Begrepp och representationer

Helena Roos, Linnéuniversitetet och Lena Trygg, NCM

Alla elever har nytta av att kunna se mönster och strukturer i den matematik de möter på lektionerna. Det medför att eleverna kan föra och följa sina egna resonemang med utgångspunkt i det de faktiskt kommer ihåg, istället för att enbart memorera en lång rad regler som kan te sig ganska meningslösa om det inte finns tydliga samband mellan dem.

En förutsättning för att utveckla sin förmåga att se samband är att förstå och kunna hantera matematiska begrepp. Förståelse för begrepp bygger i sin tur på att elever kan använda flera olika representationer av ett och samma begrepp på ett flexibelt sätt och att de obehindrat kan vandra mellan de olika representationerna. Att representera och uttrycka ett matematiskt begrepp på olika sätt och på skilda nivåer är därmed både ett medel och ett mål för att varje elev ska utveckla och få förståelse för begreppen. Det är väl använd tid att ge elever i svårigheter extra stöd och mer tid för begreppsutveckling. Detta för att de ska bli säkra på att gå mellan olika representationer och efter hand kunna upptäcka och förstå samband mellan matematiska begrepp. Att hålla sig till en representation eller ett sätt att lösa en viss typ av uppgifter på kan tyckas bra – ”då kan de i alla fall ett sätt” – men det visar sig allt för ofta leda in i återvändsgränder. För elever som enbart fått möta den traditionella subtraktionsalgoritmen, och kanske klarar den bra så länge det handlar om två- eller tresiffriga heltal med högst någon enstaka tiotalsövergång, blir det betydligt svårare och allt för ofta fel i uppgifter som 30010 – 29998 eller 505,5 – 490,8 jämfört med om eleverna kan lösa uppgiften genom att räkna upp från det minsta talet eller genom att föra ett resonemang på en tom tallinje. Är eleverna dessutom väl medvetna om räknesättens samband kan de också kontrollräkna effektivt.

Vad är ett begrepp?

I grundskolans kursplan för matematik, läroplan och kommentarmaterial såväl som i forskningslitteratur, används ordet begrepp frekvent men många gånger utan att det tydligt skrivs fram vad som menas med ett begrepp. Det lämnas alltså till läsaren att göra sin tolkning av ordet. I Nationalencyklopedin förklaras ordet begrepp med ”det abstrakta innehållet hos en språklig term”. Ett matematiskt begrepp har således ett abstrakt matematiskt innehåll. Ett matematiskt begrepp är inte för evigt definitivt, exakt, absolut och klart avgränsat – tvärtom kan det förändras och utvecklas över tid i takt med att matematiken och dess användning utvecklas. Begrepp är mänskliga tankekonstruktioner och kan betraktas som matematikens byggstenar. Ett matematiskt begrepp kan vara ett matematiskt *objekt* som en kvadrat, en *process* som subtraktion eller en *egenskap* som volym. Med exempelvis begreppet addition avses det abstrakta innehåll vi lägger i benämningen addition eller med andra ord – vad vi menar med addition.

Eftersom ett matematiskt begrepp är en tankekonstruktion behövs någon form av ”etiketter” för att vi ska kunna kommunicera med och om det. Begreppet måste uttryckas på något sätt och därmed representeras visuellt, verbalt eller i handling. Det är i praktiken sällan uppenbart vad som kommer först – själva begreppet eller olika sätt att uttrycka det, det vill säga att representera det. Tänk på begreppet *stambråk*. Å ena sidan kan man definiera stambråk med en exakt matematisk beskrivning som ”bråk som har täljaren 1”. Å andra sidan stöter elever på stambråk och utforskar dess betydelse långt innan de kan sägas ha en färdig abstrakt idé om vad det betyder. De erfar olika representationer av stambråk, som *det är en halvtimme kvar*, *det går åt en kvarts liter mjölk*, *en femtedel av eleverna cyklar*, *Kari vann med en hel tiondel i slalomtävlingen*, innan de förstår själva begreppet. När eleverna arbetar med begrepp i skolan behöver deras tidigare erfarenheter därför beaktas och kopplas till undervisningen kring det aktuella begreppet. Som ett stöd för lärares planering kan följande begreppstavla användas (Figur 1).

Figur 1. Exempel på begreppstavla.

Begreppen representeras med hjälp av olika representationer

Representation av begrepp kan ske med ord, bilder och andra symboler, eller med situationer och olika konkreta material.

Begreppens egenskaper och definition

I det här sammanhanget betraktas egenskaper synonymt med vilka kännetecken eller vilken beskaffenhet ett begrepp har. Vilka egenskaper hos begreppet som ska tas upp beror på undervisningens syfte och mål. Elevernas förkunskaper och tidigare erfarenheter av begreppet pekar på vilka (extra) anpassningar läraren bör göra. En egenskap hos addition är att det inte spelar någon roll i vilken ordning talen adderas, kommutativa lagen, och det är giltigt inte bara för positiva heltal utan även för decimaltal och negativa tal. I en definition försöker man så exakt som möjligt att precisera vad som utmärker det aktuella begreppet, så att det också går att särskilja från andra begrepp. Egenskapen att en differens inte ändras om båda termerna flyttar lika många steg (12 – 8 = 10 – 6) kan exempelvis ingå i en grundläggande definition av begreppet subtraktion och kan visas vara giltigt även för tal i decimalform

(1,2 – 0,8 = 1,0 – 0,6). De matematiska begreppens egenskaper kan också fastställas genom att man genomför ett bevis, till exempel visar att summan av tre konsekutiva tal är delbar med tre, även det giltigt för tal i decimalform.

Relationer till andra begrepp

Varje matematiskt begrepp relaterar *direkt* till andra matematiska begrepp. Det finns exempelvis en stark relation mellan stambråk och övriga egentliga bråk (bråk där täljaren är mindre än nämnaren). Begrepp kan även med fördel *jämföras* och en aktivitet att ofta återkomma till är att göra eleverna uppmärksamma på vad som är lika och vad som skiljer. När bråk och tal i decimalform jämförs på en tallinje, som 1/5 jämfört med 0,5 eller 1/7 jämfört med 0,7 kan elever exempelvis se att de siffror som ingår i talen (5 respektive 7) inte direkt hjälper till att avgöra hur talen förhåller sig till varandra. Ett begrepp kan också ha vagare eller kanske inte lika synligt *samband* med andra begrepp. Decimaltal ingår ofta i beskrivningar av längder. 2,75 m utläses ofta som ”två å sjuttiofem” men bör uttalas som två meter och sjuttiofem centimeter. I de fall då lärare märker att en elev har ”öar av kunskap” kan det vara ett tecken på att eleven inte uppfattar samband mellan olika begrepp.

Begreppsutveckling

Begreppsutveckling kan ses som en pågående process för att successivt upptäcka och lära sig vad som är gemensamt eller utmärkande för ett begrepp. När små barn lär sig vad som är karaktäristiskt för det som kan betecknas med begreppet stol eller elever lär sig känna igen begrepp som addition eller omkrets, är det exempel på begreppsutveckling. Det handlar om att förstå ett begrepp i en sådan mening att man obehindrat kan använda sig av det i rimliga sammanhang. Redan i förskolans läroplan (2016) talas det om förmåga att *urskilja, uttrycka, undersöka* och *använda* matematiska begrepp. Elever lär sig allt eftersom att urskilja och formalisera begrepp ju mer erfarna de blir och desto mer undervisning de får. Begreppen förfinas, nyanseras och ges en alltmer exakt och precis innebörd och kan relateras till ännu fler begrepp. Genom god undervisning och möjlighet till många diskussioner om hur eleverna uppfattar olika matematiska begrepp, kan de förfina och nyansera sin bild av begreppen. Det är ett skäl till varför det är betydelsefullt att avsluta lektioner eller aktiviteter med att låta eleverna sammanfatta vad de har upptäckt, uppfattat eller kanske inte förstått. Ibland är det diskussion i helklass som gör att missuppfattningar lyfts fram och kan förebyggas eller att elever ser samband, vid andra tillfällen kan enskilda bildmässiga eller skriftliga dokumentationer vara mer fördelaktiga. Huvudsaken är att ”säcken knyts ihop” på något sätt. Det är ofta svårt att ändra en felaktig bild av ett begrepp som har blivit befäst, som när elever fått missuppfattningar som ”det blir alltid större när man multiplicerar” eller ”det finns bara ett tal mellan 2 och 4”.

I forskning och diskussion kring lärande är Lev Vygotskijs teori om begreppsutveckling ett fundament. Hans teorier handlar om begrepp i en vidare och mer generell mening, inte specifikt matematiska begrepp, men tankarna är direkt överförbara till detta sammanhang. Vygotskij menar att begrepp hjälper till att systematisera och att hålla ordning i det sociala och materiella kaos som råder runt oss. Begrepp speglar den underliggande teorin om hur

ting kan grupperas, hur de hänger samman, vilka förhållanden de har till varandra och vilka gemensamma egenskaper som finns. Att lära sig ett begrepp betyder således att olika erfarenheter av begreppet binds samman och att förstå grundprinciperna samt relationen till andra begrepp. Elever i matematiksvårigheter kan ha svårt att binda samman olika erfarenheter av begrepp för att förstå grundprinciperna. Undervisningen behöver lyfta fram kopplingar mellan erfarenheter av ett begrepp och synliggöra sambanden, exempelvis med stöd i den tidigare beskrivna begreppstavlan. Elevers egen dokumentation kan anpassas så att den enskilde elevens begreppsutveckling blir synlig för såväl eleven själv som för läraren som i sin tur kan använda dokumentationen i formativt syfte. Då kan elevens kunskap om ett begrepp lagras i långtidsminnet och skapa befäst förståelse, istället för att korttidsminnet belastas med en mängd enskilda och isolerade faktauppgifter.

Språk och begrepp

I matematikundervisningen behöver formellt matematikspråk uppmärksammas och diskuteras i relation till informellt vardagligt språkbruk. Målet är att eleverna ska utveckla sitt formella matematikspråk och förstå skillnader och likheter med det vardagliga språket. Dock är det viktigt att beakta att elever inte alltid har ett vardagsspråk kopplat till ett begrepp, men de kan ändå utveckla ett matematiskt språk. Här bör läraren vara noga med att inte överbelasta för en enskild elev som utvecklar sitt vardagsspråk samtidigt med sitt matematiska språk.

Elever har olika förutsättningar och bakgrund. Detta gör att det är stor variation i klassrummet gällande kunskap om och förståelse för begrepp. Idag kan skolan behöva ta ett större ansvar – jämfört med tidigare – att ge elever möjligheter att utveckla begrepp, både vardagliga och vetenskapliga och relationer däremellan. Några områden som bör uppmärksammas extra är tid och massa/vikt som idag blir allt mer abstrakta begrepp på grund av den digitala utvecklingen. Lärare bör även reflektera över användandet av pengar som representation, då pengar i sig är en abstraktion med både värde och antal, samt att pengar i form av sedlar och mynt inte alls används i samma utsträckning som tidigare. Om elever ska skapa förståelse för formella matematiska begrepp måste de få erfarenheter av begreppet. Ett sätt att skapa erfarenheter är att presentera begrepp på olika sätt i undervisningen och medvetet använda både vardagliga och matematiska ord. Då kan elever och lärare skapa ett gemensamt språk och gemensamma referensramar som läraren sedan kan bygga den fortsatta undervisningen på. Vid aktivt arbete med diskussioner kring ord och begrepp kan eleverna själva upptäcka nya ord och utöka sitt ordförråd i relation till matematiska begrepp. Här kan frågor som *Vad heter ...? Vad betyder ...? Hur kan man förklara ...? Finns det något annat ord för ...? Varför heter det ...?* vara till god hjälp vid elevdiskussioner, i undervisningssituationer och då eleverna själva dokumenterar sitt lärande.

Medvetenhet om språkets betydelse blir särskilt viktigt vid undervisning i mångkulturella grupper, där lärare och studiehandledare behöver vara explicita med att definiera matematiska begrepp och även diskutera begreppen tydligt så eleverna förstår nyanserna i begreppen. Eleverna måste förstå att matematiska begrepp kan ha en helt annan betydelse i en annan kontext, till exempel betyder ett bevis en sak i en tv-deckare och en annan sak i

matematik, och begreppet volym som betyder en sak i samband med musik betyder vanligtvis något annat på en matematiklektion. Det går inte att ta för givet att eleverna förstår nyanserna i begreppen, utan en tydlig undervisning behöver behandla dessa begrepp så att alla elever förstår de underförstådda skillnaderna för att öka deras tillgänglighet till matematik.

Representationer

Lärande i matematik kan beskrivas som en kumulativ process där eleverna stegvis får tillgång till allt fler och mer avancerade representationer och förstår hur de hör samman, hur de kan användas och hur de kan uttryckas. Att kunna beskriva och använda ett begrepp på flera sätt med olika representationsformer är tecken på god begreppsförmåga och funktionell begreppskunskap. För att kunna tänka på och kommunicera ett matematiskt begrepp måste det vara representerat på något sätt eftersom matematiska objekt i sig är abstrakta. För att beskriva detta förekommer i Sverige orden uttrycksformer, representationer och representationsformer, ibland synonymt och ibland läggs lite olika betydelse in i dem. I matematikdidaktisk litteratur används främst ordet representationer för att beskriva hur ett matematiskt begrepp kan kommuniceras.

Vad är representationer?

En representation är något som med avsikt används eller utformas för att i tanke, handling eller kommunikation *ersätta* det man syftar på. Ett matematiskt exempel är att vi använder siffror när vi arbetar med tal. Siffran står där *istället* för själva talet som man inte kan se, men som man förväntas associera till. Tecknet ”3” är en symbol för talet tre, medan tecknet ”π” är symbol för ett irrationellt tal lite större än tre. Tecknet är som ett ”namn” på begreppet pi och bokstaven π förekom som symbol för talet π för första gången år 1706 (Kiselman & Mouwitz, 2008). En representation kan alltså vara en symbol, en bild, ett objekt eller något annat som representerar ett matematiskt objekt. Andra exempel på detta är symbolerna 1 och 0 eller fem prickar på två tärningar. Båda fallen representerar talet tio, men med två olika former av representation, symboler respektive bild. Ett sätt att beskriva dessa former är att dela in dem i olika register som innehåller en uppsättning representationer som är nära relaterade till varandra. Ett exempel på ett sådant register är det ikoniska registret som innehåller skisser, bilder och mönster. Ett annat är det symboliska registret som innehåller symboler så som siffror, olika matematiska tecken och bokstäver.

Definitioner av begreppet representation kan variera något i ordalydelse men det handlar alltid om att representationer ersätter något och står i stället för något annat och att varje form av representation i någon grad är en abstraktion. Representationer kan dessutom ha dubbla roller, de kan ses som en konkretisering av abstrakta matematiska begrepp samtidigt som de representerar verkliga objekt. Ett laborativt material som markörer kan fungera som en konkret modell för abstrakta tal när de används för att visa relationen mellan exempelvis jämna och udda tal. De kan även användas för att modellera verkliga situationer, som när ett visst antal markörer representerar motsvarande antal föremål eller personer.

Varför ska elever arbeta med representationer?

Av tradition har representationer i form av symboliska uttryck länge varit en dominerande del av skolmatematiken. I undervisningen framstår representationer olyckligtvis ibland som att de är helt fristående. Tidigare var det inte ovanligt att det på ett prov stod tydligt framskrivet med vilken representation en uppgift skulle lösas, exempelvis visa i ett stolpdiagram eller ställ upp en tabell. Ett sådant synsätt innebär att kraften och nyttan med representationer som redskap för lärande i matematik begränsas. Idag är det mer vanligt att elever uppmuntras att visa med flera olika representationer hur de löser en uppgift eller då de förklarar hur de uppfattar ett begrepp.

För att kunna hantera olika representationer av matematiska förhållanden behöver en elev kunna *förstå* representationen, det vill säga kunna avkoda och tolka vad den avser att ersätta, *använda* sig av olika slags representationer av matematiska begrepp som exempelvis är visuella, verbala, symboliska, algebraiska, geometriska, grafiska, i form av diagram och tabeller eller konkreta objekt. Eleven behöver även kunna uppfatta inbördes *kopplingar* och *samband* mellan olika representationsformer och ha kännedom om deras styrkor och svagheter samt kunna *välja* bland och *översätta* mellan olika representationsformer beroende på situation och syfte. Denna korta sammanfattning visar tydligt hur komplext det är att lära sig använda representationer på ett fruktbart sätt. Det tar mycket tid och möda för alla elever och elever i matematiksvårigheter behöver allt stöd de kan få för att kunna bringa ordning och kunna använda olika representationer som ett stöd i sitt lärande. Ett övergripande och medvetet fokus på att lyfta fram olika slags representationer och att anpassa dem på olika sätt till olika elever kan underlätta för att få alla elever inkluderade i matematikundervisningen.

Det är med andra ord nödvändigt att använda olika former av representationer i undervisningen för att nå varje elev. Eftersom förståelse för olika former av representationer och översättning mellan dem är avgörande för att lära sig matematik, kan man till och med säga att lärande sker när elever kan vandra mellan olika register. Många elever är mer bekväma med att översätta mellan representationer inom ett och samma register än mellan olika register. För elever som är vana att hantera laborativa material kan det vara enklare att visa 3/5 (tre femtedelar) som 3 dl i ett halvlitersmått eller 6 dl i ett litermått, märka upp ett snöre i fem delar och klippa bort tre av dem eller lägga fram fem knappar där tre av dem är röda än att skriva 3/5 som 6/10, 9/15 och 30/50. För elever ovana vid att använda konkreta representationer kan det omvända gälla. För båda grupperna kan det uppstå svårigheter om de istället ska göra halvkonkreta representationer och visa med hjälp av illustrationer. Om pizzor är den enda bildmässiga representationen som eleverna har erfarenhet av att använda är det inte alldeles självklart hur olika uttryck för femtedelar enklast representeras. Det är inte heller säkert att alla elever förstår översättningar mellan olika representationer, utan de behöver mycket tydlig vägledning mellan olika former av representation, både inom och mellan olika register. Samtidigt behöver läraren vara vaksam på hur eleverna tar emot undervisningen med hjälp av flera

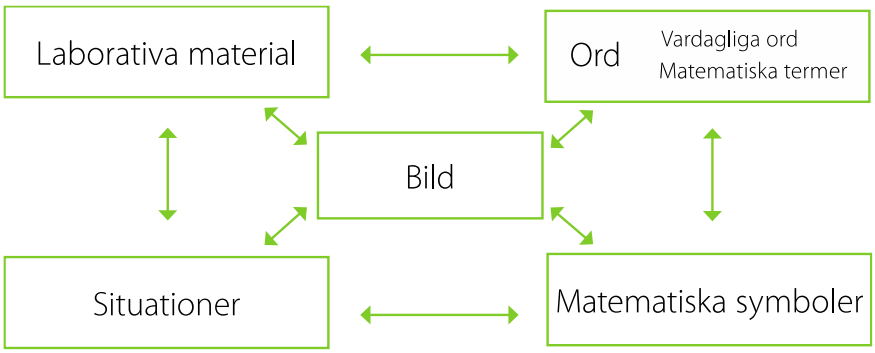
olika representationer så att inte för många olika former av representationer presenteras för tätt inpå varandra och förvirrar istället för att förtydliga.

Betydelsen av att elever ges möjlighet att möta och arbeta med olika representationer i matematikundervisningen återspeglas tydligt i aktuella styrdokument. I kursplanen för matematik skrivs det fram att en förmåga som eleverna ska utveckla är att ”använda matematikens uttrycksformer för att samtala om, argumentera och redogöra för frågeställningar, beräkningar och slutsatser.” Detta exemplifieras i kommentarmaterialet till kursplanen i matematik:

> *När det gäller förmågan att använda matematikens uttrycksformer för att kommunicera är utgångspunkten i de tidigare årskurserna enkla beskrivningar av tillvägagångssätt med konkret material, bilder, symboler och andra matematiska uttrycksformer.*
>
> *I senare årskurser och på de högre betygsnivåerna ställs krav på att eleven beskriver tillvägagångssätt med mer precisa och välutvecklade matematiska uttrycksformer och ökad grad av anpassning till syfte och sammanhang.*

Därför räcker det inte att enbart räkna med siffror och bokstäver i en lärobok utan eleverna måste under hela sin skolgång få arbeta med fler representationsformer som att

- undersöka med laborativa material, ”penna och papper” eller digitala hjälpmedel
- med ord (vardagliga ord och matematiska termer) tala och skriva matematik
- använda bildspråk, med allt ifrån egna informella skisser till professionellt framtagna illustrationer
- exemplifiera med hjälp av verkliga och fiktiva situationer i närmiljö och omvärld
- beskriva sina tankegångar med hjälp av, för kunskapsnivån lämpligt, matematiskt symbolspråk.



Figur 2. Fem uttrycksformer. Bilden är en omarbetad uppdelning utifrån Richard Leshs schematiska bild över representationer och deras kopplingar till varandra.

I Figur 2 omfattar *Ord* både informellt vardagsspråk och formella matematiska termer. Både *Ord* och *Symboler* kan förekomma i såväl tal som skrift. Ett sätt att tolka den omarbetade bilden (Figur 2) är att se på den från vänster till höger, där tanken då är att representationerna i någon mening går från det konkreta via bilder till det allt mer abstrakta. Man kan också välja andra sätt för uppdelning och benämning, som exempelvis fysiska, bildliga eller grafiska, verbala, numeriska och symboliska uttrycksformer.

Idéerna om att matematiklärandet utvecklas genom elevers möte och arbete med olika representationer har funnits länge och utvecklas fortfarande. I många studier refereras till den amerikanske psykologen Jerome Bruners (1966) tre representationsnivåer som beskriver en progression från en handlingsbaserad konkret nivå till en symbolisk och abstrakt nivå:

1. På den *handlingsbaserade* nivån är eleven fysiskt aktiv; manipulerar, konstruerar eller arrangerar föremål från den verkliga världen. Denna nivå är den mest konkreta och här grundläggs begreppen, men de existerar bara så länge eleven kan relatera dem till den verkliga världen. Om eleven får möjlighet att utveckla begreppen kan dessa så småningom bli abstrakta och funktionella då eleven når den symboliska nivån.
2. Den *bildmässiga* eller *ikoniska* nivån identifieras genom att den representerar händelser i den verkliga världen genom beskrivande former som till exempel verbala formuleringar eller bilder av olika slag.
3. Den *symboliska* nivån är den mest sofistikerade och bygger på att eleven, vid lärande av ett givet begrepp, har erfarenheter från de båda föregående nivåerna. Karaktäristiskt för denna nivå är att all manipulation sker med symboler helt oberoende av de handlingsbaserade och bildmässiga representationerna.

Jämför dessa nivåer med de tidigare nämnda registren med olika representationer och skissen ovan. Sätten att se på representationer återspeglar varandra väl. När undervisningen är planerad så att elever hanterar laborativa material, bilder och andra representationer uppstår det ofta diskussioner om matematikinnehållet vid övergångar och översättningar mellan representationerna, vilket kan underlätta för läraren att uppfatta elevers tankegångar och få tillfällen att ”se” hur de tänker. För en elev som kan tyckas ha en välutvecklad symbolisk förståelse kan det vara lätt hänt att hoppa över de två första stegen, men det finns då en risk för att eleven inte har någon bildmässig representation att falla tillbaka på, om eller när svårigheter uppstår på den symboliska nivån. Således bör alla representationsnivåer beaktas på samtliga skolstadier. Detta är giltigt för alla elever men särskilt viktigt för elever i matematiksvårigheter. Ett sätt att undersöka en elevs förståelse för de tidigare nivåerna är att be att han/hon ska konkretisera, till exempel visa ett symboliskt uttryck med en illustration eller ett konkret material.

Representationer, på olika nivåer och i skilda register, som används i lektionsaktiviteter fungerar inte bara som en länk från det konkreta till det abstrakta, de kan också fungera som en länk för att hjälpa elever att tillämpa abstrakt matematik i konkreta situationer. Den dubbelriktade vägen skriver exempelvis Gerald Goldin och Nina Shteingold (2001) fram som en viktig aspekt av representationer (Figur 3). För att stegen mellan konkret och abstrakt ska kunna tas behöver broar byggas i undervisningen och läraren behöver noggrant och medvetet välja aktiviteter och material som gör att elever får möta och använda olika representationer. Om en elev kan lösa ett problem praktiskt och konkret men inte abstrakt och symboliskt behöver eleven få ytterligare stöd att gå från det konkreta mot det abstrakta, men även tillbaka från det abstrakta till det konkreta.

Figur 3. Illustration av dubbelriktad väg mellan det konkreta och det abstrakta (Goldin & Shteingold, 2001).

Hur kan arbete med representationer ske?

Det enda sättet att få befäst tillgång till matematiska representationer är att bli bekant med dem, se dem, känna på dem, prata om dem och använda dem i olika uppgifter. Genom att kombinera olika representationer begränsas eleven inte av styrkor och svagheter i en representation, utan kombinationen kan göra att eleven får stöd i sitt lärande. För att kunna utnyttja fördelarna med flera representationer måste eleven förstå förhållandet eller sambandet mellan dem. Om representationer visas i olika register kan elever med begränsad förståelse för representationer få svårigheter att se deras inbördes förhållanden. Därför bör undervisningen planeras så att olika representationer påvisas och eleverna får erfara relationerna mellan dem så att matematiken blir tillgänglig för alla elever i klassen.

En enskild representation, som ett arrangemang av kuber, en geometrisk konstruktion, ett talmönster, en graf i ett koordinatsystem, en tabell, en ekvation eller en formel, kan inte fungera och vara meningsfull på egen hand utan måste alltid ingå i ett större system där dess mening och konventioner har etablerats. Systemet måste också ha en struktur så att olika representationer är starkt kopplade till varandra. Ett sätt att se på representationer, bland annat för att bättre förstå de kognitiva hinder många elever har då de ska tillägna sig vissa matematiska begrepp, är enligt Goldin och Shteingold att dela in dem i externa och interna representationer:

- *externa representationer* utgår från matematikens konventionella symbolspråk, till exempel sättet att notera i tiobassystemet, den formella algebraiska notationen och hur tallinjen och koordinatsystem används
- *interna representationer* är exempelvis elevens personliga symbolkonstruktioner, eget språk, visuella bilder och förhållande till matematik.

De framhåller att interaktionen mellan interna och externa representationer är fundamental för ett effektivt matematiklärande; att eleverna får möjlighet att utveckla ändamålsenliga interna representationer som sedan ansluter till de externa representationerna. Jämför med de förklaringar eleverna i modulens inledning gav uttryck för då de skulle beskriva hur deras inre talrad ser ut.

Goldin och Shteingold (2001) ser att det finns möjlighet att öka antalet elever som lyckas väl med skolmatematiken. De menar att elevers begränsningar för att förstå matematik, utan att för den skull förneka existens eller betydelse av olika förmågor, inte i första hand är medfödda. Begränsningarna är snarare ett resultat av att deras inre system av representationer bara är delvis utvecklat och därmed kan medföra hinder, svårigheter och missuppfattningar. De hävdar att ett grundläggande mål för matematikundervisningen är att låta eleverna utveckla effektiva inre representationer som är samstämmiga med de externa representationerna. Goldin och Shteingold tror inte det är en tillfällighet att matematikdidaktiker redan tidigt var överens om att matematiska idéer bör introduceras genom att undervisningen börjar i konkreta representationer och sedan går vidare till allt mer abstrakta representationer. Idag visar exempelvis den så kallade Singaporematematiken att det går att nå goda resultat då matematikundervisningen tydligt byggs upp med dessa tankar som en av de viktiga grundförutsättningarna.

Tanketavlor

En tydlig gång från konkret till abstrakt utgör ofta en god grund vid begreppsbildning, det vill säga då elever möter nya begrepp eller vid begreppsutveckling som när talbegreppet vidgas från heltal till decimaltal och tal i bråkform. En tanketavla (McIntosh, 2008) kan då vara ett använbart redskap. En tanketavla kan förklaras som ett pappersark som delas i fyra delar där varje del får en av rubrikerna Ord, Bild, Beräkning respektive Samband. I mitten ritas en ruta med texten Symboler. I mitten ritas en ruta med texten Symboler. Här ska eleverna använda såväl konkreta, som bildmässiga och abstrakta representationer och de kan vid arbete med tanketavlor själva välja i vilken ordning de ska ta sig an de olika representationerna. Tanketavlorna kan också fungera som ett redskap för att analysera elevers kunnande eftersom svårigheter att gå mellan olika representationsformer kan vara ett tecken på bristande förståelse. Tanketavlorna kan även vara ett redskap för att analysera om undervisningen har stött elevers lärande inom det aktuella begreppet.

Helheter och delar

Ett ofta förekommande matematiskt begrepp under elevers skolgång, som enkelt kan representeras med konkret material, bilder, situationer, ord och symboler, är ”del av”. För att hantera ”del av”-begreppet vid bråk- och procenträkning är begreppet helhet en ytterst viktig förkunskap. Elever på mellanstadiet vet vad ”en helhet” är, men de kan behöva hjälp att reda ut olika slags helheter, hur de kan delas och få det förtydligat hur helheter och delar hanteras matematiskt. Andemeningen i följande text går till stor del att använda tillsammans med elever i matematiksvårigheter. Ibland fungerar det bättre att samtala med elever om

vad barn gör istället för att ta upp ett innehåll som de själva skulle uppleva som barnsligt och då slå ifrån sig.

Elevers tidiga möten med helheter och delar

Redan i förskolan delar barnen frukt och de förstår tidigt att en halv banan är större än en halv vindruva. Till och med en fjärdedels banan är mer än en hel vindruva. Barnen behöver sedan fortsätta att möta delar av olika helheter. De flesta barn tycker säkert att ett halvt äpple eller en halv apelsin mättar lika bra, men de flesta skulle inte nöja sig med en halv vindruva och inte heller vilja äta upp en halv vattenmelon själv. Liknande resonemang förs om både annan slags mat (pizza och tårta!) och dryck, och annat som snören, pappersark, modellera, utrymme på en bänk, etcetera. Det är viktigt att lyfta fram vad som är det hela och benämna de olika delarna, och det som är gemensamt för en frukt, ett snöre, en klump modellera och utrymmet på en bänk är att de utgör *kontinuerliga mängder*. I vardagliga sammanhang på denna nivå är det i varje enskilt fall alltid möjligt att ange vad som är det hela och, återigen vardagligt, att se delningen i lika stora delar.

Barn får även tidigt erfarenhet av att dela upp mängder som består av ett antal föremål.

– *Jag får fem vindruvor och du får också fem stycken.*
– *Om vi tre delar kexen lika får vi två var.*
– *Jag har sju knappar: två är blå, tre är röda och två är gröna.*

En helhet som består av ett antal saker utgör en *diskret mängd*. Ordet diskret kommer i detta sammanhang från det engelska ordet 'discrete', åtskild, separat och har inget med diskret lika med försynt eller dämpad att göra. Tänk på "Fem myror är fler än fyra elefanter", då är det enbart *antalet* djur som är av betydelse i jämförelsen.

Fruktdelning sker oftast inte strikt matematiskt korrekt utan handlar för barnen mer om att det ska vara rättvist och de har inga problem med att ge bort en frukt eller en bit som eventuellt blir över. När flaskans bubbelvatten är jämnt upphällt i fyra glas eller när pralinerna är fördelade lika på fyra personer, har varje person fått en fjärdedel av vattenmängden eller antalet praliner. Till vardags använder vi uttryck som att *ta hälften var* och *dela i fyra delar*, men då menar vi inte alltid en *exakt likadelning* som är grunden för att förstå tal i bråkform. Att ordet bråk kommer ur tyskans 'gebrochen', som betyder bruten, är bra att känna till. Tal i bråkform är just tal som brutits i mindre, men lika stora delar, och det måste göras synligt i undervisningen. För att bygga upp förståelsen krävs många och varierade laborativa erfarenheter där konkreta material och bilder används som representationer, där det talade språket är utgångspunkt för samtal och diskussioner och bråkuttryck skrivs med hela ord, till exempel "fjärdedel". På sikt uttrycker vi helheten som 1 och de olika delarna med symboler. Detta behöver lärare ta upp och ofta diskutera på matematiklektioner så elever kommer till insikt att de kan vara lite "vardagligt slarviga" när de delar grejer med varandra – ofta enligt principen att en delar och den andre väljer – men att de måste dela formellt och korrekt när de arbetar matematiskt.

Pratar vi formellt om en femtedel så är det en helhet som har delats i fem exakt lika stora delar. Däremot kan det i praktiken betyda att delarna ser olika ut. I en kontinuerlig mängd kan en femtedels kvadratdecimeter, som alltid är 20 cm^2, ritas som exempelvis en rektangel $4 \cdot 5$ cm^2 eller $2 \cdot 10$ cm^2, eller som en långsmal ruta som är en centimeter hög och två decimeter lång. I en diskret mängd som kulor betyder det att fem barn får lika många kulor var, men de i sin tur kan ha olika färg eller storlek och vara tillverkade i olika material.

Vid likadelning utgör varje del en av antalet delar i helheten eller mängden och till grundläggande förståelse hör insikten att varje del är mindre än helheten och att ju fler delar en helhet delas i desto mindre blir varje del. Detta är resonemang som har vardaglig betydelse för alla elever, ju fler som ska dela på godiset, pengarna eller utrymmet i soffan, desto mindre del till var och en. Vare sig mängden är kontinuerlig eller diskret är det alltid helheten som avgör hur stora delarna blir.

Även när elever har förståelse för att ju fler delar något delas i desto mindre blir varje del, kan missuppfattningen att 1/9 måste vara större än 1/5 eftersom 9 är större än 5 finnas. En vanlig orsak till den missuppfattningen är att elever inte uppfattar ett bråkuttryck som en helhet, *ett* tal, där täljaren anger antalet delar av helheten och nämnaren visar hur många delar helheten är delad i. Bråkstrecket åtskiljer täljare och nämnare, så att förhållandet syns och detta ska alltid ses i relation till den aktuella helheten. Istället ser en del elever två olika tal där täljare och nämnare inte har någon direkt koppling till varandra. Dessa elever hanterar ofta täljare och nämnare var för sig, något som kan bli förödande vid bråkräkning (Figur 4).

Figur 4. Illustration av missuppfattning. Eleven ska, i bråkform, skriva hur stor del av cirklarna som är blå. Eleven jämför antalet blåa och vita, och skriver förhållandet 4/6 istället för att se helheten, det vill säga hela mängden där 4 av 10 är blå.

Division eller bråk

Det kan vara svårt att avgöra om en uppdelning handlar om division eller bråk, oftast är det kontexten som avgör. Oavsett vilket är det även här viktigt att eleverna kommer till insikt om vad som är den hela mängden. Det är intressant att diskutera att resultatet av en division alltid blir detsamma matematiskt, men att det i praktiken kan få olika konsekvenser. 5/2 kan räknas ut som en division till 2,5 eller skrivas om i blandad form som 2 ½. Att dela fem bullar rättvist på två personer är lätt eftersom det är enkelt att skära itu en bulle i två halvor, men motsvarande med fem ballonger är svårare. Det är ingen större glädje med att få en halv ballong. Då är det bättre att blåsa upp den femte ballongen och leka med den tillsammans! En omelett kan delas i tre bitar, mamma äter en stor bit medan storebror äter en ganska stor bit och lillasyster en liten bit. Fullt begripligt vid köksbordet men betydligt

mer svårfångat om det ska uttryckas med formell matematik som i detta fall kanske är 1/2 + 1/3 + 1/6. Denna typ av tankelekar och diskussioner hjälper elever att få grepp om vad som är helhet och vad som är delar, hur de kan representeras och får lov att hanteras. Eleverna behöver sedan efter hand referenspunkter, som exempelvis en halv, en tredjedel och en fjärdedel för att förhålla sig till, bland annat för att förstå den analoga klockan.

Lärare vet att många elever stöter på problem vid bråkräkning och i förlängningen begrepp som relaterar till det, exempelvis procent och algebra. Vardagsanvändning av bråk var mer frekvent förr och sedan kom en tid då det inte var helt ovanligt att elever under sina år i grundskolan fick lära sig att omvandla tal i bråkform till decimaltal. Särskilt då det började finnas vardaglig tillgång till miniräknare kunde det uppfattas som ett enkelt sätt att lösa en del elevers problem med bråk. Även om det var omtänksamt så var det mindre klokt, särskilt för elever som fortsatte studera. Att en elev vet att ½ kan skrivas om som 0,5 är inte alltid till hjälp.

En orsak till att elever är i matematiksvårigheter kan vara att de av någon anledning inte har klarat att ta steget från konkret manipulerande av material till abstrakta symboluttryck. Många elever behöver visuellt stöd av såväl helhet som delar under lång tid, men det visuella stödet får inte begränsas till enbart tårtor eller pizzor utan flera olika representationer behöver användas parallellt. Baka gärna rektangulära pizzor ibland! Laborativa matematikmaterial (exempelvis bråkstavar, bråktavlor och bråkburkar samt deras bildmässiga representationer) bör alltid finnas tillgängliga. Det finns många aktiviteter, spel och problem där samtliga elever behöver tillgång till laborativa matematikmaterial. Används sådana medvetet och finns som en naturlig resurs underlättar det för elever i matematiksvårigheter att ta stöd i konkret material även när flertalet av kamraterna arbetar på en mer bildmässig eller abstrakt nivå.

Samband med stöd i olika representationer

När elever redan tidigt får en grundläggande förståelse för vad ”del av” och ”helhet” är och varför det alltid är viktigt att veta vad som är utgångsläget, hjälper det dem att undvika en rad missuppfattningar. Leder det i förlängningen till förståelse för samband mellan tal i olika talområden och uttryckta på skilda sätt underlättar det oerhört mycket. Eleven behöver inte hålla lika många enstaka fakta i huvudet utan kan istället lita på sin förmåga att se samband och kunna resonera sig fram, ibland helt abstrakt med enbart symbolspråk, ibland med hjälp av mer bildmässiga eller konkreta representationer.

När elever arbetar med olika representationer hjälper det läraren att förstå hur de tolkar och tänker kring det aktuella begreppet. Eleverna måste vara medvetna om, kunna hantera och vandra mellan olika representationer och måste förutom att få möjlighet att utveckla förståelse för styrkor och svagheter i olika representationer också diskutera varför de i vissa situationer väljer en representation framför en annan. Alltså behöver undervisningen vägleda eleverna mellan olika former av representationer. Detta gör lärare till största del med hjälp av språk, vilket betyder att språket både kan vara en muntlig representation och en mediator för att stärka undervisningen. Då läraren besitter kunskap om hur olika

representationer kan nyttjas i förhållande till ett matematiskt innehåll underlättar det för att få alla elever inkluderade i matematikundervisningen och på så sätt öka elevers tillgänglighet till matematik.

Referenser

Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Cambridge, Mass.: Belknap Press.

Goldin, G. & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. I A. Cuoco (red), *The roles of representation in school mathematics* (1–23). Reston, VA: NCTM.

Kieselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. NCM, Göteborgs universitet.

McIntosh, A. (2008). *Förstå och använda tal – en handbok*. Göteborg: NCM, Göteborgs universitet.

Skolverket (2016). *Läroplan för förskolan Lpfö 98* ([Ny, rev. utg.]). Stockholm: Skolverket.