

Problemlösning

Görel Sterner och Lena Trygg, NCM

Problemlösning har länge varit ett angeläget område för forskning som rör elever i matematiksvårigheter (Bottge, 2001). Marjorie Montague (1997) beskriver att nästan varje aspekt av problemlösning kan orsaka svårigheter, men hon beskriver också förutsättningar som kan bidra till att minska svårigheterna. Om läraren muntligt introducerar ett problem i helklass kan en del elever inte hålla det i huvudet så länge att de hinner börja lösa det. Om istället problemet ges skriftligt är det inte ovanligt att elever lägger för lite tid och möda på att läsa och försöka förstå problemet, utan börjar operera med de tal de ser utan en strategi grundad i det problem de ska lösa. Andra elever har svårt att läsa texten på grund av svårigheter med avkodning eller läsförståelse. Vidare finns det elever som förstår problemställningen men har svårt att ta steget till att välja och använda en för situationen lämplig problemlösningstrategi. Vissa elever kommer fram till ett svar, men har inte utvecklat strategier för att kontrollera och bedöma rimligheten i svaret. Trots alla utmaningar i problemlösningsarbetet kan elever i matematiksvårigheter med hjälp av god undervisning, stöd och anpassningar förbättra sin problemlösningförmåga. Problemlösning kan vara både ett sätt att lära ett nytt matematiskt innehåll och ett sätt att utveckla problemlösningförmågan. En förutsättning, menar Montague, för att alla elever ska våga försöka lösa matematiska problem är att de befinner sig i en omgivning där det är tillåtet och säkert att ta risker. En annan förutsättning är att alla elever är inkluderade och lär sig arbeta tillsammans med andra.

I kursplanen för matematik (Skolverket, 2017) är problemlösning både en förmåga och ett centralt innehåll och för elever i årskurs 4–6 ska problemlösning ske i och utifrån vardagliga situationer. När ett matematiskt problem har hög igenkänningsfaktor kan elever både se nytta med matematik och känna glädje i att kunna lösa problem. Ett matematiskt problem som verkligen engagerar klassen har stor potential att inkludera alla elever. När elever ges möjlighet att kontinuerligt utveckla problemlösningförmågan kan de bibehålla och öka sitt intresse för matematik. Senare svårigheter i matematikämnet kan förebyggas genom att eleverna tidigt får en positiv syn på problemlösning och ser att engagemang och uthållighet kan hjälpa dem i arbetet med att lösa problem – även om de tycker att problemlösning är svårt. För läraren finns det inte en enda ”rätt väg” att undervisa utifrån för att främja lärandet och stödja elever i svårigheter. Att använda lämpliga undervisningsmetoder vid problemlösning för att möta behov hos elever i matematiksvårigheter så att eleverna utmanas och stötts i sitt lärande förutsätter en reflekterande och flexibel undervisning (Baroody, 2011).

Matematiska problem

Problemlösningsförmåga består av att både kunna formulera och lösa olika slag av matematiska problem. I det här sammanhanget innebär problem att det är en matematisk fråga som kräver någon form av matematisk undersökning för att kunna besvaras. Vad som är ett matematiskt problem är beroende av den person som ska lösa det. Om en elev söker lösningen till en uppgift och till en början inte har en given metod att använda, och om uppgiften dessutom förutsätter eller stimulerar ett engagemang från elevens sida, då kan man kalla det för problemlösning (Wyndham, Riesbeck & Schultz, 2000). Motsatsen till ett problem brukar ofta benämnas som rutinuppgift.

I många textuppgifter kan elever använda rutinartade metoder som de håller på att lära sig, vilket betyder att lösningen är en ren tillämpning av en procedur. Om lösningen innehåller flera steg som vart och ett är ganska rutinmässigt, kan det vara en utmaning att välja relevanta procedurer och utföra dem i rätt ordning. På motsvarande sätt behöver inte en uppgift som endast innehåller matematiksymboler vara rutinartad, den kan mycket väl vara ett problem. För en elev som ännu inte har grundläggande förståelse för negativa tal kan $8,5 - 15$ vara ett nog så utmanande problem men så småningom blir det en ren rutinuppgift. Med andra ord kan det som är en rutinuppgift för en elev vara ett problem för en annan och därför är det nödvändigt att hålla isär att "lösa problem" och att "lösa rutinuppgifter". För att lösa ett problem kan man behöva bryta ner det och behärska olika procedurer och utföra delar som är av rutinkaraktär, men problemet som helhet löses inte på rutin. Det är alltså inte avgörande om en uppgift innehåller text eller ej, men en bärande idé med problemlösning är att den ska utmana elevens tänkande och att läraren kan vägleda eleven mot nya matematiska områden på ett meningsfullt sätt. Genom ett fokus på lösningsprocessen kan även ett problem som inte blir löst ge erfarenheter väl värda att reflektera över.

Olika grader av öppenhet i matematiska problem

Gemensamt för alla matematiska problem är att elever uppmanas att ta reda på något utifrån givna omständigheter och förutsättningar för att besvara en fråga, visa att något är sant eller falskt, utföra en särskild operation eller konstruera något. Många problem är formulerade så att uppgiften är att finna svar på en tydligt ställd fråga, men vissa problem är konstruerade så att eleverna ska undersöka en matematisk situation och försöka hitta så mycket intressant som möjligt i den. Ibland finns alla omständigheter presenterade i problemet, ibland ska eleverna själva skapa vissa av dem genom att söka rätt på och tillföra information som är utelämnad i texten, vilket man brukar kalla för – mer eller mindre – öppna problem. Problem kan också vara öppna genom att det finns många olika svar. Ibland kan det till och med vara så att eleverna själva ska formulera frågan.

Det kan krävas både kreativitet och engagemang för att tillfoga det som saknas eller våga ta bort det som är överflödigt. Elevers olika erfarenheter och intressen kan bli avgörande bidrag i arbetet och öppna problem löses därför helst i grupp och inte enskilt. Detta kan

vara särskilt betydelsefullt för elever i svårigheter och alla elever ska ges möjlighet att lösa problem, oavsett prestationsnivå (Schoenfeld, 1994). Genom att låta problemen ha flera tänkbara lösningar går det att komma ifrån elevers fokusering på ett korrekt svar och i stället kan lösningsprocessen komma främst. Förmågan att resonera blir också mycket central i arbete med öppna problem. Som stöd för att utveckla resonemangsförmågan kan elever utgå från ett frågebatteri som de i takt med växande erfarenhet av problemlösning utökar med allt fler relevanta frågor: *Vad vet vi? Vad får vi göra? Vad kan vi göra? Vad händer om ...? Saknas någon information?* Eftersom det inte finns något ”rätt svar” behöver eleverna både förklara och motivera sina lösningar för att få bekräftat om de lyckats lösa problemet eller inte. Genom att arbeta med öppna problem ökar därför förutsättningarna för kommunikation och interaktion, särskilt när uppgifterna är sådana som elever känner sig motiverade att arbeta med. I forskning blir det tydligt att adekvat undervisning kan ge elever i matematiksvårigheter ökade möjligheter att lyckas med problemlösning (Jitendra, Harwell, Dupuis & Karl, 2016). Några av de anpassningar som nämns i studien är att

- främja förståelse för underliggande förhållanden i problemet och problemets struktur
- använda olika representationer, underlätta för användning av problemlösningstrategier och metakognitiva strategier
- utveckla förmågan att följa och reflektera över problemlösningsprocessen
- utveckla flexibilitet i användningen av procedurer.

Något att vara vaksam inför är att eleverna ska få erfara att alla uppgifter och problem de ställs inför inte är öppna, alla resultat kan inte legitimeras med att ”det beror på ...”. Elever kan ha många olika beräkningsstrategier men inte tillräckliga erfarenheter eller kunnande om *när* och *hur* de ska tillämpas. Risker är då att elever kommer fram till olika resultat och ser det som naturligt, eftersom det beror på vilken strategi som används (Skolverket, 2008). För att diskutera rimligheten i ett resultat, särskilt om det inte finns ett facit där det kan kontrolleras, är det lämpligt att arbeta med öppna problem som är relaterade till den vardag som är bekant för eleverna.

Matematisk problemlösning

Genom problemlösning kan alla elevers tidigare kunskaper och begreppsuppfattningar utmanas på ett stimulerande och engagerande sätt. För elever som tycker det är svårt med problemlösning räcker det inte med generella beskrivningar. Dessa elever behöver systematisk och explicit undervisning om problemlösning som integreras med det matematikinnehåll som behandlas i årskursen (Gurganus, 2017). Eleverna bör kunna relatera till erhållna kunskaper och erfarenheter när de tolkar ett matematiskt problem. Ett matematiskt problem bör vara utformat så att det stimulerar användning av både vardagligt språk och ett mer utvecklat matematikspråk så att förutsättningar ges för samtal, och möjlighet att diskutera för att beskriva och förklara olika situationer.

Problemlösning enligt Pólya

Matematikern George Pólya (2003) presenterade redan på 1940-talet en arbetsgång i flera steg som kan hjälpa till i en problemlösningsprocess. Dessa steg är användbara för alla, men i undervisningen bör anpassningar i form av stöd och förtydliganden göras för elever i svårigheter. Pólya betonar att det inte räcker att lära sig reglerna för hur en lösningsprocess ska genomföras, de måste också praktiseras och han menar att det gäller för både elever och lärare. Elevers kreativitet får inte kvävas av regler och rutiner för då har beredskapen att lösa problem i vardagssituationer beskurits. Matematiken påminner i det avseendet om ett spel – man blir inte en bra spelare bara för att man kan spelreglerna. Eftersom matematik både har en logisk och en undersökande sida handlar det inte enbart om att lägga upp en strikt plan för hur problemet ska lösas, det ska också ges möjlighet att gissa och spekulera. Detta betonas även i Lgr 11 (Skolverket, 2017, s. 56): ”Matematisk verksamhet är till sin art en kreativ, reflekterande och problemlösande aktivitet som är nära kopplad till den samhälleliga, sociala och tekniska utvecklingen.” För att särskilt uppmärksamma denna del av matematisk verksamhet använder Pólya termen heuristik som ungefär kan översättas med ”konsten att finna”. Heuristiken hjälper oss att besvara frågan: ”Vad ska jag göra när jag inte vet vad jag ska göra?”

Fyra steg: förståelse, plan, utförande och återkoppling

Enligt Pólya består problemlösning av fyra steg och senare i denna text ges exempel på hur dessa kan anpassas så att undervisningen stöttar elever i svårigheter. Först sätter sig problemlösaren in i problemets villkor och frågeställning för att skapa förståelse för problemet, de gissar och undersöker, sedan gör de upp en plan och genomför den för att slutligen utvärdera sin lösning:

Förståelse. Vad innebär uppgiften? Är alla ord och begrepp förståeliga? Hur kan frågan omformuleras med egna ord? Vad efterfrågas? Vilka förutsättningar gäller? Finns illustrationer och varför finns de i så fall med? Finns överflödig information? Saknas några uppgifter?

Plan. Liknar uppgiften något tidigare problem? Vilka delfrågor kan ställas? Vilken fråga bör ställas först? I vilken ordning bör övriga frågor ställas? Vilka lösningsstrategier är tänkbara? Finns det fler möjligheter? Välj lämplig strategi, till exempel att gissa och prova, söka efter mönster, dramatisera, rita en figur, förenkla problemet, skriva en ekvation, göra en modell, göra en tabell, arbeta baklänges, prova alla möjligheter.

Utförande. Följ planen. Kontrollera varje steg.

Återkoppling. Hur kan resultatet kontrolleras? Är resultatet rimligt? Finns andra sätt att få fram lösningen? Finns det fler lösningar? Vilka? Gäller alltid resultatet? Vad händer om villkor ändras? Vilka rimliga generaliseringar kan göras? Vilka för- och nackdelar finns med lösningsstrategin? Vad är kärnan i problemet? Finns det spännande samband?

Pólyas idéer har efter hand vidareutvecklats. När det gäller planering och vilken strategi som ska väljas för att lösa det aktuella problemet har listan kompletteras av exempelvis Frank Lester (1988) som även ger alternativen att välja en eller flera operationer att arbeta med och att arbeta med laborativa material. En annan strategi kan vara att använda digitala verktyg. Det kan uppfattas som att problemlösning enligt Pólya innebär en linjär process som kan systematiseras, vilket inte alltid är fallet. Många elever som lyckas med problemlösning är flexibla i sitt tänkande, de "kör inte fast" utan byter strategi under lösningsprocessens gång om de upptäcker att den planerade strategin inte håller.

Att anpassa och stötta vid matematisk problemlösning

Tidigare beskrivningar av vad som är ett matematiskt problem och hur problemlösning genomförs får konsekvenser då lärare särskilt utformar lärmiljön och väljer uppgifter för elever i svårigheter. Lärarens roll vid problemlösning är att förbereda, organisera, stimulera och utmana. Läraren ska också undervisa och handleda eleverna i deras arbete med att lösa problemet. Antingen kan läraren välja olika problem anpassade för olika elever eller elevgrupper, eller välja ett matematiskt problem som vid behov anpassas på individnivå. En fördel med det sistnämnda är att alla elever känner igen sig i problemformulering och kontext då arbetet summeras och lösningen formuleras i samverkan mellan lärare och elever.

Tid för problemlösning

För att skapa och diskutera sina idéer krävs det att eleverna har gott om tid och därför är tid en avgörande faktor för att problemlösningen ska bli lyckad. I matematikdidaktisk litteratur finns beskrivningar av hur lärare ger elever mer lärartid. Exempelvis beskriver en lärare hur hon inbjuder en, inledningsvis motvillig, elev att komma några minuter före varje matematiklektion för att de ska hinna titta på hemuppgiften tillsammans (Rathmell & Gabriele, 2011). Läraren lyfter då främst begreppsliga samband som är mer grundläggande än de begrepp som läraren tror ska komma upp i helklassundervisningen. Läraren och eleven modellerar tillsammans problemet i syfte att eleven ska kunna skapa viss förståelse för matematikinnehåll som hela klassen ska arbeta med några veckor senare. En slutsats författarna drar, bland annat efter flera konkreta beskrivningar av olika lärarinsatser, är att hellre ge många korta insatser än få långa. Tio femminuters aktiviteter med en enskild elev ger sammantaget mer stöd, eftersom eleven orkar vara fokuserad hela tiden, än en enskild lektion på 50 minuter. Eleverna bör naturligtvis även möta mer komplexa problem än de som är möjliga att ge som en femminutersaktivitet, men fördelen med de korta mötena är att de kan ske i princip varje dag.

Val av matematiskt problem

Ett syfte med problemlösning är att problemen ska introducera och utveckla begrepp, modeller, lösningsstrategier och matematiska idéer. Då är det av vikt att läraren vet vad eleven redan kan och vad eleven närmast ska utveckla. Vilka elever bör möta nytt matematikinnehåll i små steg och vilka önskar bli utmanade? Det är en fingertopps-känslighet som lärare utvecklar genom erfarenhet och i takt med att de lär känna eleverna

som individer. Att få ett för enkelt problem att lösa kan elever uppfatta som att ingen tror på dem och ett alldeles för svårt problem kan leda till att eleven ger upp. Ett avvägt problem ska vara anpassat både till elevens erfarenheter och potential, det ska ge eleven möjlighet att reflektera och en känsla av att hon/han nog kan lösa problemet – även om det både kräver ansträngning och tar tid.

Anpassning av text och bild i det matematiska problemet

Många matematiska problem beskrivs mycket kortfattat. Som vi tidigare diskuterat i samband med extra anpassningar rörande lässvårigheter och begränsat arbetsminne, kan de matematiska problemen ha en meningsbyggnad som är svår för eleven. De kan innehålla okända ord och matematiska symboler som eleven inte är van vid och det medför behov av extra anpassningar. Texten kan göra att eleven så att säga inte kommer fram till problemets matematikinnehåll. Kan en tydligare disposition eller typografi underlätta för eleven? Går det att dela upp långa meningar till flera korta? Bör enstaka ord ersättas med en synonym? Finns det överflödigt text som kan göra eleven osäker? Finns det grafiska resurser som pilar, skuggade eller inramade partier som kan vara till hjälp? Hur skrivs siffror och tal fram? En anpassning kan vara att ge eleven hjälp att reda ut vilka siffror och tal som är väsentliga. Bara för att en information skrivs med siffror behöver den inte vara nödvändig för lösningen och vice versa: ”Ayat, 15 år, har åttioen sidor kvar att läsa men hans tvillingsyster Alicia har bara $\frac{1}{3}$ så många sidor kvar. Hur många sidor har Alicia kvar att läsa?” Som tidigare beskrivits bör även signalord, dubbeltydiga ord och jämförande uttryck i problemtextens formulering uppmärksammas. Illustrationer i problemframställningen bör också granskas. Tillför bilden något väsentligt för att problemet ska vara lösligt? Finns det något i bilden som kan förvirra? Kan inritade hjälplinjer eller annan förstärkning i bilden vara till nytta? Eller är det en enbart dekorativ bild som lika gärna kan tas bort?

Anpassning av problemformuleringen

Om de ingående talen i ett problem hör till ett talområde som eleven ännu inte är bekväm med går det ofta att ersätta med tal från andra talområden utan att den matematiska idén går förlorad. När utveckling av aritmetik inte står i fokus för problemet kan tal som leder till svårare beräkningar ersättas, som att ändra till subtraktioner utan växling eller divisioner som går jämnt ut. En problemformulering som består av flera steg kan delas upp i delproblem eller förkortas. I läroböcker och andra problemsamlingar erbjuds ibland problem som är organiserade eller märkta så att det framgår om det är enstegs- eller flerstegsproblem. En risk som läraren bör vara medveten om vid en sådan anpassning är att problemet då kan upphöra att vara ett problem och istället blir en rutinuppgift eller att eleven snarare blir lotsad genom problemet än ägnar sig åt problemlösning. Därför kan det vara positivt att en elev får lösa många snarlika problem där matematikinnehållet är i princip detsamma men problemformuleringen blir allt mer komplex. Ansvar för att dela upp problemet i punkter kan successivt övergå från att läraren gör en sådan anpassning till att eleven själv kan dela upp ett problem för att sedan ta sig an en punkt i taget.

För att hålla elevernas nyfikenhet och engagemang uppe för en problemtyp som kommer att upprepas går det ofta att ersätta kontexten. Handlar problemet om grundläggande

procentbegrepp kan sammanhanget variera från olika dekorationer på en kaka, procentsatser på rean, jämförelser mellan olika elevgrupper på skolan, hur mycket socker det är i olika drycker, till diskussioner om ökning eller minskning av månadspengen. Låt gärna eleverna föreslå vad de vill att problemen ska handla om. De kan då uppleva att det är helt olika problem och känna glädje när de alltmer effektivt klarar att lösa ”nya” problem. Problemets kontext är betydelsefull av flera anledningar, kanske främst för att elever ska bli engagerade, men är sammanhanget okänt för eleven kan det vara hindrande.

Elevens förståelse av problemet

Ett avgörande steg, särskilt för elever i svårigheter, är att få genuin förståelse av ett problem. Låt eleven, enligt Pólyas regler, formulera problemet med egna ord och återberätta vad som efterfrågas. Låt eleverna även formulera problemets innebörd gemensamt och uppmuntra dem att diskutera och fundera på om de mött ett liknande problem tidigare och vad de då gjorde. Låt eleverna diskutera om det är ett enstegs- eller flerstegsproblem. Om det är ett flerstegsproblem, vilka steg går att urskilja redan i inledningsskedet? Hur kan eleverna avgöra om all information redan finns angiven eller om någon behöver läggas till eller kanske tas bort? Tror eleverna att de har de förkunskaper som krävs? Om inte, kan de försöka precisera vad de behöver hjälp med innan det går att sätta igång med problemlösningen? Många lärare har erfarenhet av att elever som börjar formulera en fråga kommer på svaret själva innan frågan är färdigformulerad. Om en elev behöver ytterligare stöd för att förstå problemet:

- läs en mening i taget och låt eleven göra en minnesanteckning eller rita en stödbild, när hela problemet är genomläst upprepas frågan och eleven går igenom sina anteckningar och bilder
- föreslå eleven att titta på de tal som finns i problemet och försöka finna samband mellan dem
- föreslå eleven att börja pröva med ett tal och ett räknesätt och se vad som händer (och sedan pröva med fler tal eller annat räknesätt)
- föreslå eleven att gissa vad lösningen ska vara och undersöka om det verkar rimligt
- förlägg problemet till någon annan genom att exempelvis låta en fiktiv figur vara den som vill lösa ett problem.

Ytterst handlar det om att få eleven intresserad, engagerad och villig att våga försöka lösa problemet.

Motivationsskapande lärmiljö

En problemlösande kultur präglas av att aktiviteterna huvudsakligen liknar naturliga situationer där elever känner igen sig och vill arbeta undersökande för att lösa problemet (Wyndham m.fl., 2000). Hänsyn behöver tas till förkunskaper både i klassen som helhet och för enskilda elever. Det som är ett problem för en elev behöver, som tidigare nämnts, inte vara det för en annan och det som var ett problem för alla i klassen för en tid sedan kan nu

vara en rutinuppgift. Hur välorganiserat och genomtänkt ett problem än är ger det inte eleven ”egen kunskap när hon bearbetar de intryck hon får från sin omgivning” (Hagland, Hedrén & Taflin, 2005, s. 17) om eleven inte aktivt tar del av problemlösningsarbetet. I ett klassrumsklimat där undervisningen är inkluderande, utmanande, undersökande, meningsfull, lockar till nyfikenhet, tar eleverna på allvar och får dem att ställa frågor om varför, på vilket sätt och om det alltid är så, finns stor möjlighet att få varje elev aktiv. En del elever kommer till matematiklektionerna fulla av nyfikenhet och vetgirighet, andra behöver skolmiljön som stöd för att utveckla ett intresse för att lära sig lösa matematiska problem. Ett sätt att avdramatisera problemlösning för elever som tycker det är olustigt eller får dem att känna oro är att läraren har valt problem som är möjliga att inledningsvis arbeta konkret med, som exempelvis att blanda saft, hälsa på ett bestämt antal personer, klippa pappersremсор som representerar tal, bläddra i en tjock bok när problemet handlar om bokmasken Mix som äter sig igenom sidor, etcetera. Vissa problem av detta slag är även möjliga att dramatisera. Diskutera då med eleverna hur den matematik som finns i dramatiseringen kan göras synlig och tydlig med konkreta och bildmässiga representationer och slutligen det matematiska symbolspråket. En uppenbar vinst med att först hantera ett problem konkret är att elever kan se kopplingar mellan den matematik de möter på lektionerna och deras egen vardag.

Förse eleverna med de hjälpmedel som de behöver

Elever ska även vid problemlösning ges möjlighet att använda de hjälpmedel de är vana vid att använda på matematiklektioner. För elever i matematiksvårigheter kan dåligt flyt i beräkningar vara det största hindret för aktiv problemlösning och då kan miniräknare ofta komma till användning så att elevens fokus kan läggas på själva problemlösningen. En annan fördel med miniräknaren är att autentiska tal, exempelvis prisuppgifter, kan användas av alla elever, men elever kan behöva stöttning då de tolkar det de avläser på miniräknaren. Det finns miniräknare och appar för skolbruk som inte bara visar resultatet av en beräkning utan även de inslagna talen och det underlättar vid uppföljande samtal. Elever är medvetna om att miniräknaren kan hjälpa dem med många beräkningar, och det är positivt idag när nästan alla nästan alltid har tillgång till en miniräknare i mobiltelefonen, men eleverna blir också medvetna om att miniräknaren inte löser själva problemet – de måste fortfarande tänka själva. Resurser som matematikpapper, linjaler, gradskivor, vågar, litermått etcetera bör alltid finnas tillgängliga. Observera hur elever hanterar dessa hjälpmedel. Att mäta, väga och använda olika hjälpmedel är kunskap som tar lång tid att utveckla. Naturlig tillgänglighet till laborativa material kan ge uppslag och vara en inkörsport till ett problem. Ett problem som innehåller personer kan åskådliggöras av plastfigurer som kan tilldelas exempelvis uppdrag, föremål eller egenskaper. Eleven kan sedan göra omgrupperingar enligt problemtexten.

Ett problem som är presenterat med hjälp av en informativ illustration kan behöva konkretiseras med material. Särskilt i problem där det gäller att avgöra vad som inte syns i bilden, exempelvis dolda kuber i ett bygge (Hagland m.fl., 2005), ger material stöd till eleven att sätta sig in i och förstå problemställningen. Det är inte ovanligt att elever som inte

kommer vidare i ett problem som presenterats i text och bild enbart behöver börja bygga för att se vad som kommer att hända.

Flera lösningsmöjligheter

Ett rikt matematiskt problem har olika lösningsmöjligheter, även om det bara finns ett korrekt svar. Elever som är vana vid att medvetet arbeta med olika representationer på matematiklektioner kan uppmuntras att ta med det kunnandet in i problemlösningsarbetet. Samtidigt är en elevs begränsade uppsättning av representationer, och svårighet att välja mellan dem, det som kan göra problemlösningen besvärlig. I vissa problem kan eleven få stöd att starta i en konkret representation för att sedan själv gå vidare till bildmässiga och symboliska representationer. I andra problem kan det sammantaget i klassen förekomma lösningar baserade på skilda representationer. När några elever gjort på olika sätt visar det att även andra kan ha andra lösningsförslag. Schoenfeld (1992) menar att lärare inte ska lära ut problemlösningsstrategierna en efter en utan medvetet välja problem som leder in eleverna på spår som gör att de upptäcker olika strategier som är relevanta för dem. Efterhand som klassen upptäcker allt fler problemlösningsstrategier kan de samlas i en bank och de elever som vill och behöver kan använda den som en resurs.

Att ta nästa steg

Genom att goda problemlösningsinsatser uppmärksammas av läraren och synliggörs i klassen uppmuntras elever att ta sig an nya problem. Även problemlösningsinsatser som inte leder helt rätt bör uppmärksammas. För en elev i svårigheter kan det vara avgörande för självtilliten att få veta att ”så här långt har du gjort ett fint jobb, men det här steget behöver vi titta lite mer på”. De missuppfattningar som blir synliga hjälper läraren att planera och genomföra fortsatt undervisning kring problemlösning. Felaktiga lösningar kan också bero på att kunskap saknas hos enstaka elever, eller kanske hos samtliga elever i klassen. Detta kan ge tillfälle att ta upp ett matematikinnehåll som av tradition brukar tas upp i senare årskurser. Elever redovisar ibland ett korrekt svar men där läraren ser att lösningsmetoden inte är utvecklingsbar. Läraren kan då både berömma en god arbetsinsats men samtidigt göra eleverna uppmärksamma på varför det är en metod som inte kommer att fungera i längden.

Alla elever, men kanske särskilt elever i matematiksvårigheter, behöver stöd i att uppmärksamma samband i matematiken (Butler, Miller, Crehan, Babbitt & Pierce, 2003). Sambanden kan vara mellan olika begrepp, representationer, talområden och problemlösningsstrategier för att lyfta fram betydelsefulla matematiska idéer. Att hjälpa eleverna att hitta samband gör att de, bland annat genom problemlösning, kan fortsätta bygga sitt matematiklärande på förståelse istället för memorering av enstaka regler.

Referenser

Baroody, A. (2011). Learning: A framework. I F. Fennell (Red.), *Achieving fluency: special education and mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Bottge, B. (2001). Reconceptualizing Mathematics Problem Solving for Low-Achieving Students. *Remedial and Special Education*, 22(2), 102–112.

Butler, F., Miller, S., Crehan, K., Babbitt, B., & Pierce, T. (2003). Fraction instructions for students with mathematics disabilities: Comparing two teaching sequences. *Learning Disabilities Research & Practice* 18(2), 99–111.

Gurganus, S.P. (2017). *Math instruction for students with learning problems*. New York: Taylor & Francis Ltd.

Hagland, K., Hedrén, R., & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem – inspiration till variation*. Stockholm: Liber.

Jitendra, A., Harwell, M., Dupuis, D., & Karl, S. (2016). A randomized trial of the effects of schema-based instruction on proportional problem-solving for students with mathematics problem-solving difficulties. *Journal of Learning Disabilities* 50(3), 322–336.

Lester, F. (1988). Teaching mathematical problem solving. *Nämnaren* 31(3), 32–43.

Montague, M. (1997). Cognitive strategy instruction in mathematics for students with learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities* 30(2), 164–177.

Pólya, G. (2003). *Problemlösning: en handbok i rationellt tänkande*. (Print-on-demand). Stockholm: ePan.

Rathmell, E., & Gabriele, A. (2011). Organizing your curriculum to develop computational fluency. I F. Fennell (Red.), *Achieving fluency: special education and mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Schoenfeld, A.H. (1994). *Mathematical thinking and problem solving*. Hillsdale, N.J.: Erlbaum.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. I D.A. Grouws (Red.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (165–197). New York: MacMillan.

Skolverket (2008). *Svenska elevers matematikkunskaper i TIMSS 2007*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket (2017). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011: reviderad 2017*. Stockholm: Skolverket.

Wyndham, J., Riesbeck, E. & Schoultz, J. (2000). *Problemlösning som metafor och praktik*. Institutionen för tillämpad lärarkunskap, Linköpings universitet.