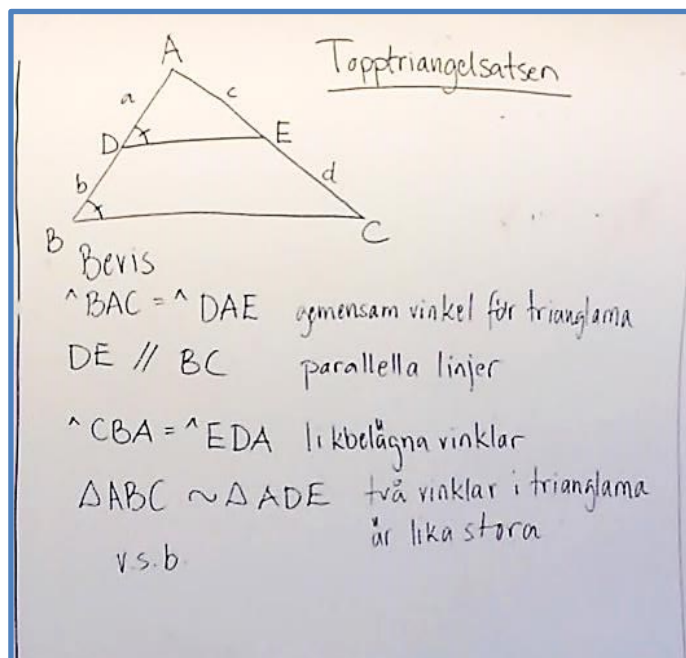


Matematik – Gymnasieskola
Modul: Språk i matematik
Del 2: Matematikspråket

Matematikspråket

Anette de Ron och Lisa Österling, Stockholms universitet

Med matematikspråket menar man de ord, begrepp, symboler, bilder och fraser som bygger upp matematisk kommunikation. Den här artikeln handlar om hur du kan arbeta med att erövra matematikspråket genom att läsa matematiska texter med dina elever. Fundera till exempel på hur det skulle låta om dina elever själva läste texten i bilden nedan högt.



Figur 1. Exempel från lektion i matematik 2c: bevis av topptriangelsatsen.

I exemplet i Figur 1 består texten av en figur tillsammans med symboler, beteckningar och matematiktermer. Det är tydligt att det är ett matematikspråk som används, och ett vardagsspråk räcker inte för att förstå texten i exemplet. Den här artikeln behandlar de olika funktioner vardagsspråket och matematikspråket har när elever lär sig matematik, men också hur man kan stötta elever att kliva in i ett matematiskt språk. Matematikens språkliga och kommunikativa karaktär är en gemensam nämnare för de tre grundprinciperna för ett matematiskt språkutvecklande arbetsätt som presenterades i del 1.

I ämnesplanen i matematik konstateras att ”Kommunikation i matematik är likartad i hela världen” (Skolverket, 2011). I ämnesplanens syfte anges att ”undervisningen syftar till att eleverna utvecklar förmåga att /.../ använda och beskriva innebörden av matematiska begrepp samt samband mellan begreppen /.../ följa, föra och bedöma matematiska reso-

nemang /.../ kommunicera matematiska tankegångar muntligt, skriftligt och i handling” (Skolverket, 2011, s. 91). Därigenom blir språkutvecklande arbetssätt i matematik en väg för att uppfylla syftet i ämnesplanen.

Hur fungerar matematikspråket?

Matematikspråket är konstruerat av människor, och innehåller både matematiska ord, begrepp, symboler, bilder och fraser. Att lära sig matematik innebär också att lära sig matematikspråket, med dess konventioner och förväntningar. Beteckningen AB har ingen mening om man inte är införstådd med den abstrakta idén att i matematiken förstås det som vinkeln mellan sträckorna AB och BC , med vinkelspets i B . Ett annat exempel är den räta linjens ekvation, $y = kx + m$. Ekvationen är i sig en generell beskrivning av alla funktioner som kan representeras av en rät linje. Men ekvationen omfattar samtidigt abstraktioner där varje symbol har en speciell betydelse. Ska grafen konstrueras talar till exempel bokstaven m om vilken som är linjens skärningspunkt med y -axeln. Ska ekvationen beskrivas med vardagligt språk kan bokstaven m som exempel berätta om startvärdet, till exempel en medlemsavgift i en klubb. Symboler är utmärkande för den matematiska vetenskapen och följer överenskomna konventioner. De matematiska symbolerna är kompakta och exakta och matematikspråket är i hög grad kompakt och exakt till sin natur.

Matematikens terminologi kan vara hierarkiskt ordnad. Ett exempel på det är begreppet triangel, som avgränsar trianglar från månghörningar i allmänhet. Månghörningar är i sin tur en avgränsning från andra geometriska objekt. Språket låter oss bland trianglarna, precisera olika slags trianglar genom att ange om de är t.ex. rätvinkliga, likbenta eller liksidiga. Man kan jämföra och ange likheter mellan grupper av trianglar genom att ange om de är likformiga eller kongruenta. Att förstå ett matematiskt begrepp innebär inte bara att förstå betydelsen av själva ordet. Begreppet har relationer med andra begrepp. Det har också en specifik definition som både beskriver och avgränsar begreppet, och begreppet kan uttryckas med både språkliga och andra uttrycksformer, formellt matematiska eller informella, beroende på kontext och syfte.

Matematikspråkets olika delar

Det finns ord som har olika betydelser i det vardagliga språket jämfört med matematikspråket. Exempel är ord som bråk, funktion och rot. Ord som kan vara kända av eleven i sin vardagliga betydelse men kanske inte när eleven stöter på orden i sina matematiska sammanhang. Nedan finns några exempel på ord som har dels en vardaglig dels en matematisk betydelse.

Ord som används i matematiken

Bråk
Teckna
Axel
Rot

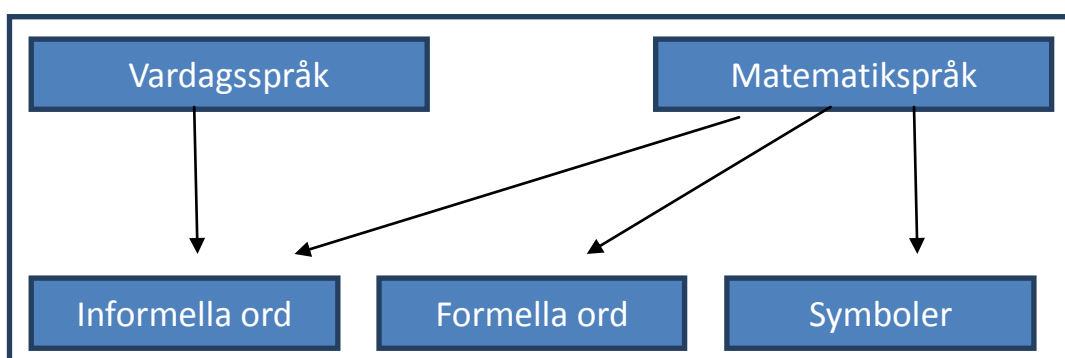
Vardaglig betydelse

Konflikt
Rita
Kroppsdelen axel, namnet Axel
Växtens rot

Orden har inte alltid en enhetlig betydelse inom matematiken, där till exempel rot används både för det som satisfierar en ekvation och i betydelsen ”roten ur nio är tre”.

Matematikspråket skiljer sig från ett vardagligt språk och från språk i andra ämnen genom sina specifika ord, begrepp, symboler, bilder och fraser. En utmaning för läraren är att synliggöra och skapa förbindelser mellan ord i vardagsspråket och olika ord och symboler inom matematikspråket så att elever kan anpassa språket till olika sammanhang.

I del 1 presenterades en *Språkkarta* över de olika delarna av matematikspråket och vilken relation de har till vardagsspråket. Figur 2 visar delar ur den språkkartan.



Figur 2. Delar ur Språkkarta av Kindenberg och Ramsfeldt (2016), fritt efter Hajer & Meestringa (2014).

Man kan betrakta de olika delarna av matematikspråket: informella ord, formella ord och symboler som olika ordförråd eller register i matematikspråket.

Första gången ett nytt matematiskt begrepp behandlas, som till exempel räta linjens ekvation, kan det beskrivas med hjälp av informella ord och konkreta exempel, eller konkreta material. Exempel på informella ord är *ökar*, *mer*, *hög*, *mellan sig* och *räkna ut*. Uppgiften nedan kan eleven besvara genom att använda kunskaper om hur mönstret för staketet utvecklar sig, utan att ha kunskaper om det matematiska språket.

Emran ska köpa ett nytt staket till sin trädgård. Staketet ser ut som det på bilden, det vill säga 2 stolpar har 3 brädor mellan sig och 3 stolpar har 6 brädor mellan sig.

a) Hur många brädor behövs det om man ska bygga ett staket med 10 stolpar? *Endast svar krävs.*

b) Skriv ett samband mellan antalet stolpar och antalet brädor med ord eller formel.

Figur 3. Uppgift Staketet, NP MaA vt 2010.

Elever som besvarar frågan om staketet ovan kan mycket väl ha förstått det matematiska sambandet, utan att förstå de matematiska, formella ord som också kan användas för att beskriva mönstret. Det är alltså inte säkert att det formella språket är det elever använder för att förstå matematiska samband, att använda ett formellt matematiskt språk är en annan process än att lära sig lösa matematikuppgifter. För att kunna vara mer precis används formella ord, vilka inte så ofta förekommer i det vardagliga språket. Exempel på sådana ord är *funktion*, *skärningspunkt*, *koordinataxel* och *riktningskoefficient*.

En av grundprinciperna som presenteras i del 1 är att göra det matematiska innehållet begripligt genom sammanhang vilket i hög grad gäller matematikspråket. För att kunna abstrahera, resonera och bygga upp mer komplex matematik krävs att eleven kan och behärskar matematikspråket, de speciella ord, begrepp och symboler som ger betydelse och precision i matematiken. Abstrakt innehåll i matematiken kan göras begripligt genom att det kopplas till ett sammanhang för att hjälpa eleven att förstå hur matematiken kan uttryckas och tolkas i den situationen eller det sammanhanget.

I matematikundervisningen är det både naturligt och nödvändigt att använda alla de tre delarna av matematikspråket, informella ord, formella ord och symboler parallellt. Det kan man göra till exempel genom att översätta matematiska uttryck till en vardagshändelse eller uttrycka vardagshändelser matematiskt. Att utgå från och använda matematiska uttryck och beskriva dem med hjälp av informella och formella ord, och tvärtom, är viktigt för alla elever. För elever med svenska som andraspråk kan matematikundervisningen också vara ett sätt att närma sig det svenska språket. Att använda olika delar av matematikspråket skapar goda förutsättningar för alla elever att få en djupare förståelse för matematikens ord och begrepp. I samband med ett sådant arbete berörs de tre grundprinciperna för ett språkutvecklande arbetssätt: principen om att undervisa genom sammanhang, principen att främja aktiv språkanvändning och principen om att ge språklig stöttning genom att ge eleverna verktyg att ta sig an kognitivt utmanande matematiska texter och uppgifter.

Signalord och praxis

En orsak till att elever gör fel när de löser textuppgifter i matematik är att de inte förstår själva innebörden i texten (se exempelvis Möllehed, 2001 eller Parszyk, 2009). Detta kan leda till att de har svårt att välja rätt räknesätt eller räkneoperation. Ibland tycks också elever utföra godtyckliga beräkningar med de tal de hittar i textuppgiften snarare för att kunna ge ett svar på uppgiften än med syftet att utveckla kunskap om Lösningstrategier. I en studie av Magnus Österholm (2004) upplevde elever i gymnasiet det som lättare att läsa matematiktexter utan symboler än med symboler. Han menar att detta kan bero på att om symbolerna finns med i texten så flyttas fokus från innehållet. Texten läses då på ett mer mekaniskt eller ytligt plan än om man fokuserar på innehållet. Elever som läser textuppgifter på detta sätt försöker leta i texten efter symboler eller nyckelord som de hoppas ska ge en ledtråd till vilket räknesätt eller räkneoperation som ska användas (Sternér & Lundberg, 2002).

I matematikdidaktik benämner man ibland dessa nyckelord ”signalord”. Med detta menas ord i textuppgifter som signalerar ett visst räknesätt för eleverna. Ibland är signalorden

tydliga, med en precis innebörd, till exempel *förenkla* eller *derivera*. Den precisa betydelsen behöver då vara känd för eleverna. Andra signalord är mer subtila, där ord som ”maximal” tillsammans med en funktion kan signalera att andraderivatan ska användas., men det är viktigt att i sammanhanget ta hänsyn till om det rör sig om lokala eller globala maximum. Signalorden kan alltså både vara en ledtråd till en lösningsmetod, men också leda fel.

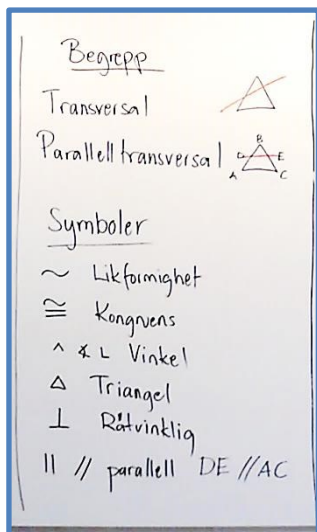
Det finns exempel på praxis, där en viss formulering signalerar en speciell lösningsmetod. Till exempel signalerar ”Avrunda till tre decimaler” att eleverna förväntas lösa uppgiften med hjälp av räknare, medan ”Svara exakt” kan betyda att till exempel π ingår i svaret istället för att beräknas. Inte bara signalorden, utan också uppgiftens kontext signalerar hur elever förväntas ange sitt svar. För en uppgift i en fysikkontext förväntas svaret anges med lämpligt antal värdesiffror, medan för en uppgift som handlar om priser eller behållning på bankkonton kan svaret anges i kronor och ören, vilket innebär med två decimaler.

Det är alltså väsentligt att både signalord och praxis synliggörs som en del i det matematiska språket. Om man tillsammans med eleverna diskuterar och analyserar signalordens betydelse arbetar man i enlighet med den tredje grundprincipen för ett språkutvecklande arbetsätt - principen om att ge språklig stöttning. Men problemlösning får inte reduceras till ”signalordsjakt”. Istället för att enbart leta efter signalord i texten bör fokus ligga på att förstå uppgiftens kontext och innebörden av den beskrivna situationen. Hegarty, Mayer och Monk (1995) undersökte vilka strategier collegestudenter använde sig av för att förstå textuppgifter i matematik. De såg att studenter som löste problem på ett framgångsrikt sätt skapade en meningsfull representation av situationen som problemet beskrev. Detta till skillnad mot studenter som inte var så framgångsrika, vilka i alltför hög utsträckning fokuserade på signalord och symboler. Detta visar på vikten av att ha principen om att främja aktiv språkanvändning för ögonen i matematikundervisningen. Att arbeta med strategier för problemlösning kan underlätta för eleverna att förstå den situation som uppgiften beskriver och därmed innebörden i problemet. Exempel på strategier är att använda laborativt material, rita en bild, göra en lista, dela upp problemet i delproblem eller arbeta baklänges.

Att utveckla ett matematikspråk

Den här artikeln inleddes med ett exempel på ett bevis av topptriangelns sats. Beviset utgörs av nästan uteslutande matematiska beteckningar och symboler. Läraren var vid planeringen medveten om att eleverna var osäkra på flera av dessa. Läraren förberedde lektionen genom att noggrant se över vilka ord, begrepp och symboler som ingår i lärobokens text, och vilka hon ville använda i sitt bevis.

Lektionen inleds med att läraren berättar övergripande om dagens innehåll. Därefter listas viktiga matematikord och viktiga matematiska symboler på tavlan, samtidigt som hon berättar om vad det är.



Figur 4. Lektionens begrepp och symboler listas på tavlan.

Nu kan läraren presentera beviset. Hon berättar vad hon gör i varje steg, och vilka symboler och beteckningar som används. Men inte nog med det, hon låter också eleverna läsa igenom beviset så som det presenteras i läroboken, först tyst, sedan läser några elever högt. De övningar som valts ut för lektionen handlade förstas om motsvarande innehåll, det var uppgifter där man behövde använda antingen topptriangel- eller transversalsatsen, och har stor nytta av de begrepp och symboler som presenterats.

En lektion som inleds på det här sättet sätter såväl matematikens innehåll som texter och språk i centrum. Det finns en tydlig medvetenhet om vilka språkliga komponenter som är viktiga i relation till just dagens innehåll, och eleverna får möjlighet att både få ord och begrepp presenterade för sig, att se dem i ett sammanhang i en text, och att själva börja använda dem. På så sätt relaterar lektionen tydligt till framförallt den tredje av grundprinciperna för ett språkutvecklande arbetssätt, att stötta elevernas förståelse, och här speciellt deras förståelse av matematisk text.

Avslutning

Det finns en skillnad i vilka förväntningar vi har på elevernas språk när de kommunicerar sin skriftliga lösning på uppgiften om staketet, där förståelsen av mönstret står i fokus, jämfört med beviset av topptriangelnsatsen, där matematikens begrepp och symboler står i fokus. Vinsten med att tillåta informellt språk vid skriftlig lösning av uppgiften om staketet är att språket inte riskerar att bli ett hinder för en elev som har det matematiska mönstret klart för sig. Men för att stötta elevers utveckling av matematikspråket, som i lektionen om topptriangelnsatsen, krävs att läraren först själv tar reda på vilka ord och symboler eleverna behöver kunna. Den här lektionen anknyter till första fasen i Cirkelmodellen för språkutveckling. Cirkelmodellen kommer att presenteras i modulens del 3.

Språk och kommunikation ses av många forskare som en viktig del i matematikundervisningen och utvecklingen av matematisk kunskap. Att lära sig matematik är också att lära sig matematikspråket. Istället för att undvika svåra ord och uttryck behöver eleverna få möjlighet att utveckla sin språkliga förmåga. Om undervisningen ska bidra till att eleverna utvecklar förmågan att kommunicera matematik och förstå och använda matematikens ord, begrepp och symboler behöver läraren planera undervisningen så att det finns gott om tillfällen för eleverna att göra detta.

Referenser

Hegarty, M., Mayer, R. E. & Monk, C. A. (1995). Comprehension of arithmetic word problems: A comparison of successful and unsuccessful problem solvers. *Journal of Educational Psychology*, 87(1), 18–32.

Möllehed, E. (2001). *Problemlösning i matematik: en studie av påverkansfaktorer i årskurserna 4-9*. (Doktorsavhandling). Lund: Lunds Universitet.

Myndigheten för skolutveckling (2008). *Mer än matematik: om språkliga dimensioner i matematikuppgifter*. Stockholm: Myndigheten för skolutveckling.

Skolverket (2011). *Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen för gymnasieskola 2011*. Stockholm: Skolverket.

Sterner, G. & Lundberg, I. (2002). *Läs- och skrivsvårigheter och lärande i matematik*. Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning, Göteborgs universitet.

Németh U. och Riström L. (2015). Lektor i svenska respektive lärare i matematik som har delat med sig av erfarenheter från ett språkprojekt. Huddinge: Östra Gymnasiet.

Österholm, M. (2006). *Kognitiva och metakognitiva perspektiv på läsförståelse inom matematik*. (Doktorsavhandling). Linköping: Linköpings universitet.