Skolverket

Matematik – Grundskola åk 1-9
Modul: Språk i matematik
Del 2: Matematikspråket

Matematikspråket

Anette de Ron, Stockholms universitet

Med matematikspråket menar man de ord, begrepp, symboler, bilder och fraser som bygger upp matematisk kommunikation. Matematikens språkliga och kommunikativa karaktär är en gemensam nämnare för de tre grundprinciperna för ett matematiskt språkutvecklande arbetsätt som presenterades i del 1. Matematik som ett kommunikativt ämne lyfts fram i kursplanen i matematik. Med matematisk kommunikation menas att information om matematiska idéer och tankegångar utbyts med andra (Skolverket, 2011b).

Kursplanens syfte i matematik sammanfattas i långsiktiga mål där det framgår att eleverna ska ges förutsättningar att utveckla förmågan att kunna *formulera* problem, *använda* och *analysera* matematiska begrepp och samband mellan begrepp, *föra och följa matematiska resonemang* samt *använda matematikens uttrycksformer* för att *samtala* om, *argumentera* och *redogöra* för frågeställningar, beräkningar och slutsatser. Språklig förmåga är således av stor betydelse när elever lär sig matematik. I praktiken är ett språkutvecklande arbetssätt i matematik en förutsättning för att eleverna ska kunna utveckla kursplanens långsiktiga mål (Skolverket, 2011a).

Hur fungerar matematikspråket?

Redan tidiga civilisationer utvecklade ett matematiskt kunnande för att lösa praktiska problem och kommunicera dessa med andra. Det kunde till exempel handla om bokföring, astronomi, jordbruk eller konstruktion. Människan har också tidigt haft ett behov av att kommunicera kvantiteter eller former och har då skapat ord för att kunna göra detta. En drivkraft bakom utveckling av matematiken har varit människans behov av att använda den för nya ändamål. Matematiken har också utvecklats i växelspel mellan uppfinningar och upptäckter. Ett exempel är passaren, vilken har gjort utforskandet av cirklar möjliga.

Man kan säga att matematiken är konstruerad och kommuniceras med hjälp av matematiska resonemang. Om man exempelvis vid första anblicken inte kan lösa ett matematiskt problem så kan man kanske resonera sig fram till en lösning med hjälp av sådant man redan vet eller med hjälp av andra. (Läs mer om matematiska resonemang i modulen Taluppfattning och tals användning.) Om elever som inte behärskar ekvationslösning ställs inför likheten $25 – 2x = 15 / 3$ kan de kanske ändå komma fram till värdet av det obekanta talet. Det kan de göra genom att ta hjälp av sådant de redan vet om de matematiska symbolernas betydelse och prioriteringsreglerna. En form av matematiskt resonemang kan ses i ett matematiskt bevis, ett resonemang där varje steg utgår ifrån tidigare bevisade påståenden, ibland till och med från axiom och definitioner. En av svårigheterna med matematiska redovisningar är för eleven att veta vad som anses som redan bevisat, en annan svårighet är att veta vad som behöver berättas eller inte.

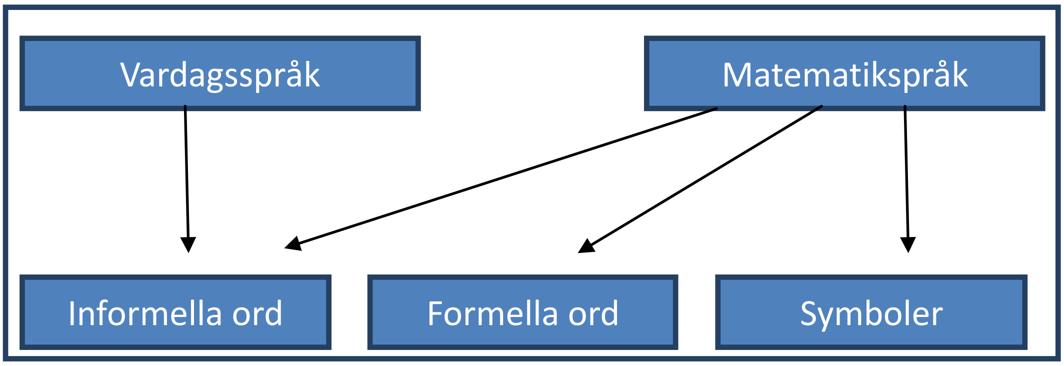
Att lära sig matematik är också att lära sig ett ämnesspråk. De matematiska orden och användandet av matematiska symboler bygger till stor del på abstraktioner och generaliseringar. Symbolen för talet 3 säger ingenting om man inte är införstådd med den abstrakta idén att symbolen representerar ett visst antal eller en viss plats i en ordning. Ett annat exempel är den räta linjens ekvation, $y = kx + m$. Ekvationen är i sig en generell beskrivning av alla funktioner som kan representeras av en rät linje. Men ekvationen omfattar samtidigt abstraktioner där varje symbol har en speciell betydelse. Ska grafen konstrueras talar till exempel bokstaven m om vilken som är linjens skärningspunkt med y-axeln. Ska ekvationen beskrivas med vardagligt språk kan bokstaven m som exempel berätta om startvärdet, till exempel framkörningsavgiften vid en taxiresa.

Matematikens terminologi kan vara hierarkiskt ordnad. Ett exempel på det är begreppet triangel, som avgränsar trianglar från månghörningar i allmänhet. Månghörningar i sin tur är en avgränsning från andra geometriska objekt. När man använder begreppet triangel är det inte en speciell sorts triangel man menar utan alla trianglar. En sådan generalisering är praktisk när man till exempel resonerar om vinkelsumman i trianglar. När man däremot ska identifiera och jämföra olika trianglars egenskaper används mer precisa begrepp som rätvinklig, likbent och liksidig triangel. Ordvalet bör alltså göras utifrån vilken precision som är lämplig i en viss situation eller ett visst sammanhang.

Matematikspråkets olika delar

En av grundprinciperna som presenteras i del 1 är att göra det matematiska innehållet begripligt genom sammanhang. För att kunna abstrahera, resonera och bygga upp mer komplex matematik krävs att eleven kan och behärskar matematikspråket, de speciella ord, begrepp, symboler, bilder och fraser som ger betydelse och precision i matematiken. Abstrakt innehåll i matematiken kan göras begripligt genom att det kopplas till ett sammanhang så att eleven får hjälp att förstå hur matematiken kan uttryckas och förstås i just den situationen eller det sammanhanget. Att lära sig matematikspråket handlar om att lära sig de matematiska begreppen och symbolerna men också om att veta i vilka situationer matematikspråket kan och bör användas. Det är betydelsefullt att eleverna kan tillämpa matematikspråket i olika situationer och att de även kan beskriva vardagliga situationer med hjälp av matematikspråket.

I del 1 presenterades en *Språkkarta* över de olika delarna av matematikspråket och vilken relation de har till vardagsspråket. Figur 2 visar delar ur den språkkartan.



Figur 1. Delar ur Språkkarta av Kindenberg och Ramsfeldt (2016), fritt efter Hajer & Meestringa (2014).

Man kan betrakta de olika delarna av matematikspråket: informella ord, formella ord och symboler som olika ordförråd eller register i matematikspråket.

Matematik kan uttryckas på olika sätt. Mycket i matematiken kan beskrivas med hjälp av informella ord vilka ofta sammanfaller med det vardagliga språket. Exempel på informella ord är fler, färre, mer, mindre, kant och räkna ut. I matematikspråket använder man också formella ord vilka inte så ofta förekommer i det vardagliga språket. Exempel på sådana ord är nämnare, mantelyta och algebra. Man kan exempelvis beskriva en situation där två barn delar på frukter. Med informella ord från det vardagliga språket kan det uttryckas: *Aisha och Lisa har sex äpplen. De vill dela på äpplena så att de får lika många var. De får då tre äpplen var.* Om man i detta exempel istället skulle använda formella ord från matematikspråket skulle det bli: *Sex dividerat med två ger kvoten tre.* Eller uttryckt med matematiska symboler: 6 / 2 = 3.

Man kan också med informella ord från det vardagliga språket beskriva en form med fyra lika långa sidor och räta vinklar som en fyrkant. Formen fyrkant skulle med ett formellt ord istället heta kvadrat eftersom detta är det matematiska ordet för en fyrhörning där sidorna relaterar till varandra på det matematiskt definierade sätt som beskrivs ovan. De formella matematikorden hjälper oss att beskriva, i detta fall, kvantiteter (antal äpplen) och geometriska former (en form med fyra sidor) med stringens.

Det finns ord som har olika betydelser i det vardagliga språket jämfört med matematikspråket. Exempel är ord som bråk, funktion och rot. Ord som kan vara kända av eleven i sin vardagliga betydelse men kanske inte när eleven stöter på orden i sina matematiska sammanhang. Nedan finns några exempel på ord som har dels en vardaglig dels en matematisk betydelse.

Ord som används i matematiken	**Vardaglig betydelse**
Bråk	Konflikt
Teckna	Rita
Axel	Kroppsdelen axel, namnet Axel
Rot	Växtens rot

Matematikspråket skiljer sig från ett vardagligt språk och från språk i andra ämnen genom sina specifika ord, konventioner, begrepp och symboler. En utmaning för läraren är att synliggöra och skapa förbindelser mellan det vardagliga språket och matematikens informella, formella och symbolspråk så att eleverna kan använda ett lämpligt språk i olika sammanhang. Undervisningen behöver ge möjlighet att erövra matematikspråket. I matematikundervisning är det både naturligt och nödvändigt att använda alla de tre delarna av matematikspråket. Det är betydelsefullt att arbeta med informella ord, formella ord och symboler parallellt till exempel genom att översätta matematiska uttryck till en vardagshändelse. Abstrakt innehåll i matematiken kan göras begripligt genom att det kopplas till ett vardagligt sammanhang för att hjälpa eleven att förstå hur matematiken kan uttryckas och tolkas i den situationen eller det sammanhanget.

För elever med svenska som andraspråk kan det också vara ett sätt att närma sig det svenska språket. Att använda olika delar av matematikspråket skapar goda förutsättningar för alla elever att få en djupare förståelse för matematikens ord och begrepp. I samband med ett sådant arbete berörs de tre grundprinciperna för ett språkutvecklande arbetssätt: principen om att undervisa genom sammanhang, principen att främja aktiv språkanvändning och principen om att ge språklig stöttning genom att ge eleverna verktyg att ta sig an kognitivt utmanande matematiska texter och uppgifter.

Signalord

En orsak till att elever gör fel när de löser textuppgifter i matematik är att de inte förstår själva innebörden i texten (se exempelvis Möllehed, 2001 eller Parszyk, 2009). Detta kan leda till att de har svårt att välja rätt räknesätt eller räkneoperation. Ibland tycks också elever utföra godtyckliga beräkningar med de tal de hittar i textuppgiften mer för att kunna ge ett svar på uppgiften än för att ha en lösningsstrategi. I en studie av Magnus Österholm (2004) upplevde elever i gymnasiet det som lättare att läsa matematiktexter utan symboler än med symboler. Han menar att detta kan bero på att om symbolerna finns med i texten så flyttas fokus från innehållet. Texten läses då på ett mer mekaniskt eller ytligt plan än om man fokuserar på innehållet. Elever som läser textuppgifter på detta sätt försöker leta i texten efter symboler eller nyckelord som de hoppas ska ge en ledtråd till vilket räknesätt eller räkneoperation som ska användas (Sterner & Lundberg, 2002).

I matematikdidaktik benämner man ibland dessa nyckelord ”signalord”. Med detta menas ord i textuppgifter som signalerar ett visst räknesätt för eleverna. Ofta förekommer signalorden i samband med jämförelser av något slag. Ord som mer, längre, vinner, tyngre, ökar och tjänar förknippar elever ofta med addition, medan ord som yngre, kortare, billigare och lättare förknippas med subtraktion. Elever som hastigt läser igenom uppgiften för att snabbt komma igång med att räkna överanvänder ofta strategin att leta efter signalord i texten. Hittar de ordet ”vinner” i texten så drar de kanske slutsatsen att de ska använda sig av addition när de löser uppgiften.

Det är inte alltid som signalorden används på det sätt många elever är vana vid. Då krävs det en mer noggrann analys av texten för att signalordet ska tolkas och modelleras matematiskt korrekt. (Malmer, 2002; Myndigheten för skolutveckling, 2008). I uppgifterna nedan ger inte signalorden de ledtrådar man kan förvänta sig.

Ali spelar kula och vinner 12 kulor. Han har då 30 kulor. Hur många kulor hade han från början?

Ordet vinner, som många elever förknippar med addition, riskerar att vilseleda eleverna om de inte förstår värdet i att analysera texten utan bara kombinerar siffror och signalord slentrianmässigt.

Louise är 9 år. Hon är 5 år yngre än Kim. Hur gammal är Kim?

Här är det ordet yngre som riskerar att leda in eleverna på subtraktion istället för addition.

Ett dataspel kostar 40 kronor mer i affär A än i affär B. Hur mycket kostar dataspelet i affär B om det kostar 570 kronor i affär A?

Uttrycket ”mer än” signalerar ofta att det är räknesättet addition som ska användas.

De tre exemplen ovan visar att signalorden både kan hjälpa och stjälpa den matematiska kommunikationen. Signalorden kan utnyttjas för att uttrycka samma förhållande på olika sätt. Det är därför angeläget att eleverna tränas i att med hjälp av hela texten analysera hur förhållanden beskrivs.

Om man tillsammans med eleverna diskuterar och analyserar signalordens betydelse arbetar man i enlighet med den tredje grundprincipen för ett språkutvecklande arbetssätt - principen om att ge språklig stöttning. Problemlösning får inte reduceras till ”signalordsjakt”. Istället för att enbart leta efter signalord i texten bör fokus ligga på att förstå uppgiftens kontext och innebörden av den beskrivna situationen. Hegarty, Mayer och Monk (1995) undersökte vilka strategier collegestudenter använde sig av för att förstå textuppgifter i matematik. De såg att studenter som löste problem på ett framgångsrikt sätt skapade en meningsfull representation av situationen som problemet beskrev. Detta till skillnad mot studenter som inte var så framgångsrika, vilka i allt för hög utsträckning fokuserade på signalord och symboler. Detta visar på vikten av att ha principen om aktiv språkanvändning för ögonen i matematikundervisningen. Att arbeta med strategier för problemlösning kan underlätta för eleverna att förstå den situation som uppgiften beskriver och därmed innebörden i problemet. Exempel på strategier är att använda laborativt material, rita en bild, göra en lista, dela upp problemet i delproblem eller arbeta baklänges.

Att utveckla matematikspråk

När matematikundervisningen planeras bör eleverna få möjlighete att utveckla och använda informella ord, formella ord och symboler. Planering av undervisning bör utgå från de tre grundprinciper för ett språkutvecklande arbetssätt som beskrevs i del 1.

1. Att undervisa genom sammanhang.
2. Att främja aktiv språkanvändning.
3. Att ge språklig stöttning.

I de exempel som presenteras här utgår planeringen från att eleverna ska arbeta med översättningar mellan de olika delarna av matematikspråket med utgångspunkt i vardagsanknutna situationer.

Exemplen är valda utifrån det centrala innehållet i algebra och algebraiska uttryck. Stadieprogressionen i kursplanen handlar om att i årskurs 1-3 ska eleven använda informella och formella symboler för obekanta tal i en matematisk likhet, i årskurs 4-6 och 7-9 ska eleven se att en bokstav kan beteckna ett obekant tal i enkla algebraiska uttryck för 4-6 och algebraiska uttryck för 7-9. För alla tre stadierna ska de algebraiska uttrycken vara relevanta för eleven, vilket ger att utgångspunkten blir elevnära situationer.

Ett sätt att arbeta med hänsyn tagen till de tre grundprinciperna är att låta eleverna utgå från ett algebraiskt uttryck och beskriva detta med hjälp av informella och formella ord. Detta kan eleverna arbeta med tillsammans eller enskilt, muntligt eller skriftligt beroende på hur man som lärare tänker sig att elevernas matematiska tankesätt och kommunikation bäst kan utvecklas.

Exempel på uttryck för år 1-3: $2 + \blacksquare = 5 + 3$

Exempel på uttryck för år 4-6: $2x$

Exempel på uttryck för år 7-9: $4x + 3(x - 7)$

Eleverna kan också utgå från en situation och beskriva denna med hjälp av informella, formella ord och symboler.

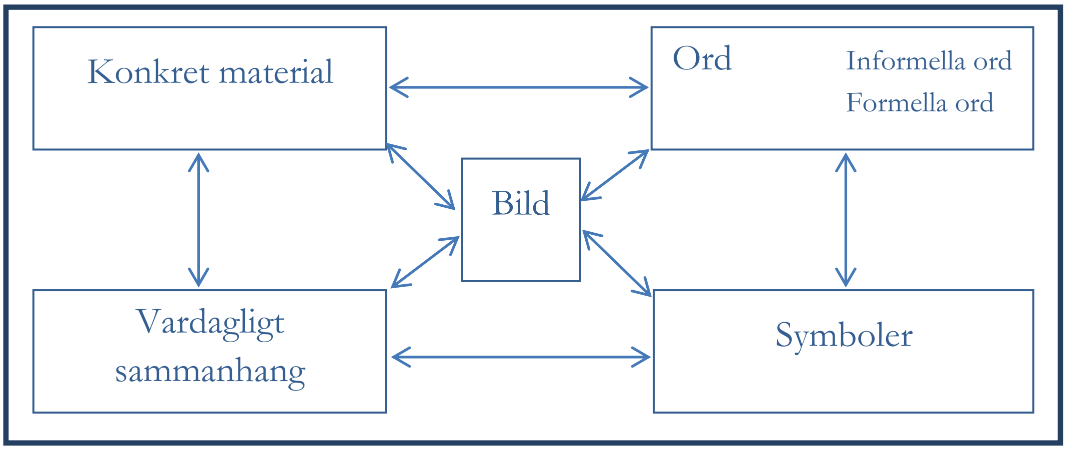
Exempel år 1-3: Lisa har några kulor. Hon får tre kulor till av Ali. Hur många kulor har Lisa nu?

Exempel år 4-6: Alvin får 10 kronor av morfar varje gång han hjälper morfar att diska. Hur mycket har Alvin fått när han har hjälpt morfar 5, 10 respektive 15 gånger?

Exempel år 7-9: Leila samlar på frimärken. Hon har två album fulla med lika många frimärken och dessutom 13 lösa frimärken. Sammanlagt har hon 133 frimärken. Hur många frimärken har hon i varje album?

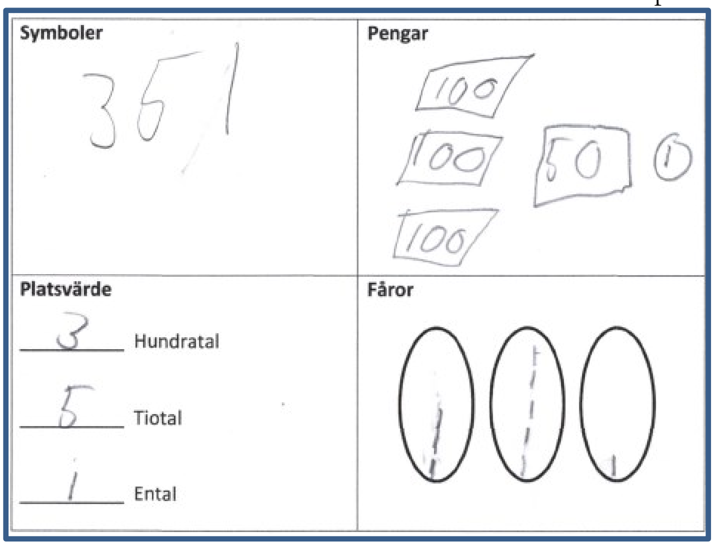
Som stöd i elevernas process kan man använda sig av en bild på en vardaglig situation att utgå från. Bilden får gärna vara rik på ”matematiska inslag” som till exempel en bild från en butik eller på en fartkamera. Det kan ge mer inspiration till eleverna.

Ett annat sätt att arbeta kan vara att låta eleverna översätta och välja olika representationer med hjälp av en ”tanketavla”. Tanketavlan ger en bild av sambanden mellan olika representationer. Idén bakom tanketavlan bygger på Richard Leshs (1987) klassiska schematiska bild över representationer och deras kopplingar till varandra. Figur 2 är en omarbetad variant på uppdelning av de fem representationer som Lesh beskrev.

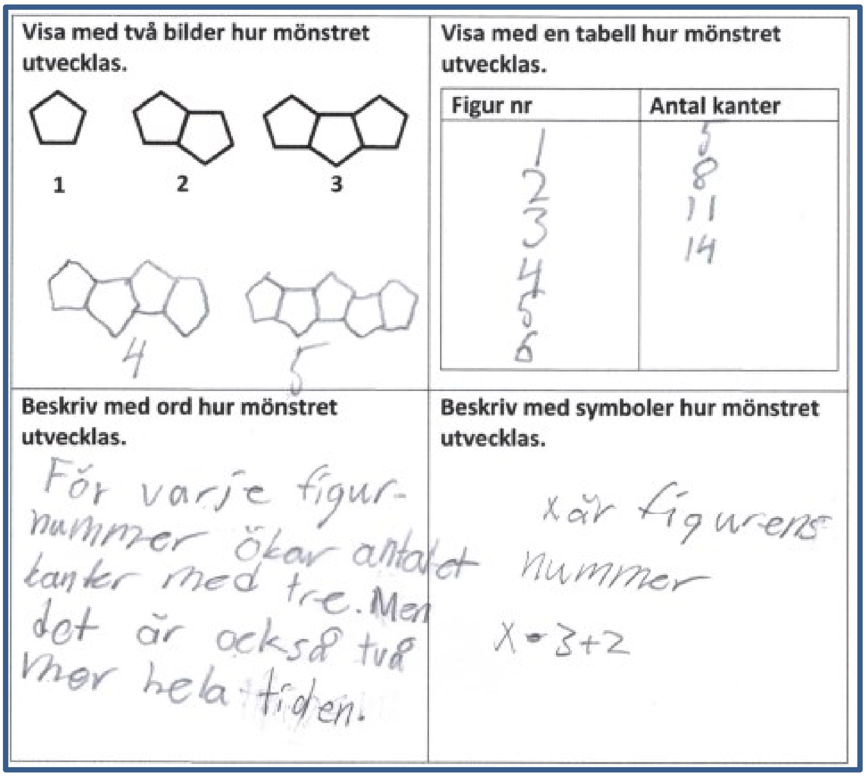


Figur 2. Variant på tanketavla fritt efter Leshs representationer.

Texten ”Tanketavlan” finns som ett separat dokument i denna del av modulen. Där finns beskrivningar av hur organisation av undervisning med stöd i tanketavlor kan gå till. Vad som står i de olika rutorna i tanketavlan (representations-/uttrycksformerna) skiljer sig åt mellan olika modeller och kan också vara olika beroende på elevgrupp, matematiskt område, med mera. I figurerna nedan finns exempel på hur resultatet av arbete med tanketavlor kan se ut. Figur 3 handlar om positionssystemet på lågstadiet och figur 4 om mönster på högstadiet. Läraren har i det första exemplet valt att eleven ska visa ett tal med hjälp av pengar, platsvärde och fåror. I det andra exemplet ska eleven fortsätta mönstret samt beskriva mönstret i tabellform, med ord och med symboler.



Figur 3. Exempel på arbete med tanketavlor i matematik



Figur 4. Exempel på arbete med tanketavlor i matematik.

Avslutning

Språkets betydelse för elevernas kunskapsutveckling i matematik belyses på många ställen i kursplanen. Språk och kommunikation ses också av många forskare som en viktig del i matematikundervisningen. Att lära sig matematik är också att lära sig matematikspråket. Istället för att undvika svåra ord och uttryck kan man ge eleverna möjlighet att utveckla sin språkliga förmåga genom att låta dem möta det nya tillsammans med redan bekanta ord och uttryck. Lärarens utmaning är att skapa förbindelser mellan det vardagliga språket och matematikspråket. Om undervisningen ska bidra till att eleverna utvecklar förmågan att kommunicera matematik och förstå och använda matematikens ord, begrepp och symboler behöver läraren planera undervisningen så att det finns gott om tillfällen för eleverna att göra detta. När eleverna genom undervisningen utvecklar en förtrogenhet med matematikens uttrycksformer och hur dessa kan användas för att kommunicera matematik i vardagliga och matematiska sammanhang så står både språkliga och innehållsliga mål i fokus.

Referenser

Hegarty, M., Mayer, R. E. & Monk, C. A. (1995). Comprehension of Arithmetic Word Problems: A Comparison of Successful and Unsuccessful Problem Solvers. *Journal of Educational Psychology, 87*(1), 18-32.

Lesh, R. (1987). The evolution of problem representations in the presence of powerful conceptual amplifiers. I C. Janvier, (Ed.), *Problems of representation in teaching and learning mathematics*, pp. 197-206. Hillsdale, NJ: Lawrence Earlbaum Associates.

Malmer, G. (2002). *Bra matematik för alla: nödvändig för elever med inlärningssvårigheter.* (2. uppl.) Lund: Studentlitteratur.

Möllehed, E. (2001). *Problemlösning i matematik: en studie av påverkansfaktorer i årskurserna 4-9*. Doktorsavhandling. Lund: Univ., 2001. Malmö

Myndigheten för skolutveckling (2008). *Mer än matematik: om språkliga dimensioner i matematikuppgifter.* Stockholm: Myndigheten för skolutveckling.

Skolverket (2011a). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket (2011 b). Kommentarmaterial till kursplanen i matematik. Stockholm: Skolverket

Sterner, G. & Lundberg, I. (2002). *Läs- och skrivsvårigheter och lärande i matematik. Göteborg:* Nationellt centrum för matematikutbildning, Göteborgs universitet.

Österholm, M. (2006). *Kognitiva och metakognitiva perspektiv på läsförståelse inom matematik*. Doktorsavhandling. Linköping: Linköpings universitet.