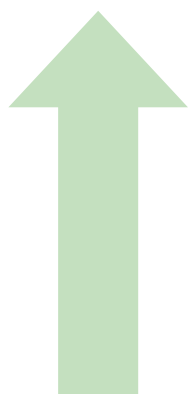


Laborativt arbetssätt i matematik

Att använda laborativa material i matematikundervisningen är på intet sätt något nytt. Det mest väsentliga för att material ska komma till verklig nytta i elevers lärande är att de ges möjlighet att möta matematikinnehållet på olika nivåer. Mellan det konkreta arbetet och det abstrakta tänkandet finns uttrycksformer som bilder, informella symboler och språk. Elevernas egen dokumentation är också viktig.

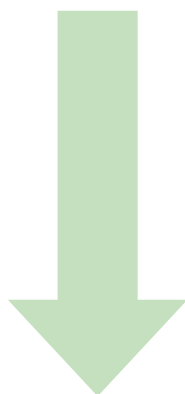
Alla elever bör få möta en variation av arbetssätt i matematikundervisningen, de ska både utforska matematiken på egen hand och tillsammans med kamrater, men också ges en god, välstrukturerad undervisning och handledning.

Laborativt eller konkretiserande arbetssätt



*Laborativt
arbetssätt*

Ett laborativt arbetssätt jämförs ibland med ett konkretiserande arbetssätt. I ett *laborativt arbetssätt* kan alla elever delta och starta från den nivå de befinner sig på. Ifall området är helt nytt för eleverna kan de starta med den informella förståelse de (eventuellt) redan har med sig, men alla måste inte alltid börja med konkret arbete. Finns förkunskaper kan eleven gå direkt in på ett mer abstrakt steg. De kan sedan stanna olika länge på de olika stegen när de i olika takt arbetar sig vidare till den helt abstrakta nivån. Ett *konkretiserande arbetssätt* innebär en omvänd arbetsgång. Alla elever startar (samtidigt) i den formella och abstrakta matematiken. För de elever som inte klarar detta får läraren arrangera ett konkretiserande innehåll, vilket i praktiken ofta betyder att dessa elever får använda laborativa material medan övriga elever fortsätter på den abstrakta nivån.



*Konkretiserande
arbetssätt*

Induktiv – deduktiv

Ibland används orden induktiv och deduktiv för att beskriva olika arbetssätt. I detta sammanhang kan en induktiv metod tolkas som ett undersökande arbetssätt, från specifikt till generellt. En deduktiv metod ger ett arbetssätt som går i omvänd riktning, dvs från generellt till specifikt. Exempel:

- *Induktiv metod.* I det undersökande eller utforskande arbetssättet har eleverna tillgång till material av allehanda slag och undersöker många snarlika fall för att sedan dra en slutsats. Eleven delar upp talet 10 på alla tänkbara sätt, med olika material, i olika kontexter, resonerar, diskuterar etc för att efter hand lära sig alla tiokamrater.
- *Deduktiv metod.* I den välstrukturerade undervisningen demonstrerar läraren (eller läroboken) en slutsats, t ex en formel för hur volymen på ett rätblock kan beräknas. Eleven gör sedan egna beräkningar utifrån givna rätblock, både tredimensionella kartonger och tvådimensionella skisser, för att genom förståelse befästa formeln. Det är inte ovanligt att elever långt upp i grundskolan inte har förstått att volymen i ett rätblock är helt oberoende av hur det är orienterat. Dessa elever har troligtvis mest beräknat volym utifrån skisser med längd-, bredd- och höjdmått utsatta. De elever som även arbetar med kartonger inser enklare att ett paket sockerbitar innehåller lika många bitar hur de än vrider och vänder på det.

AKTIVITETER STEG FÖR STEG

Till vardags säger vi ofta att eleverna ska "gå från det konkreta till det abstrakta". Så kan det vara, men vi bör även hålla öppet för den andra riktningen, alltså från det abstrakta till det konkreta. Att konkretisera och åskådliggöra ett abstrakt och generellt matematiskt uttryck är många gånger betydligt mer utmanande, för såväl lärare som elever, än att följa en arbetsgång från det konkreta till det abstrakta. Vilken riktning vi än väljer är det ändå vad som händer mellan dessa båda ytterligheter som är det mest avgörande för att det ska uppstå en möjlighet för eleven att lära. Av den anledningen ska vi titta närmare på ett par arbetsgångar som i sin grund är relativt lika men ändå skiljer sig åt. En laborativ aktivitet bygger på i huvudsak tre steg:

1. Gemensam introduktion
2. Laborativt arbete
3. Gemensam uppföljning och diskussion

Steg 1, gemensam introduktion, innebär att elever får en inblick i vad som ska hända eller vad de ska göra. Introduktionen ska skapa förväntan och nyfikenhet. Den bör också resa frågor som motiverar eleverna att undersöka såväl material som aktivitet och vad arbetet kan leda till. Därmed inte sagt att läraren behöver berätta vad som

ska hända eller vad eleverna förväntas lära sig. I vissa aktiviteter kan det vara klokt med en introduktion då läraren använder material som motsvarar det eleverna ska använda, men i annat format. Ska eleverna undersöka ett tändsticksmönster kan det finnas fördelar med att läraren istället har bambukäppar – det syns bättre och visar att det inte är stickorna i sig som är det viktiga.

Steg 2, laborativt arbete, kan ske enskilt, i par, i grupp eller i helklass. I praktiken blir det vanligtvis en kombination. Detta steg kan många gånger vara det som är enklast för läraren att planera då det ofta finns detaljerade beskrivningar i böcker, pärmar och på webben. Eleverna ska inte enbart arbeta praktiskt med konkret material, de ska även ges möjlighet att arbeta halvkonkret, halvabstrakt och abstrakt, se nedan.

Steg 3, gemensam uppföljning och diskussion, har visat sig vara ett mycket kritiskt steg. Om eleverna enbart plockar iordning efter sig i slutet av steg 2 är risken stor att aktiviteten mest får karaktär av "görande". När läraren istället avslutar en aktivitet genomtänkt med en uppföljande diskussion finns möjlighet att förstärka inläringen och undanröja missuppfattningar. Genom att jämföra begreppsuppfattningar och lösningsstrategier kan elever också "byta upp sig" till effektivare tankesätt.

Läraren kan här hjälpa eleverna att bli medvetna om vilket centralt innehåll som har behandlats, även om det ofta är relativt uppenbart, och vilka förmågor som har kommit till uttryck. Det senare är inte alltid lika uppenbart utan behöver belysas av läraren.

Fyra nivåer

Ett sätt att beskriva och göra elever medvetna om vad som händer på vägen mellan konkret och abstrakt är att tydligt arbeta med nivåerna halvkonkret och halvabstrakt. Detta kan exemplifieras på följande sätt:

Konkret: Arbete med fysiskt material, ofta i plast, trä eller papper, som kan hanteras manuellt. Sakerna kan vändas och vridas, de går att uppleva med flera sinnen. I många fall är det konkreta materialet en abstraktion av ett annat verkligt föremål, t ex leksaker och plockmaterial som är tillverkade i annan skala än det som de representerar. På denna nivå kan det laborativa materialet fylla en funktion för att åskådliggöra något abstrakt eller för att underlätta vid beräkningar. Det talade ordet är viktigt när både lärare och elever formulerar det som sker.

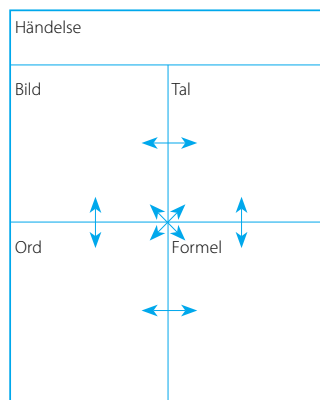
Halvkonkret: Första steget för att lämna den helt konkreta nivån är att använda bilder. Dessa kan vara elevers egna naturtrogna teckningar (är det en cykel ska det synas att det är en cykel), men lika gärna fotografier eller andra illustrationer som exempelvis memorykort. Ibland protesterar både lärare och elever här. För att ta några ytterligheter så finns det elever som tycker så mycket om att rita och måla att de fastnar i det och helt missar matematiklärandet, andra elever avskyr att teckna och vill för allt i världen slippa det på matematiklektionerna. Läraren måste avgöra när det är dags för eleven att ta nästa steg eller att hitta alternativ.

Halvabstrakt: Eleverna lämnar sina föreställande bilder till förmån för egna informella symboler. Leksaksbilen som tidigare har ritats omsorgsfullt med hjul, dörrar och strålkastare kan nu ersättas av en ruta eller ett streck. Det viktigaste är att eleven själv vet vad den valda symbolen representerar.

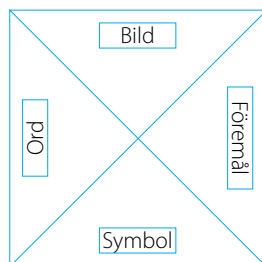
Abstrakt: Eleven går från sina egna informella symboler till den formella matematiken med siffror, andra symboler, räknelagar och regler. Förhoppningsvis har eleven då med sig en förståelse för vad de formella uttrycken står för. I annat fall finns det möjlighet för eleven att gå tillbaka både i sin dokumentation och i sina tankar för att se varifrån ett formellt uttryck härstammar.

Dessa fyra nivåer har inga vattentäta skott mellan sig. Naturligtvis kan eleverna ha med sig laborativa material eller bilder som stöd för tanken på senare nivåer, men det finns åtminstone två betydelsefulla saker att uppmärksamma. Dels måste vi låta de mellanliggande stegen ta tid. För oss vuxna som redan behärskar ett matematiskt innehåll eller begrepp är det lätt att bli lite otåliga och skynda på eleverna för mycket. Dels är det nödvändigt att se till att undervisningen (eller enskilda elever) inte fastnar på den konkreta nivån – för att vid senare tillfälle ta ett (obegripligt) skutt direkt till den abstrakta nivån. I båda fallen kan det resultera i att det laborativa arbetet enbart har blivit ett tidsödande ”görande” som inte fyller någon verklig funktion för elevens lärande.

Detta relativt linjära arbetssätt både kan och bör varieras. De fyra nivåerna kan ses som olika matematiska uttrycksformer där eleverna använder material, bilder, ord, informella och formella symboler. Andra alternativ är att arbeta med uttrycksformer i en ordning som antingen läraren eller eleven själv bestämmer. Ett exempel är de tanketavlor som presenteras i *Förstå och använda tal*.



Arbetsgången konkret – abstrakt kan sägas ligga till grund för det fyrfältsblad som visat sig förtydliga arbetet med att skapa grundläggande förståelse för algebra. Ofta benämns de fyra fälten: bild, tal, ord och formel. I ett femte mindre fält överst på papperet skrivs rubrik för aktiviteten alternativt beskrivs den händelse som ligger till grund för aktiviteten. I fältet *bild* ritas aktiviteten av och det bör vara en händelse som på något sätt förändras, exempelvis ett växande mönster lagt med stickor, markörer eller olika sorters skruvar. I fältet *tal* beskrivs och organiseras händelsen med hjälp av siffror. I fältet *ord* utgår eleven från de tidigare fälten och beskriver med egna ord vad som händer när mönstret växer. Detta steg som först kan tyckas vara det enklaste är många gånger det som elever (och lärare) tycker är det svåraste. De är helt enkelt ovana att med egna ord formulera ett matematiskt innehåll. I fältet *formel* tas steget över i ren abstraktion.



En sammanfattande mening väljs från fältet ord. Meningen översätts sedan i många och små steg till en formel. Den inledande meningen till skissen till höger skulle kunna var: *Först lägger jag en bambukäpp, sen fyller jag på med tre bambukäppar för varje ny ruta.*

Används fyrfältsbladet på detta sätt blir det tydligt att eleverna får tillfälle att arbeta och resonera såväl enskilt och i mindre grupp som i läroled helklass. Exempelvis bör arbetet med fältet formel vara lärolett, åtminstone tillräckligt länge för att alla elever ska få en chans att förstå vad som händer i de olika stegen från mening till formel.

Med hjälp av fyrfältsbladet ska alltså eleven förstå vad en formel är och att det finns en verklighet bakom. För elever som behöver extra utmaningar kan fyrfältsbladet användas "baklänges". Ge eleverna ett algebraiskt uttryck att skriva in i formelfältet och låt dem sedan fundera ut och pröva sig fram till hur uttrycket kan representeras i de övriga fälten.

Tanketavlor och fyrfältsblad är två konkreta exempel på hur elever kan dokumentera både vad de gör och vad de lär sig. En betydande orsak till varför elever ska dokumentera är att det laborativa arbetet annars lätt kan bli osynligt. När materialet är bortplockat "finns inget kvar" om ingen form av dokumentation har gjorts. Då kan till och med en ifylld sida i en traditionell lärobok vara mer konkret. Elevernas dokumentation kan göras med stor variation. Det enklaste sättet är att fotografera under pågående arbete och sedan sätta text till. Dagens teknik kan verkligen underlätta oavsett om det är eleven själv eller läraren som skriver, eller om texten talas in. Olika former av dokumentation kan hjälpa elever att utveckla begrepp steg för steg, att se likheter och skillnader mellan olika begrepp, att tydliggöra vad elever kan före och efter ett arbetsområde, att låta elever fundera på vad som är respektive inte är en specifik geometrisk figur, att utveckla ett vardagligt språk mot ett allt mer matematiskt språk, etc.

När dessa dokumentationer är sparade finns möjligheter att även använda dem till analys och bedömning. Eleven, läraren och föräldrar kan se vad eleven har arbetat med och vilken utveckling som har skett. Elevdokumentationerna ger också läraren tillfälle att upptäcka missuppfattningar i ett tidigt skede.

Vilken arbetsgång som används, hur och vid vilket tillfälle, måste avgöras från aktivitet till aktivitet, ytterst beroende på vilket matematikinnehåll som är det primära målet för elevernas lärande.

$$1. 1 \text{ bambukäpp} + 3 \cdot \text{rutorna}$$

$$2. 1 + 3 \cdot \text{antalet rutor}$$

$$3. 1 + 3 \cdot \text{ant rutor}$$

$$4. 1 + (3 \cdot \text{ant rutor})$$

$$5. 1 + (3 \cdot \square) \quad \square = \text{ant rutor}$$

$$6. 1 + (3 \cdot n) \quad n = \text{ant rutor}$$

$$7. 1 + 3n$$

$$8. 3n + 1$$

OLIKA SLAGS MATERIAL

De laborativa matematikmaterial som används i dagens undervisning kan delas in i tre grupper:

1. *Vardagliga föremål* som finns i hemmen, på skolor och arbetsplatser, i samhället och i naturen kan användas i matematikundervisningen. Ett vanligt exempel är redskap för att mäta, som måttband, meterstock, hushållsmått, våg och termometer.
2. *Pedagogiska material* är speciellt framtagna och producerade för att användas i matematikundervisningen. Några vanliga exempel är tiobasmaterial, multilink, geostrip, cuisenairestavar och logiska block.
3. *Spel* kan avse både kommersiella spel och sådana som är konstruerade och tillverkade av lärare och elever. Det kan vara allt från traditionella spel som schack och fia till hypermoderna digitala spel.

Att använda material för att konkretisera, åskådliggöra eller laborera är ingen ny företeelse. Vi kan gå tillbaka till den grekiske filosofen Aristoteles som redan på 300-talet f Kr gav uttryck för att kunskap kan utvinnas genom att vi först studerar många konkreta exempel för att upptäcka vad som är utmärkande för dem. Han betraktade matematik som abstraktioner av tingens konkreta egenskaper. Vi gör några nedslag från slutet av 1800-talet för att lyfta fram några av dem som bidragit till utvecklingen av laborativa material.

Friedrich Fröbel var inspirerad av den schweiziske pedagogen Johann Heinrich Pestalozzis idéer om att använda alla sinnen i det första steget i läroprocessen. Fröbel konstruerade ett material, som fått namnet *Frøbels lekgåvor*, vilket är särskilt riktat mot barn och som fått stor betydelse i förskolan.

Maria Montessori var egentligen läkare men öppnade 1907 en skola i Rom för de



så kallade "obildbara" barnen. Hon observerade att intresseförändringar hos alla barn följer ett givet mönster. Hennes idé om inläring handlar om att gå från det konkreta till det abstrakta och hon arbetade fram ett matematikmaterial som bland annat lyfter fram taluppfattning och aritmetiska begrepp. Materialet används idag även av elever i grundskolan.

Anna Kruse var lärarinna och senare föreståndarinna för en skola i Stockholm. Hon har i sin bok *Åskådningsmatematik*, som utkom i början av 1900-talet, beskrivit hur material och stoff, snarare än lärarens förklaringar ska leda till att eleven gör egna upptäckter. Hon förespråkar ett arbetssätt som är laborativt och undersökande och menar att siffror inte ska användas för tidigt. Kruse talar

sig varm för ett material som hon kallar räknelappar och som hon fått inspiration till från en dansk småskolelärarinna. Lapparna är kvadratiska, 3 x 3 cm, röda på ena sidan och blå på den andra.

George Cuisenaire var belgisk folkskollärare. Han såg att många av eleverna hade svårt att skilja på tals storlek och konstruerade då ett material med tio olika långa stavar. Senare kom den engelske psykologen och matematikprofessorn Caleb Gattegno att sprida information om stavarna och hur de kan användas i matematikundervisningen.



I Sverige har Gudrun Malmer gjort en stor insats för att sprida materialet och visa lärare hur stavarna bör användas. Om stavarna ska komma till sin fulla rätt är det viktigt att de används som ett relationsmaterial och inte så att varje färg knyts till ett specifikt tal. Malmer har själv utvecklat andra laborativa material och hon betonar också språkets betydelse som stöd i elevernas lärande.

Zoltan Dienes är ett relativt okänt namn i Sverige, men material som han är upphovsman till är desto mer bekanta. Det är han som bland annat har konstruerat den ursprungliga versionen av det vanligt förekommande multibasmaterialet, de första konkreta algebraiska materialen samt de logiska blocken. Dessa material och tillhörande instruktioner ligger till grund för dagens användning av laborativa material i undervisningen. Hans kanske mest kända bok *Building up mathematics* från 1960 beskriver inte bara material och aktiviteter utan kopplar också samman det laborativa arbetet med idéer om elevers gemensamma lärande i grupparbeten. Dienes föddes i Ungern men har levt större delen av sitt liv i England.

RESULTAT FRÅN STUDIER

I kunskapsöversikten *Laborativ matematikundervisning – vad vet vi?* redovisas de viktigaste resultaten från ett flertal rapporter och studier om laborativ matematikundervisning:

- Många rapporter, om än inte alla, visar att elever som använder laborativa material presterar bättre, enligt de kriterier som hade satts upp i respektive undersökning, än de elever som inte gör det.
- Lärarens erfarenhet och kunnande om material är avgörande för hur de används och vilka elevresultat arbetet ger.
- Elever ser inte alltid relationen mellan ett material och det begrepp det ska representera. Det finns många exempel där elever kämpar ihärdigt med att se "något" i materialet, men tyvärr helt fel saker. I värsta fall kan det till

och med leda till att elever får missuppfattningar om ett särskilt matematikinnehåll.

- Ska arbete med laborativa material ge resultat behöver de användas länge och regelbundet. Att ta in dem i undervisningen vid enstaka tillfällen tillför i regel inte mycket. Kanske skapar det snarare förvirring hos eleven. En undervisning som genomsyras av det laborativa arbetssättet tillåter alltid att material finns till hands, även om det under perioder inte alls behöver användas.
- Ju äldre eleverna blir, desto mer ansvar bör de själva få ta om och när de vill använda material.
- Lärare som oreflekterat tar in laborativa material för att förändra sin undervisning når sällan särskilt långt. Laborativa material kan inte på egen hand förväntas förbättra undervisningen.

Kunskapsöversikten sammanfattas i två punkter där de allra mest centrala slutsatserna är:

- De laborativa materialen i sig ger inte eleverna matematiska insikter. Matematik är ett värde som läraren måste tillföra och/eller lyfta fram.
- Lärarens roll är avgörande för vilken effekt den laborativa matematikundervisningen får för elevernas lärande.

Med andra ord räcker det inte att bara se till att det finns gott om laborativa matematikmaterial i ett klassrum eller i en lärosal, inte ens om läraren ser till att eleverna verkligen använder det, i meningen att de "gör" något med det. Istället måste såväl material som aktiviteter sättas i ett sammanhang som är relevant för eleverna och där de själva kan se vilka framsteg de gör så att de med gott självförtroende helt kan släppa ett material och förlita sig på att de ändå förstår matematikinnehållet.

REFERENSER

-
- Bergsten, C., Häggström, J. & Lindberg, L. (1997). *Algebra för alla*. NCM, Göteborgs universitet.
- Dienes, Z. (1960). *Building up mathematics*. New York: Hutchinson Educational.
- Kruse, A. (1910). *Åskådningsmatematik*. Stockholm: Norstedt & Söners förlag.
- McIntosh, A. (2008). *Förstå och använda tal: en handbok*. NCM, Göteborgs universitet.
- Rystedt, E. & Trygg, L. (2013). *Matematikverkstad: En handledning för laborativ matematikundervisning*. NCM, Göteborgs universitet.
- Rystedt, E. & Trygg, L. (2010). *Laborativ matematikundervisning: Vad vet vi?* NCM, Göteborgs universitet.