi tar ett litet stickprov. Ju större stickprovet är desto större är sannolikheten att fördelningen i experimentet stämmer med den teoretiska sannolikhetsfördelningen. Detta är ett övergripande undervisningsmål med lektionerna i både del 3 och 4. De båda aktiviteterna ska sammantaget syfta till att ge eleverna chans att förstå att de måste göra ganska många observationer för att de ska kunna bestämma sannolikheten, dvs. bestämma innehållet i en flaska. Var observant på att slumpen ibland ger extrema utfall, så ibland kan det behövas väldigt stora stickprov innan den experimentella sannolikheten motsvarar den teoretiska. Att variera stickprovets storlek ska vara en del av den didaktiska strategin även då vi nu vänder på riktningen och utmanar eleverna att undersöka den teoretiska sannolikheten genom experiment och reflektera över olika storlek på stickprov. Lämpligt kan vara att börja klassrumsdiskussionen med att titta på en elevgrupps resultat, sedan succesivt addera fler observationer och beräkna den relativa frekvensen på det nya, större stickprovet, tills man slutligen tittar på summan av alla observationer i klassen. Målet är att eleverna ska inse att ju fler observationer de gör desto säkrare bedömningar kan de göra, desto bättre stämmer deras experimentella modell med utfallsrummet i flaskan. Detta samband kallas de stora talens lag och utnyttjas ofta i statistiska undersökningar där en teoretisk sannolikhet saknas eller är omöjlig att beräkna. Ni kommer att fortsätta diskussionen om stickprovets storlek i samband med statistiska undersökningar i del 7 av den här modulen.

Arbeta med dolda utfallsrum

Det övergripande syftet med att starta i experiment är att elever ska lära sig att dra slutsatser bortom de data de samlat in i ett stickprov. De ska utveckla förmågan att från data dra slutsatser om egenskaper hos slumpgeneratoren (t.ex. flaskan) som producerat datamaterialet.

När vi talar om riktningen att gå från experimentell sannolikhet till teoretisk sannolikhet hänvisar vi till situationer där egenskaper hos slumpobjektet är dolda eller omöjliga att identifiera. Att inte kunna skapa teoretiska modeller utifrån objekts egenskaper är ju fallet med många fenomen. I sådana fall måste vi bygga våra modeller utifrån experiment. Men, hur skapar vi en sådan modell? Hur vet vi att den experimentella sannolikheten är relevant och giltig? Som en didaktisk strategi vill vi därför rekommendera att experimentbaserad undervisning inleds med aktiviteter som bygger på relativt ”avskalade” slumpobjekt som t.ex. kast med mynt, tärningar eller att vända en flaska med kulor i. I dessa situationer kan elever hitta modeller som stämmer väl med det som en expert skulle komma fram till. Modellerna bygger på symmetri, dvs att varje utfall har lika stor sannolikhet att inträffa. Jämför med t.ex. kast med pil mot en piltavla. Hur stor är sannolikheten att jag ska träffa mitt i prick? Här spelar många variabler in, såsom tavlans utformning, skyttens skicklighet och pilarnas egenskaper. För att kunna avgöra sannolikheten teoretisk skulle vi behöva ha specialistkunskaper om dessa variabler. När det gäller utfallen på en vanlig tärning så har alla tillgång till de kunskaper som är avgörande för att den teoretiska modellen ska vara giltig. Nu, i del 4, ska utfallsrummet vara dolt och ni ska arbeta med experimentell sannolikhet för att ta reda på hemligheten i flaskan. Andelen kulor av respektive färg är den mest avgörande faktorn för den teoretiska sannolikheten. Det finns därför goda skäl till att anta att den experimentella sannolikheten kommer att stämma väl överens med proportionerna av de olika färgerna i flaskan. Hur väl det stämmer överens kan man kontrollera genom att öppna flaskan och hålla ut kulorna. Men notera att ni här har ett utmärkt tillfälle att utmana den rådande normen i matematik att det alltid finns ett facit, genom att ni inte kontrollerar flaskan utan fortsätter att öka stickprovets storlek, dvs gör fler observationer, tills ni alla är överens och övertygade om att ni vet hemligheten i flaskan. Försök att få eleverna att argumentera utifrån sina respektive stickprov och resultatet av allas stickprov sammantaget. Kanske behöver ni inte öppna flaskan alls?

Nivåanpassning av uppgiften

Den främsta strategin för att nivåanpassa uppgiften är att anpassa frågorna som ställs och informationen som ges. Det finns två saker att fråga efter; dels hur elever uppfattar *fördelningen* av färger, dvs. färgernas relativa frekvenser, som anger den experimentella sannolikheten för varje färg; och dels det *exakta antalet* kulor av varje färg som utgör utfallsrummet och som vi använder för att bestämma den teoretiska sannolikheten. Svaret på den första frågan om fördelningen är mest intressant och ligger också till grund för den andra frågan. Enklarest blir uppgiften om man nöjer sig med att fundera över vilken färg som det finns flest respektive färst kulor av i flaskan eller om det finns lika många kulor av några färger. För att besvara frågan måste eleverna resonera om fördelningen mellan färgerna utifrån jämförelser men behöver inte beräkna några relativa frekvenser. Den mest grundläggande

förståelse av relativa frekvenser handlar här till exempel om insikten att 5 gula i ett stickprov på 10 visserligen är färre än 8 gula i ett stickprov på 20 men att 5 av 10 ändå är en större andel än 8 av 20. För att ge eleverna möjlighet att arbeta med sin förståelse för relativa frekvenser (andelar) bör frågorna preciseras. Säg att eleverna gör ett stickprov med 100 observationer som ger resultatet 23 gula, 34 röda och 43 blå. De kan då dra slutsatser om färgernas fördelning, dvs. om andelen kulor av de olika färgerna. Med hjälp av den informationen kan de sedan resonera om hur utfallsrummet ser ut, dvs. hur många kulor det finns av varje färg. De kan se att där troligen finns flest blå, och först gula, så sannolikheten att få en blå är större än en gul. I deras modell är sannolikheten för blå $23/100$. Men eftersom det i flaskan finns mycket färre kulor än 100 kulor, och endast hela kulor, så vet de att den teoretiska sannolikheten inte kan vara $23/100$. Eleverna får därför konstruera en anpassad modell. De kanske argumenterar för att fördelningen i flaskan är 2 gula, 3 röda och 4 gula. Detta är en god approximation utifrån stickprovet men inte helt i överensstämmelse med den teoretiska sannolikheten i just det här fallet. Om nu läraren ger information om att det totala antalet kulor i flaskan är 10 blir det svårare att enas om en modell eftersom $2+3+4=9$. Då kan eleverna behöva undersöka vidare för att komma närmare den verkliga fördelningen.

Att sätta fokus på frågor i sannolikhet

Att gå från experimentell sannolikhet till att dra slutsatser om den teoretiska sannolikheten har flera likheter med statistik. I del 7 kommer ni att arbeta med statistisk slutledning och arbetet ni gör här lägger grunden för detta. Statistik handlar om att dra generella slutsatser om en eller flera egenskaper i en population (t.ex. en viss grupp människor) utifrån data. Men när vi ställer frågor i sannolikhet handlar detta inte bara om att beskriva en population och att dra slutsatser om samband mellan olika egenskaper i en population. Sannolikhet kommer in när vi ställer oss frågan om hur säkra vi är att resultatet av en stickprovsundersökning speglar en population. Dessutom försöker vi i sannolikhet att förutsäga framtiden och med vilken säkerhet vi kan göra förutsägelser. Med hjälp av statistik kan vi t.ex. få reda på hur stor del av Sveriges elever som går ut med godkända betyg från skolan ett givet år. Den frågan har inget med sannolikhet att göra. Framförallt inte om vi lyckas att göra en totalundersökning, dvs. vi gör inget stickprov utan har information om varje elev som gick ut år 9 det aktuella året. Hade vi bara studerat ett stickprov hade det däremot blivit aktuellt med sannolikhet. Säg att vi frågat 10 000 av populationen elever som gick ut år 9 det aktuella året. Den relativa frekvens vi fått fram av antalet godkända elever bland dessa 10 000 hade givit oss ett mått på hur många som blivit godkända. Men, det är förstas inte det exakta, sanna värdet på samma sätt som vid en totalundersökning. Vi kan inte heller på samma enkla sätt som vid kast med en symmetrisk tärning göra en teoretisk modell över hur stor del som totalt blivit godkända. Oftast får vi nöja oss med stickprov, varför vi måste utveckla förståelse för betydelsen av stickprovets storlek och med vilken säkerhet (sannolikhet) vi kan säga att det sanna värdet ligger inom ett visst intervall utifrån den information stickprovet gav. För att inte en aktivitet som syftar till lärande i sannolikhet ska stanna vid statistik och sammanställning av data behöver du som lärare noga tänka igenom hur du formulerar frågor till eleverna och hur du tar vara på inlägg och frågor från eleverna som

handlar om sannolikhet. Ett sätt att ytterligare stärka fokus på sannolikheten är att diskutera förutsägelser som görs efter en experimentell sannolikhetsmodell. Om jag tror mig veta fördelningen, hur säker kan jag vara på färgen på nästa kula? Om jag skulle satsa pengar på en färg, hur skulle jag resonera då?

Svårigheter att gå från experimentell till teoretisk sannolikhet

Ett viktigt didaktiskt verktyg för lärare är att ha kunskap om vilka svårigheter elever kan ha med ett matematiskt innehåll. Studier visar att elever många gånger har svårt att se betydelsen av och värdera frekvensdata som information om en händelses sannolikhet. Istället väger de ofta in personliga, subjektiva faktorer. I del 3 hänvisade vi till en studie av Fischbein och hans kollegor. I samma studie bad forskarna elever att jämföra sannolikheten att få ”fem” tre gånger genom att kasta en tärning tre gånger eller genom att samtidigt kasta tre tärningar. Det visade sig att flera elever skilde mellan situationerna. Bland de elever som ansåg att det var en skillnad tyckte vissa elever det var störst chans att få tre femmor om man kastade tärningarna samtidigt. Men den övervägande delen av dem som tyckte det var en skillnad ansåg att det var störst chans att få tre femmor genom att kasta en tärning i taget. Argumentet för detta var att genom att kasta *en* tärning i taget så kunde de bättre kontrollera varje utfall med sitt sätt att kasta. Ett sådant argument är oförenligt med begreppet oberoende händelse, dvs. att sannolikheten för varje resultat förblir konstant och påverkas inte av ett tidigare resultat.



I en studie i en svensk sjätteklass delades fem stycken non-stoppåsar* ut tillsammans med instruktionen att undersöka vilken påse som gav störst chans att få en gul godis när man på måfå plockar en godis ur påsen (Nilsson, 2014). Eleverna skulle plocka upp en godis i taget och föra in sina observationer i en tabell. Efter varje observation skulle de lägga tillbaka godisbiten innan de gjorde en ny observation, dvs. det var en situation ”med återläggning”. Det visade sig att flera elever hade svårt att betrakta situationen som helt slumpmässig. De ansåg bland annat att det spelar roll vem som sticker ner handen i påsen och plockar upp en godis. Flera uttryckte problem med återläggningen. Det finns nämligen risk, ansåg de, att man tar samma godis flera gånger även om man skakar påsen varje gång! Detta kan tolkas som att eleverna fokuserar de absoluta frekvenserna mer än de relativa frekvenserna, dvs. att de försöker räkna ut hur många godis det finns av varje färg i påsen och inte hur stor andel av varje färg det finns. Deras sätt att tänka visar också på att de har svårt att se händelserna som oberoende när de tror att en tidigare observation påverkar en efterföljande. Framförallt tog sig detta uttryck då de fick samma färg flera gånger i rad. Vid sådana tillfällen skakade de påsen extra för att göra situationen helt slumpmässig och rättvis för färgerna.

Sammanfattningsvis kan sägas att vår önskan att kunna kontrollera slump och sannolikhet hänger tätt samman med vår strävan att finna förklaringar på vad som sker i vår omvärld.

Referenser

Fischbein, E., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1991). Factors affecting probabilistic judgments in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics*, 22(6), 523–549.

Nilsson, P (2014). Experimentation in Probability Teaching and Learning. I E. J. Chernoff & B. Sriraman (red.), *Probabilistic thinking. Presenting plural perspectives* (s. 509–532). New York: Springer.

* En påse Non-stop innehåller godis av samma form men i sex olika färger.