

Modul: Sannolikhet och statistik
Del 2. Formativ bedömning i sannolikhet och statistik

Elevers tänkande i sannolikhet

Andreas Eckert, Linnéuniversitetet

Johan Häggström, Göteborgs universitet

Ord som *tur*, *chans*, *osannolikt*, *omöjligt*, *troligt* och *slump* används dagligen. Ofta görs ingen medveten koppling till dess matematiska motsvarigheter men omedvetet så utför vi alla många sannolikhetsbedömningar varje dag. Det verkar, undermedvetet, finnas en riskbedömningsförmåga som vi väger in i de beslut vi fattar varje dag. Denna bakomliggande sannolikhetsintuition har varit i fokus i många studier inom psykologin med syfte att bättre förstå det mänskliga tänkandet. Vad innebär då dessa intuitiva uppfattningar inom sannolikhet för matematiska problemsituationer och hur påverkar de undervisningen?

Vi pratar om bedömningar och beräkningar av sannolikhet i samband med slumphändelser. Men vad slump innebär är inte enkelt att definiera. Slump kan ses som alternativ till deterministiska (förutbestämda) förklaringar av händelseförlopp. När vi inte känner till alla faktorer som påverkar en händelse så kan vi slå samman dem till en slumpfaktor. Slump skulle också kunna tolkas som en aspekt av den fria viljan. Att vi, i motsats till att födas med en oändlig rad förutsagda händelser framför oss, skapar oförutsagda händelser genom de val vi gör. Eller så är slump helt enkelt när en väldigt osannolik händelse inträffar, så som att vinna högsta vinsten på lotto. Dessa och många fler är tänkbara tolkningar av slump, och när det finns så olika definitioner av en slumphändelse är det kanske inte heller så konstigt att det finns många olika uppfattningar vad gäller sannolikhetsbedömningar.

Uppfattningar om sannolikhet och om slumpmässiga händelser har traditionellt legat inom psykologins forskningsfält. Resultat från denna forskning (se t. ex Tversky & Kahneman, 1982) är bl. a beskrivningar av vanligt förekommande missuppfattningar av hur slumphändelser beter sig och hur relevanta sannolikhetsbedömningar kan göras. De missuppfattningar som kommer att behandlas här är *benägenhet att se sannolikhetsfördelningar som likformiga*, *representativitet*, *tillgänglighet* och *utfallsorienterad ansats*. De blir presenterade i var sitt avsnitt som inleds med ett exempel.

Gemensamt för många (miss-)uppfattningar om sannolikhet är att de är robusta och ofta ”resistenta” mot undervisning. Ett skäl kan vara att de inte nödvändigtvis, i alla situationer, leder till felaktiga bedömningar. Ett annat kan vara att man i vardagen sällan får feedback när man resonerat fel. Prova gärna din egen intuition i de inledande exemplen i avsnitten nedan – hur besvarar du frågorna spontant, utan att göra några beräkningar? Precis som för andra delar av matematiken är det viktigt att man som lärare är medveten om vilka uppfattningar som kan förekomma för att kunna arrangera undervisningen på ett klokt sätt. Ett sätt att utmana elevers missuppfattningar i undervisningen är att ställa olika sätt att resonera mot varandra, gärna med utgångspunkt från elevernas egna undersökningar av slumphändelser.

Benägenhet att se sannolikhetsfördelningar som likformiga

Betrakta följande problem.

Två tärningar kastas samtidigt två gånger med följande resultat.

Kast 1: en femma och en sexa

Kast 2: två sexor

Vilket av dessa av resultat är mest sannolikt, eller är de lika sannolika?

Många elever menar att de två resultaten är lika sannolika och det är vanligt att alla möjliga utfall av en slump händelse betraktas som lika sannolika. Denna uppfattning kan bero på svårigheter att bestämma utfallsrummet, som i ovanstående fråga där vi måste inse att kast 1 går att få på två olika sätt, [5,6] och [6,5], samtidigt som kast 2 endast går att få på ett sätt. Det gör att resultatet i kast 1 är dubbelt så sannolikt som resultatet i kast 2. Men det kan också bero på missuppfattningen att alla utfall av en slump händelse är lika sannolika. Ett annat exempel är att utfallen ”två krona”, ”två klave” och ”en av varje” bedöms vara lika sannolika. Den klassiska sannolikhetsdefinitionen, där antalet gynnsamma utfall divideras med totala antalet möjliga utfall, bygger på antagandet att alla utfall är lika sannolika – möjligen är detta något som ibland tas för givet i undervisningen? Ett sådant antagande kan vi göra med till exempel sexsidiga symmetriska tärningar, men i många andra fall är det inte möjligt, till exempel för sannolikheten att ett kastat ”monopolhus” landar på en viss sida. Huset har sju sidor – fyra ”väggar”, en ”botten” och två ”taksidor” – men de sju möjliga utfallen kan omöjligt vara lika sannolika då huset är oregelbundet i formen.

Representativitet

En vanlig missuppfattning benämns *representativitet*. Vi använder följande problem, för att belysa denna missuppfattning. Fundera en stund över hur du själv skulle besvara frågan.

När alla sexbarnsfamiljer i en stad tillfrågades om den exakta ordningen deras barn fötts i, med avseende på kön, svarade 72 familjer att de fötts i denna ordning:

Flicka – Pojke – Flicka – Pojke – Pojke – Flicka

Hur många familjer borde, enligt din uppskattning, svarat att deras barn har fötts i följande ordning?

Pojke – Flicka – Pojke – Pojke – Pojke – Pojke

Under förutsättning att sannolikheten att få en pojke eller flicka är lika stor så är de två serierna precis lika sannolika. Ändå finner många intuitivt att den senare serien är mindre sannolik än den förra. Förhållandet mellan antalet pojkar och flickor i den senare serien stämmer inte överens med den lika fördelningen av pojkar och flickor i samhället (populationen). Tendensen att bedöma sannolikheten för en händelse utifrån hur väl den representerar fördelningen i populationen är utmärkande för den missuppfattning som kallas representativitet. Den innebär också att man tror att förhållandet i små stickprov kommer att efterlikna fördelningen i stora stickprov – till exempel att resultat av tio myntkast bör bli fördelat ungefär

hälften krona och hälften klave för att tio tusen kast skulle ha ungefär den resultatfördelningen.

En övertro på hur små stickprov avspeglar förhållandena i populationen kan lätt påverka val vi gör i vardagen genom att vi drar felaktiga slutsatser om en population utifrån ett litet stickprov. Säg att vi tänker köpa en ny bil och därför frågar tre bekanta om en modell som de tidigare ägt. Om då två av de tre haft problem med oljeläckage är det lätt att dra slutsatsen att detta är ett vanligt problem för den aktuella bilmodellen. Men i ett så litet stickprov spelar slumpen så stor roll för utfallet att problemen med oljeläckage i själva verket kan vara ytterst ovanliga för bilmodellen.

Missuppfattningen kan även visa sig när man jämför två serier av barn med samma antal pojkar och flickor.

Alla sexbarnsfamiljer i en stad tillfrågades om den exakta ordningen deras barn fötts i.
Vilken serie är mest sannolik?

Flicka – Pojke – Pojke – Flicka – Pojke – Flicka
eller
Pojke – Pojke – Pojke – Flicka – Flicka – Flicka

Även här är de två serierna lika sannolika men ändå tänker många intuitivt att serie två är avsevärt mindre sannolik än serie ett. Detta har att göra med hur slumpmässighet uppfattas. Trots att båda serierna efterliknar fördelningen i populationen (lika många flickor och pojkar) uppfattas inte serie två som slumpmässigt ordnad. Slumphändelser är processer som är oförutsägbara så när de genererar till synes ordnade sekvenser upplevs dessa som osannolika trots att de är precis lika sannolika som någon annan sekvens som kan uppstå. Till exempel så upplevs lottoraden 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (till skillnad mot till exempel 2, 7, 11, 12, 23, 25, 33) som väldigt osannolik eftersom det ses som ett ordnat resultat av en serie av slumphändelser. Uppfattningen att resultatet av slumphändelser ska efterlikna den oordnade process som skapar dem är ett annat uttryck för det som kallas för representativitet.

Representativitet utgörs alltså i huvudsak av två missuppfattningar.

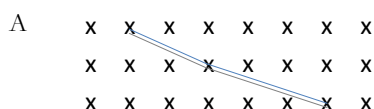
- (1) Fördelningen av utfall i små stickprov ska spegla fördelningen i hela populationen och i stora stickprov.
- (2) Resultat av slumpförsök bör bli oordnade sekvenser eftersom slump uppfattas som något som inte uppvisar mönster.

Det är viktigt att utmana dessa och andra missuppfattningar i undervisningen. Med utgångspunkt i elevers egna undersökningar av slumphändelser kan elevers tankar om slumpprocesser och betydelsen av stickprovets storlek diskuteras, t.ex. genom att jämföra flera små stickprov för att se hur mycket de kan variera och även jämföra med ett eller flera större stickprov. Med enkla slumphändelser som slantsingling kan elever tillsammans skapa stora stickprov under en lektion, vilket kan ge goda möjligheter att diskutera och jämföra resultat.

Tillgänglighet

En annan missuppfattning benämns *tillgänglighet*. Börja med att fundera på detta problem.

Nedan visas två strukturer, A och B. En *Väg* genom en struktur binder ihop ett kryss i den översta raden med ett kryss i den nedersta raden och passerar precis ett kryss i varje rad. En väg i A kan t.ex. börja i det andra krysset från vänster i den översta raden, gå till det fjärde krysset i andra raden och sluta i det sjunde krysset i den nedersta raden (se figuren).



1. Vilken av de två strukturerna tror du har flest *Vägar*?
2. Hur många *Vägar* finns det i varje struktur?

Studier av detta fenomen visar att många spontant svarar att struktur A har fler *Vägar* trots att antalet i själva verket är samma i båda strukturerna. Det verkar vara lättare att se fler distinkta vägar i A, samt att dessa är lättare att omfatta samtidigt eftersom de är kortare än vägar i B. Utfall som vi enkelt kan visualisera och tänka på samtidigt uppfattas ofta som mer sannolika än andra utfall av en händelse. Detta är grunden till en missuppfattning som benämns *tillgänglighet*. Ett annat exempel för att illustrera detta: Vilka svenska ord är flest, de som börjar med bokstaven R eller de som har R som tredje bokstav? För många av oss är det mycket enklare att komma på ord som börjar på R än ord som har R i tredje positionen. Tillgängligheten leder då till att ord som börjar på R bedöms vara fler, trots att det är tvärt om.

Att göra riskbedömningar utifrån hur enkelt det är att dra sig till minnes en händelse kan få oönskade och ibland kostsamma följder. Låt oss ta ett exempel. Du ska precis betala din nya mobiltelefon med en lång kö av personer bakom dig och du får frågan om du vill köpa en tilläggsförsäkring. Du måste snabbt bestämma dig och de första minnena som dyker upp är av bekanta vars mobiltelefoner har gått sönder på ett eller annat sätt. Även om du själv är en försiktig person kan dessa minnesbilder få dig att bedöma risken som stor att du kommer att behöva försäkringen. Ditt beslut att betala extra för försäkringen baseras på en sannolikhetsbedömning grundad i hur tillgängliga dessa minnen är för dig.

Många av de situationer med sannolikhet som elever har mött innan de kommer till matematikundervisningen och även många av de exempel som traditionellt har använts i undervis-

ningen har likformiga sannolikhetsfördelningar. Klassiska exempel är sexsidiga symmetriska tärningar, myntkastning och kulor i urnor (där varje kula har samma sannolikhet att bli dragen, oberoende av färg). I undervisningen kan vi utmana elevers eventuella missuppfattning om att alla slumphändelser är sådana genom att till exempel jämföra kast med en symmetrisk tärning och med en icke-symmetrisk (eller ett häftstift). Det ger möjligheter att diskutera de antaganden vi gör i olika sannolikhetsolkningar och belysa eventuella missuppfattningar.

Utfallsorienterad ansats

För många är anledningen att bry sig om sannolikhetslära dess potential att ge ett beslutsunderlag. Personer som har en *utfallsorienterad ansats* när de tolkar sannolikhetsmått drar det ett steg längre. Om till exempel en väderprognos säger att det är 70% chans för regn så tolkas det som att det kommer regna den dagen. Brytpunkten för att något inträffar eller inte inträffar i detta utfallsorienterade tankesätt ligger runt 50%, vilket tolkas som en total brist i kunskap om utgången och att det inte går att uttala sig om vare sig det ena eller det andra. Är det bara tillräckligt långt över 50% så tolkas det som att händelsen kommer att inträffa samtidigt som om det är tillräckligt långt under 50% så tolkas det som om det inte kommer att inträffa.

Om det handlar om triviala saker som vädret och beslutet som fattas är att ta på sig regnjacka en dag eller inte så kan den utfallsorienterade ansatsen verka vara harmlös, åtminstone i ett socialt perspektiv. Andra beslut kan få större konsekvenser, till exempel om man ska orka ta på sig bilbälte eller inte under den korta resan till affären. Anta att risken för att bli inblandad i en bilolycka under resor som är kortare än 5 km är 2%. Tolkat enligt en utfallsorienterad ansats skulle det innebära att det inte kommer ske någon bilolycka på väg till affären och att sätta på sig bilbälte blir därför onödigt. Den här typen av tankeexperiment visar att det kan vara viktigt att inte bara diskutera hur elever kommer fram till ett svar i sannolikhetsläran utan också hur de tolkar de numeriska värden de kommer fram till eller exponeras för.

Sammanfattning

I texten har några av de olika missuppfattningar om sannolikhet som finns beskrivits. Dessa går antagligen att finna hos många elever på högstadiet. Men det ska också sägas att tydligast framstår de troligtvis i sammanhang där ”matematikämnet” är mindre påtagligt, som till exempel hemma under en spelkväll med familjen. Det är viktigt att komma ihåg att missuppfattningar av det här slaget kan vara beständiga, trots studier i sannolikhet, och det innebär inte att man är sämre på matematik bara för att man ibland återfaller i liknande tankebanor. Men är vi själva medvetna om dem kan det vara ett ytterligare steg mot ett tänkande och beslutsfattande grundat i en mer matematiskt korrekt logik.

Referenser

Tversky, A. & Kahneman, D. (1982). *Judgment under uncertainty: heuristics and biases*. New York: Cambridge University Press.