

Att ”se” hur barn räknar

Cecilia Kilhamn, NCM

”Kan du berätta hur du tänker?” Det är en av de svåraste frågor du kan ställa till ett barn. Först ska barnet tänka, sedan vara medveten om sina tankar och därefter kunna sätta ord på tankeprocessen. Allt detta utan att ha ett fullt utvecklat språk. Att kunna berätta om sina tankar är att ta ett metaperspektiv på tänkandet. Även för den som klarar det är det inte säkert att den process som beskrivs är densamma som den som faktiskt ägde rum. I efterhand är det alltid en rekonstruktion. Givetvis är det en viktig kunskap för elever i alla åldrar att lära sig sätta ord på sina matematiska resonemang och beskriva olika tankebanor, men förmågan att tänka matematiskt kan finnas utanför språket och utvecklas parallellt med det. Att förstå matematik och tänka matematiskt handlar både om att utveckla en intuitiv förståelse för matematiska idéer och samband, och om att kunna föra logiska resonemang kring matematiska idéer med hjälp av naturligt språk och matematiska representationer. Ju yngre eleven är desto svårare är det för läraren att få inblick i vad det är eleven förstår och kan i matematik. Det är omöjligt att ge en skriftlig diagnos och svårt för eleven att berätta. Hur ska en lärare kunna ”se” vad en elev kan när eleven inte själv kan berätta? Den här texten har som ambition att förse läraren med några enkla redskap för att bedöma elevers grundläggande taluppfattning.

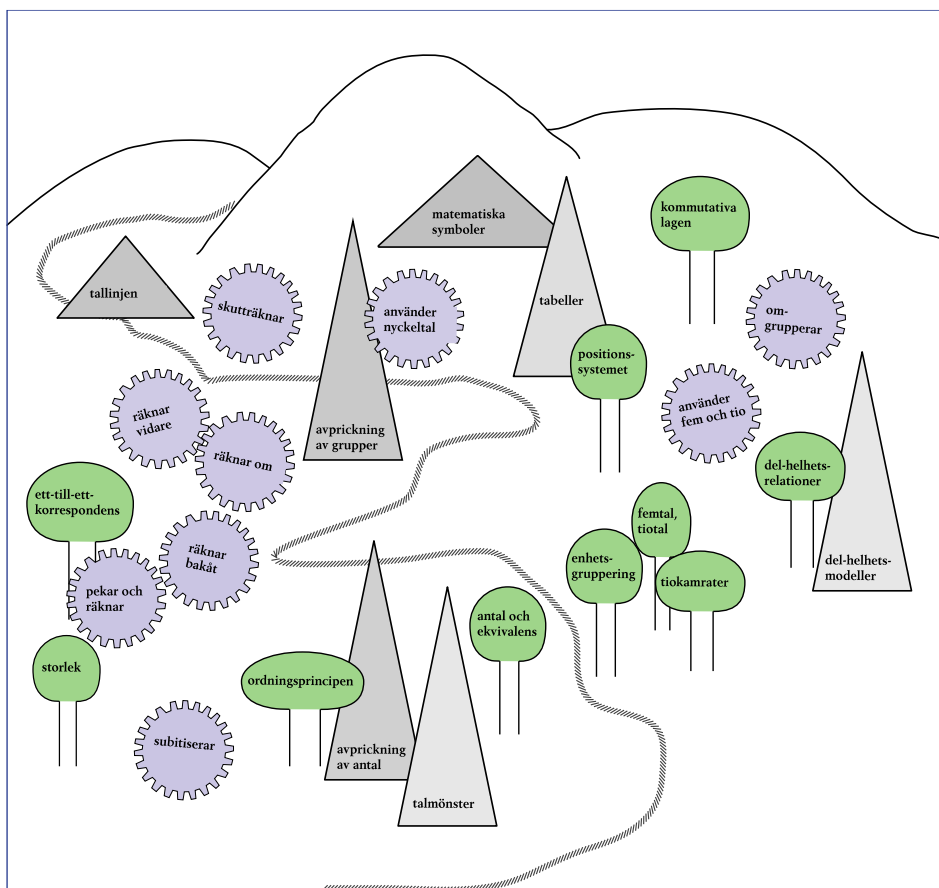
Lärandelandskapet för taluppfattning

Ett sätt att betrakta kunskap i matematik är att se lärandet som en resa genom ett lärandelandskap, en resa som kan ta olika vägar och där resenären kan dröja sig kvar olika länge på olika platser. Resans mål är inte att komma fram till en förutbestämd plats, utan att lära känna landskapet, lära sig hitta i det och kunna röra sig fritt från en plats till en annan. Det är en lärandemetafor som bland annat har utvecklats i undervisningsmaterial från *Mathematics in the City* i New York och som finns beskrivet i deras bokserie *Unga matematiker i arbete* (Fosnot & Dolk, 2018). Om lärande betraktas som en resa i landskapet kan eleverna göra upptäckter var de än befinner sig och oavsett om de varit där förut eller inte. Ibland kan förkunskaper underlätta. Vissa stigar är lättare än andra att färdas på. Men det går att ta sig fram till samma punkt från olika håll, eller finna en egen väg i stiglös terräng. Ibland kan en elev hitta en genväg, eller upptäcka likheter mellan olika landmärken trots att de förefaller ligga långt ifrån varandra.

Lärarens uppgift blir att hålla koll på var i landskapet eleverna befinner sig och för att göra det möjligt behöver läraren ha en karta över landskapet (Figur 1). En viktig kunskap hos läraren blir att göra klart för sig vilka landmärken, som kan beskrivas i termer av matematiska idéer, metoder och modeller, som eleverna behöver komma till.

Figur 1

Exempel på lärandelandskapet för den grundläggande taluppfattningen



Träden innehåller matematiska idéer, kugghjulen visar metoder och på bergen finns modeller. Det finns oändligt många sätt att ta sig mellan dessa landmärken, inte bara längst där här utritade stigen. Det viktiga är att varje elev bekantar sig med hela landskapet och lär känna alla landmärken på sin väg mot horisonten.

Matematiska idéer

De matematiska idéerna som ligger till grund för elevers taluppfattning bygger på den sammanställning som gjordes av Gelman och Gallistel (1986) och har sedan utvecklats av många matematikdidaktiker under de senaste decennierna. Här sammanfattas några av de viktigaste (Fosnot & Dolk, 2018):

- storlek – förmågan att urskilja större/mindre
- antal och ekvivalens – förmågan att urskilja fler/färre och lika många
- ett-till-ett-korrespondens mellan räkneord och objekt samt att det sist uttalade räkneordet anger antalet i mängden

- ordningsprincipen – varje tal har en bestämd efterföljare
- del-helhetsrelationer – att en helhet kan delas upp i delar
- enhetsgruppering – att en grupp objekt kan räknas som ett
- femtal och tiotal som viktiga enheter att gruppera i
- positionssystemet – att siffrans plats i talet bestämmer dess värde
- tiokamrater – det speciella med talet tio i vårt talsystem
- kommutativa lagen för addition – exempelvis att $2 + 3 = 3 + 2$.

Metoder

Med metoder menar Fosnot & Dolk (2018) olika tillvägagångssätt och visualiseringar som eleven har till sitt förfogande för att räkna och beräkna antal. I engelskspråkig litteratur används ofta ordet strategier men för att undvika en sammanblandning problemlösningstrategier används här termen metoder för räkning och beräkning. Grundläggande metoder är när elever:

- subitiserar – uppfattar ett mindre antal utan att räkna
- pekar och räknar med hjälp av räkneramsan
- räknar om – räknar delar för sig och sedan helheten från början vid addition
- räknar vidare från ett tal utan att börja om från början
- räknar bakåt
- skutträknar – räknar uppåt i grupper om exempelvis två, fem eller tio
- använder nyckeltal – räknar vidare till jämna tiotal och andra behändiga tal
- delar upp och omgrupperar tal
- använder fem-strukturen och tio-strukturen.

Modeller

Fosnot och Dolk (2018) använder modeller som representationer av tal och beräkningar för att visualisera och strukturera en situation. Modellen underlättar både kommunikation och tankeverksamhet. För den grundläggande taluppfattningen är följande modeller användbara:

- avprickning av antal
- avprickning av grupper – ett streck representerar en hel grupp och samtidigt alla i gruppen, till exempel att ett tiotal innehåller tio ental
- talmönster – som på en tärning eller fingertal
- tallinjen
- tabeller

- del-helhets-modeller
- matematiska symboler såsom siffror, operationer och likhetstecken.

Att resa i lärandelandskapet

God undervisning ger eleverna möjlighet att uppleva och utforska de matematiska idéer, metoder och modeller som utgör landmärken i lärandelandskapet. Eleverna behöver försättas i situationer där de upplever ett behov av att räkna, sortera, gruppera, lägga samman, plocka isär och jämföra. Lärarens uppgift blir att iscensätta situationer där lärandet kan äga rum och där det också blir möjligt att se var i landskapet den enskilde eleven befinner sig, vilka landmärken som är bekanta, och vilka som ligger inom räckhåll eller vid horisonten.

Eleverna inventerar sitt klassrum

En dag får vi möjlighet att besöka elever i en förskoleklass när de arbetar med att inventera klassrummet. Lektionen har planerats utifrån materialet *Organisera och inventera* (Liu, Dolk & Fosnot, 2020), där eleverna får i uppgift att inventera allt material som finns i klassrummet. Eleverna får parvis ansvar för att räkna och redovisa hur många av varje sorts föremål det finns i olika lådor, burkar och askar, på hyllor och i skåp. Det kan handla om antal böcker och skrivhäften, pennor och suddgummi, laborativt plockmaterial, linjaler, saxar, kriter och allehanda andra ting. Läraren ser till att antalet som eleverna ska räkna ligger inom ett för dem lagom stort talområde. De ska inte kunna avgöra antalet genom enbart subitiserings. Helst ska det vara så många saker att de känner ett behov av en mer effektiv strategi än att räkna upp, exempelvis att organisera i högar och gruppera i femtal eller tiotal. Läraren är ute efter att få syn på vilka räknemetoder eleverna använder och hur de hanterar tal. Det finns mellan 10 och 50 böcker och häften i varje låda, men mellan 30 och 250 pennor och andra småsaker. Eleverna får först i uppgift att räkna det som finns i en låda, sedan att summera hur många som finns i flera lådor. Lite senare, en annan lektion, kommer inventeringen att utvidgas till att innehålla mer avancerade frågor om hur många fler som behövs för att göra jämna tiotal eller för att komplettera till full klassuppsättning.

Inledningsvis får eleverna helt fria händer att lösa uppgiften med att räkna och bokföra på egen hand. Läraren iakttar dem för att notera deras idéer och metoder och stöttar genom att be dem beskriva vad de gör. Exempel på lärarens stöttande frågor är:

- Hur vet ni vilka föremål ni redan har räknat och vilka som är kvar att räkna?
- Hur kan ni lägga föremålen så det går lättare att hålla reda på vilka ni har räknat och vet hur många det är?
- Hur kan ni bokföra resultatet så att alla andra kan se vad ni kommit fram till?

När alla är klara samlas elever och lärare till ett gemensamt samtal där de olika sätten att bokföra jämförs och diskuteras.

Att se och notera

För eleverna är den inledande fasen då de arbetar självständigt en möjlighet att utforska tal och antal. Läraren ska inte störa genom att tala om för dem hur de ska tänka utan lita till deras kreativitet. Lärarens input kommer i form av frågor och i det uppföljande samtalet där elevernas egna idéer och metoder fungerar som utgångspunkt. För läraren är den inledande fasen en möjlighet att utforska elevernas tänkande.

För att kunna bedöma var eleven befinner sig behöver man som lärare veta i detalj vad man ska titta efter och ha ett bra sätt att notera elevens idéer och metoder. Här följer förslag på en arbetsgång:

1. Börja med att rita upp det lärandelandskap dina elever befinner sig i. Vilka landmärken finns där? Vad är det du ska titta efter och vad vill du hjälpa eleverna att utveckla? Vad tror du att du kommer att se?
2. När eleverna arbetar självständigt, titta då aktivt efter tecken på att de befinner sig vid några av landmärkena. Lyssna, titta och notera vad du ser, vilka idéer som kommer upp och vilka metoder eleverna använder. Gör skriftliga anteckningar av vad du ser. Anteckningarna kan vara korta och enkla men bör göras i stunden, inte när lektionen eller dagen är över, för då har du glömt vad du såg. Anteckningarna kan göras på individnivå eller på gruppnivå som en förberedelse för det gemensamma klassrumssamtalet. Här är exempel på vad som kan noteras:
 - Hur organiserar eleverna föremålen som ska räknas?
 - Flyttar de runt dem, lägger de dem på rad eller grupperar de?
 - Grupperar de efter antal, exempelvis i högar om fem eller tio, eller grupperar de efter andra egenskaper hos föremålen?
 - Stämmer deras sätt att organisera föremålen med den metod de använder för att räkna dem?
 - Räknar de en i taget? Skutträknar de?
 - Relaterar de till positionssystemet? Växlar de mellan tiotal och ental på ett korrekt vis?
 - Uttrycker de 50 både som femtio föremål och som fem tiotal (fem grupper om tio)?
 - Läger de ihop delsummer?
 - Är deras metoder effektiva? Ger de korrekta resultat?
 - Finns en god överensstämmelse mellan elevernas sätt att räkna och deras sätt att bokföra sitt räknande?
3. Samla alla elevernas dokumentationer så att ni kan prata om dem under det uppföljande klassrumssamtalet. Fråga eleverna om de förstår varandras bokföring och om de kan hitta sätt att göra redovisningen av antal tydligare. Fokusera olika modeller och diskutera med eleverna hur deras arbetsprocess och resultat skulle se ut om en annan modell användes. Introducera nya modeller för att visualisera vad eleverna beskriver. Fokusera även elevernas olika metoder och låt dem jämföra dem.
4. Komplettera lektionens anteckningar med iakttagelser från det gemensamma samtalet. Vilka landmärken i lärandelandskapet finns kvar att utforska? Använd sedan dina

anteckningar för att planera nya aktiviteter där eleverna ges möjlighet att röra sig på nya stigar i landskapet och utveckla förtrogenhet med den grundläggande taluppfattningens matematiska idéer, metoder och modeller.

Referenser

Eriksson, P., & Kilhamn, C. (2019). Resa i ett lärandelandskap. *Nämnanen*, (3), 15–20.

Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2018). *Unga matematiker i arbete. Taluppfattning och de fyra räknesätten*. Studentlitteratur.

Gelman, R., & Gallistel, C. R. (1986). *The child's understanding of number*. Harvard University Press.

Liu, N., Dolk, M., & Fosnot, C. T. (2020). *Organisera och inventera*. Studentlitteratur.