

Modul: Sannolikhet och statistik
Del 4: Klassrumsnormer och experimentbaserad sannolikhet

Att utmana det didaktiska kontraktet

Per Nilsson, Örebro universitet
Cecilia Kilhamn, Göteborgs Universitet

Klass 5A har hållit på en hel lektion med aktiviteten ”Hemligheten i flaskan”. I det uppföljande helklass-samtalet utspelas följande dialog:

- Lärare: Om vi nu tittar på de relativa frekvenserna här i det stora stickprovet, när vi adderat allas observationer, vad ser vi då? Kan vi dra några slutsatser om hur det ser ut i flaskan? Hur många gula kulor är det i flaskan?
- Tina: gula, det är ju 198 femhundradelar, det är ju nästan som 200 av 500, och det är nära det resultatet som vi hade i våra tre grupper när vi la ihop till 50 observationer. Då fick vi alla typ 20 av 50. Jag tror att det är det resultatet i flaskan.
- Lärare: Kan någon annan utveckla det resonemanget? Om vi vet att det är ungefär 20 av 50 gula, vad innebär det för hur många gula det är i flaskan?
- Peter: Om det är 50 i flaskan så är det 20 gula kanske?
- Noah: Men det är ju inte 50 i flaskan, vi vet att det är bara 10.
- Lärare: Kan nån komma på ett sätt att tänka för att se hur många det ska vara av 10 för att det ska vara samma andel som 20 är av 50?
- Lisa: 20 av 50 är ju typ samma som 40 av 100. Det liknar ju det vi hade när vi la ihop våra resultat, då hade vi 42 av 100, inte så långt ifrån
- Lärare: Ja, nu är vi inne på resultat som är ganska lika men uttryckta på olika sätt. Vi samlar ihop förslagen. [läraren skriver på tavlan: $200/500 = 20/50 = 40/100$]
Är vi överens om att den fördelningen visar andelen gula i flaskan?
- Elever: jaaa
- Ella: jag vet jag vet, då är det 4 av 10
- Tina: 200 av 500 är ju ungefär som 400 av 1000 och det är också som 4 tiondelar.
- Lärare: Om det är 4 tiondelar som är gula, hur många gula är det då i flaskan?
- Max: 4
- Lärare: Ja, är vi då alla överens om att av de 10 kulorna i flaskan så är 4 gula?
- Max: Är det rätt eller?
- Lärare: Det vet inte jag. Målet är att vi kommer överens om att det måste vara på det viset. Att vi har bra argument för det, så att ingen känner sig tveksam.
- Elever: Men säg då, är det rätt?
- Lärare: Med sannolikhetskalkyler är det så, att när vi är överens och alla accepterar argumenten så är det den bästa modellen vi kan komma upp med. Mer ”rätt” än så blir det inte. Är vi tveksamma får vi göra fler observationer.
- Peter: Varför får vi inte veta svaret?

Att lära och förstå matematik handlar inte bara om den som ska lära och det matematiska innehållet som ska läras. Förståelse för matematik är också starkt bunden till hur elever uppfattar erbjudanden och förväntningar i situationen, och vilka socialt styrda normer som reglerar klassrumsaktiviteterna. En sociomatematisk norm som är strakt etablerad i många matematikklassrum är att det alltid finns *ett rätt svar* och att elevernas uppgift är att lista ut det rätta som läraren eller läroboken redan känner till. Ett välkänt exempel på den normen är när Pippi Långstrump börjar skolan och ombeds av läraren att svara på en matematikuppgift. Pippi, som inte tidigare varit i skolan och präglats av skolmatematikens normer, kan inte förstå varför läraren frågar efter svaret på någonting hon redan vet utan säger förvånat: ”Om du nu vet det, varför frågar du då?”

Den inledande dialogen illustrerar ett klassrum där eleverna är så inskolade i den rådande normen att de kräver bekräftelse från läraren att de gjort rätt istället för att lita på sin egen modell och sina argument för att modellen stämmer. Genom att inte öppna flaskan och kontrollera hur många gula det är utmanar läraren den här normen. Just inom området sannolikhet och statistik är det viktigt att eleverna får förståelse för att matematiken kan användas i sammanhang där det inte finns ett facit, där vi inte kan få veta vad som är ”rätt”. I många statistiska sammanhang får vi förlita oss på de observationer som görs. Matematikens natur är sådan att endast det som du kan bevisa med logiska argument utifrån dina utgångspunkter är att betrakta som korrekt. Här ligger också matematikens styrka: vi behöver inte ha en utanförstående auktoritet som talar om vad som är rätt när vi själva kan föra matematiska resonemang och dra logiska slutsatser.

Normer på olika nivåer och av olika karaktär

I ett matematikklassrum utvecklas normer som har olika karaktär. Ett sätt att sortera in olika typer av normer är att skilja mellan *sociala klassrumsnormer*, *sociomatematiska normer* och *klassrummets matematiska praxis* (Yackel & Cobb, 1996). Termerna ”social” och ”socio-” innebär att det handlar om regler i ett klassrum (synliga eller osynliga) som etableras gemensamt av läraren och undervisningsgruppen. De sociala normerna som etableras i ett klassrum är oberoende av ämne. De inbegriper föreställningar om hur vi allmänt förväntas bete oss i ett klassrum. Det kan handla om att en elev förväntas lyssna när en annan elev har ordet eller att de uppmanas söka grund för sina påståenden. Sociomatematiska normer är regler som är mer specifika för matematiska aktiviteter, för matematikklassrummet. Exempel på dessa kan vara huruvida ett visst uttryck ska räknas som en egentlig matematisk definition, om en lösning ska betraktas som fullständig ur ett matematiskt perspektiv och vilken sorts argument som ska anses stödja ett påstående. Det kan också handla om vad vi ställer för slags frågor kring matematiken och vilken sorts svar vi förväntar oss. Vill vi enbart ha korrekta lösningar på matematiska problem, eller är matematiken också att kunna argumentera för sin lösning eller att jämföra olika lösningar och kunna avgöra varför en lösning är bättre eller sämre, mer eller mindre korrekt, annorlunda eller samma som en annan lösning? Olika normer etableras inom olika sociala och kulturella praktiker. Att ett påstående anses sant endast om det stöds av en auktoritet i form av facit eller läraren är en sociomatematisk norm som ofta etableras i skolans matematikundervisning men som inte gäller bland mate-

matiker. En matematisk praxis är ett handlingsmönster som utvecklas kring ett specifikt matematisk innehåll. Ett exempel på matematisk praxis är hur vi ska lösa divisionsuppgifter, där praxisen under åren ändrats från ”trappan” till ”liggande stolen” till ”kort division”.

Det didaktiska kontraktet

Det normer som på olika nivåer etableras för hur lärare och elever ska bete sig i en undervisningssituation och vad de förväntar sig av varandra påverkar lärandet i matematik. Det är viktigt att som lärare vara medveten om att normerande regler kan göra att vissa resonemang prioriteras framför andra och potentiellt möjliga resonemang utestängs. Brousseau (1997) införde begreppet det *didaktiska kontraktet* för att sätta fokus på och urskilja de regler som mer eller mindre underförstått styr verksamheten i ett matematikklassrum. Det didaktiska kontraktet understryker att det i undervisning utvecklas olika typer av förväntningar. Om en lärare ger eleven en uppgift så förväntar sig eleven (medvetet eller omedvetet) att läraren anser att uppgiften är möjlig att lösa för eleven. Läraren, i sin tur, förväntar sig att eleven gör sitt bästa för att lösa den. Om läraren alltid bara berömmar elever som svarar rätt men inte följer upp och tar felaktiga svar på allvar som intressanta inlägg så kommer elever inte att vilja svara om de inte vet att de kan svara rätt. På så sätt får lärarens bedömningspraktik inflytande över det didaktiska kontraktet.

I Nilsson (2009) studeras elever i sjunde klass som spelar ett tärningsspel. Spelet handlade om att så snabbt som möjligt bli av med spelmarker från en spelplan med fält numrerade från 0 till 12. Eleverna fick ta bort en marker om utfallet av ett kast med två speciellt numrerade tärningar visade en summa som eleverna hade lagt en marker på. Eleverna spelade fyra omgångar, med två nya sorters tärningar varje gång. I den första spelomgången spelade eleverna med två tärningar numrerade med enbart ettor och tvåor (111222) och (111222). Möjliga summor blir två, tre och fyra. Ett lag (två elever) placerade dock sina marker på de omöjliga utfallen sex, åtta, nio och tio. Efter bara ett par kast mot motståndarlaget insåg eleverna sitt misstag. I nästa omgång spelade eleverna med tärningarna (222444) och (333555). Nu placerade samma grupp elever på alla summor mellan fem och nio, vilket innebär att de inkluderade de omöjliga utfallen sex och åtta. Att eleverna skulle ha begreppsliga begränsningar för att sätta samman summorna och inse vilka summor som vore värda att placera sina marker på anser vi inte troligt. Vad vi ser i elevernas aktivitet är att deras diskussion om möjliga summor avstannade då de identifierat lägsta respektive högsta möjliga summa. En tolkning av ett sådant beteende är att eleverna anser sig funnit det problem som läraren hade tänkt sig att de skulle finna, utifrån det misstag de gjorde i första omgången. Att det skulle ligga ytterligare en svårighet inbäddad i den andra omgången förväntade de sig inte i enlighet med det didaktiska kontraktet som råder, där lärarens intentioner alltid brukar vara tydliga och problemen sällan är rika och komplexa. Situationen kan beskrivas som ett tillfälle då det didaktiska kontraktet utmanades.

Deterministiska normers inverkan på lärande i sannolikhet

Skolmatematiken präglas till stor del av räkning och problemlösning. De begrepp som används är klart definierade och konkreta. Problemen har lösningar med väldefinierade svar.

Resultat som avviker från dem är fel. Kalle köper godis för 8 kronor och lämnar en tjugokronorssedel. Då får han 12 kronor tillbaka, varken mer eller mindre. Om en person skall åka exakt 21 mil på exakt tre timmar så måste medelhastigheten vara exakt 70 km/tim. I klassisk fysik är denna typ av s.k. deterministiska problem vanlig: Om vi släpper en sten från ett torn exakt tio meter över marken så kan vi exakt räkna ut falltiden. Om vi skjuter en kanonkula i en given vinkel och med given utgångshastighet så kan vi exakt beräkna hur långt den går. Men den kritiske läsaren upptäcker att dessa problem i praktiken kan ha andra lösningar. Affärsinnehavaren kanske inte har växel att betala Kalle med och ger honom därför en tia tillbaka, i praktiken är det svårt att pricka in de 21 milen på exakt tre timmar. De flesta matematiska problem är idealiserade. I praktiken finns nästan alltid oförutsägbara störningar som kan påverka resultatet. De idealiserade modellerna fungerar dock utmärkt i många sammanhang och det är viktigt att kunna lösa problem inom dess ramar. Den traditionella skolmatematiken med tydliga problemställningar och korrekta lösningar som ger de rätta resultaten är en nödvändig del av utbildningen.

Hur passar sannolikhetsläran in här? Sannolikhetsläran handlar ju om att mäta chanserna för händelser som vi antar sker slumpvis – resultaten av händelserna kan av olika skäl inte exakt förutses. Det kan gälla att kasta tärning eller mynt, att dra lotter ur en tombola eller att förutsäga nästa veckas väder. Att mäta sannolikheter skiljer sig alltså från mycket av den övriga skolmatematiken. Det är en utmaning, som inte blir mindre av att det finns flera tolkningar av sannolikhetsbegreppet. Dessutom betyder en sannolikhet förmodligen inte samma sak för olika människor. Uppfattningarna har formats av erfarenheter av olika slag, av den allmänna debatten, av skrock eller andra fördomar. Det finns alltså ett tolkningsutrymme i sannolikhetsteorin som saknas i den traditionella matematikundervisningen. Även om vi avvisar tolkningar som t.ex. bygger på känslomässiga prioriteringar - när jag väljer kulor ur en urna dras jag till rött eftersom det är min favoritfärg - så finns, som tidigare nämnts, minst tre tolkningar som används i vetenskaplig litteratur: teoretisk, experimentell och subjektiv. Sannolikhetsläran inbjuder därför till en mer öppen attityd när det gäller att diskutera olika typer av problem än den mer deterministiskt orienterade skolmatematiken. Detta gäller inte bara lösningsmetoden utan också tolkningar och resultat. Praktiska experiment med en mer förutsättningslös diskussion kring uppnådda och förväntade resultat blir en naturlig del av undervisningen på ett helt annat sätt än i konventionell matematikundervisning. Experimenterande undervisning i sannolikhet inbjuder därför till att utmana etablerade normer och omförhandla det didaktiska kontraktet.

Det finns också forskare som hävdar att ett deterministiskt baserat normsystem ligger till grund för att sannolikhetsundervisning ofta reduceras till att elever ska lära sig en uppsättning formler och beräkningstekniker. En sådan grundsyn ligger sedan till grund för att det oftast är den teoretiska sannolikhetstolkningen som premieras i undervisningen. En aspekt av klassrumspraxis i sannolikhetsundervisning som blivit uppmärksammas på senare år är att det i skolmatematiken ofta blir övervikt mot *likformiga fördelningar*. Lärare väljer ofta att beskriva slump och sannolikhet genom att hänvisa till mynt, vanliga tärningar och lyckohjul med lika många och lika stora fält. Att undervisa för en förståelse av likformighet är väsent-

ligt i sig, då likformighet är grunden för den teoretiska tolkningen av sannolikhet. Men, bara för att ett fenomen eller föremål som skapar slump är fysikaliskt symmetrisk och likformig så behöver nödvändigtvis inte antalet gynnsamma fall vara det. Se, t.ex. till hur tärningarna i tärningsspelet ovan var numrerade. Om alla möjliga utfall av en slumphändelse alltid har lika stor chans finns risken att elever tror att så alltid är fallet när det är fråga om slump. Genom att väga in sociala och undervisningskulturella aspekter kan vi ställa oss frågan om detta kanske är ett resultat av att undervisningen betonar likformiga fördelningar och att det därigenom etableras en praxis som premierar det sättet att resonera.

Fundera över det didaktiska kontraktet i ditt klassrum. Kommer några outtalade förväntningar att utmanas när ni arbetar med experimentbaserad sannolikhet, dolda utfallsrum och de stora talens lag? Fundera också på hur du som lärare styr och medverkar till att omskapa normer genom ditt sätt att ställa frågor och följa upp elevernas svar. Går din undervisning ut på att eleverna ska svara så som du har tänkt ut eller förmedlar du ett genuint intresse för elevernas sätt att tänka? Ger du eleverna förutsättningar att föra resonemang kring slump och sannolikheter under dina lektioner? Är du en samtalspartner och medupptäckare, eller är du en bedömare? Läs än en gång igenom den inledande dialogen och fundera över vilka frågor läraren ställer till eleverna och vilka möjliga resonemang dessa frågor inbjuder till.

Referenser:

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Nilsson, P. (2009). Summaspelet – ett spel för lärande i sannolikhet. *Nämnamn*, 2009 (3), 21–25.

Yackel, E. and Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (4), 458–477.