Matematik – Förskoleklass och grundskola åk 1–3
Modul: Taluppfattning och tals användning
Del 1: Tal och antal

Kritiska aspekter i lärandet om tal och antal

Berit Bergius, NCM

Vikten av att förstå innebörden i begreppet tal är välkänd. I det tidiga lärandet inser barn efterhand kopplingen mellan räkneord och siffror och att räkneorden också kan beskriva antalet föremål som finns i en väl avgränsad mängd. Antalet kan uttryckas skriftligt med hjälp av tal och talen skrivs med siffror. Kunskap om processen som leder från det lilla barnets tidiga möten med räkneord till att de kan använda räkneord och tal för att göra antalsbestämningar och beräkningar är viktig för alla lärare i tidiga skolår. Någonstans i den processen befinner sig eleverna när de kommer till förskoleklass eller årskurs 1. Denna text tar upp tre kritiska aspekter i lärandet om tal och antal: principer för räkning, skillnad mellan siffror och tal samt tals uppdelning.

Fem principer

För att det ska vara meningsfullt att arbeta med tal och räkning måste eleven ha förstått fem grundläggande principer. Forskarna Gelman och Gallistel (1986) har formulerat dem:

- *Abstraktionsprincipen* innebär att föremål i väl avgränsade och definierade mängder kan räknas. En grupp med fem leksaker kan räknas och betraktas som fem stycken.
- *Ett–till–ett-principen* innebär att ett föremål i en mängd kan bilda par med ett föremål i en annan mängd. Är antalet i de båda mängderna lika eller olika? Räcker bullarna så det blir en var? Det kan också vara att räkneord och föremål bildar par. En känd svårighet för nybörjare är att hålla samma takt för räkneord och föremål, till exempel att säga ett räkneord i taget och samtidigt peka på det som räknas eller hoppa rätt antal steg på en spelplan.
- *Principen om godtycklig ordning* innebär förståelse för att när vi räknar antalet föremål i en mängd spelar det ingen roll i vilken ordning vi räknar dem eller hur föremålen är grupperade. Det viktiga är att veta vilka man har räknat och vilka som återstår.
- *Principen om räkneordens ordning* handlar om att varje räkneord följs av ett annat bestämt räkneord. Kan man ordningen så vet man att 5 alltid kommer efter 4.
- *Antalsprincipen,* också kallad kardinaltalsprincipen, innebär att när varje föremål i mängden har parats ihop med ett räkneord så utgör det sist sagda räkneordet antalet föremål i hela mängden. Vi ”mäter” antalet föremål med hjälp av räkneorden. På frågan *hur många* det är i mängden, svarar nybörjare med att räkna alla en gång till. De tror att föremålen i mängden ”heter” respektive

räkneord. Elever som har förstått antalsprincipen upprepar eller betonar ofta det sista räkneordet för att markera att det skiljer sig från de övriga, att det betecknar hela mängden.

För att det ska vara meningsfullt att arbeta med tal och räkning behöver eleven förstå antalsprincipen och att antalet i mängden inte ändras om föremålen sprids ut. En annan grundläggande förmåga är att uppfatta ett litet antal ”i en blink”, vilket kallas att *subitisera*, det vill säga utan att behöva räkna. De flesta uppfattar upp till 6–7 föremål på det sättet. Förmågan att subitisera visar sig till exempel i att direkt uppfatta fem fingrar på handen eller en ”sexa” på tärningen.

Siffror och tal

I det dagliga livet används ofta uttryck som kan vara förvirrande och, om de inte reds ut, kan leda till missuppfattningar och svårigheter. Vad är till exempel skillnaden mellan siffror och tal? I media och i samtal möter vi uttryck som ”siffrorna är större än förväntat”, ”hur höga siffrorna blir”, ”det var längesedan vi hade så låga siffror”. Barn och unga elever kan genom sådana uttryck blanda samman storlek på talet med siffrors fysiska storlek (Figur 1).

Figur 1

Liten och stor siffra att jämföra med litet och stort tal

8 3 2 999

Tal kan vara stora eller små och värden kan vara höga eller låga oavsett storleken på siffrorna de representeras av. Ett annat ord som kan förväxlas med ordet tal är ordet nummer. På svenska motsvarar ett nummer inget antal. Ofta uttrycker nummer en ordningsföljd, som i könummer och husnummer. Får jag könummer 387 så vet jag att när 386 ropas upp är det min tur nästa gång, men det behöver inte betyda att det finns 386 personer i lokalen. I vardagligt tal använder vi också nummer som identifikation, till exempel husnummer, telefonnummer och personnummer. Ofta har det funnits någon ordning i grunden när dessa nummer började användas, men med tiden har ordningen förlorat betydelse. Skillnaden mellan tal och nummer finns inte i alla språk och eftersom många elever idag har andra modersmål kan det vara värt att uppmärksamma i undervisningen. Exempelvis heter både tal och nummer ’number’ på engelska.

Ett sätt att motverka beskrivna missuppfattningar är att använda korrekta begrepp och uttryck redan från början i matematikundervisningen. Vygotskij (1999) lyfter fram betydelsen av att vuxna i samspelet med barn och elever utmanar både språk och tänkande. Genom många möten med ord och begrepp, i meningsfulla och varierade situationer, införlivas dessa i elevens eget språkbruk och begreppsapparat. Ett medvetet, korrekt och konsekvent språkbruk hjälper barn och elever att utveckla korrekt förståelse för begreppen siffra, tal och nummer.

Kiselman och Mouwitz (2008) gör följande definitioner:
siffra "tecken som representerar ett naturligt tal"
tal "grundläggande matematiskt begrepp som i sin enklaste form anger antal eller ordning i en följd. Ett tal representeras av en eller flera siffror."

Tals helhet och delar

I det tidiga arbetet med tal och antal är de konkreta inslagen både nödvändiga och vanliga. Elever kan få möta frågeställningar som:

- Hur många bollar ligger i lådan?
- Hur många av dem är gula?
- Hur många är röda?
- Vilken färg finns det flest av?
- Hur många fler/färre är gula?
- Hur stor skillnad är det mellan antalet röda och antalet gula bollar?

Vi leder in elevernas tänkande på tals helhet och delar och använder muntliga språkuttryck som representerar ett matematiskt sammanhang. För att utveckla sitt lärande behöver elever kunna tolka andras muntliga uttryck och själva kunna uttrycka sig med hjälp av matematiska begrepp. Genom att lyssna till, tolka och använda matematiska uttryck utvecklas språket. Eleverna behöver återkommande och varierade erfarenheter av övergången från muntliga uttryck till det skrivna matematiska symbolspråket för att göra de skriftliga symboluttrycken till sina.

Definitionen av ett enskilt naturligt tal i talraden kan vara att det är lika med *det föregående talet + 1*. Talet 2 kan då definieras som 1 + 1, talet 3 som 2 + 1 och så vidare. Men ett enskilt tal i talraden, till exempel 7, är inte bara 6 + 1 utan också 7 + 0; 5 + 2; 4 + 3 et cetera. Genom att uppfatta talen i grupperingar kan vi systematisera och kontrollera större mängder. Tio är lika mycket som två femmor, en sexa och en fyra, eller en sjua och en trea. Sådant kunnande underlättar i situationer som handlar om uppdelning av tal på olika sätt.
Exempel: Tio barn ska dela upp sig i par. Hur många par får vi?
Tjugo personer ska äta vid fem bord. Hur många kan sitta vid varje bord?

Historiskt har olika vägval påverkat människans lärande i matematik. Det romerska systemets struktur och symboler för fem, femtio, femhundra gav gott stöd för att hantera tal. Många menar att det indoarabiska systemets tiobas är lite för stor för människans förmåga att uppfatta antal "i en blink". Av det kan man dra slutsatsen att helheten fem och dess delar är en viktig grund (Neuman, 1989). Säkerhet i de första tio talens helhet och delar, det vi ibland kallar liten additions- och subtraktionstabell, och att kunna göra omgrupperingar är nödvändigt för att hantera mer komplexa tal. Alistair McIntosh, som ägnat sitt forskarliv åt att utveckla elevers och lärares kunnande om tal och räkning, menar att man i undervisningen ska gruppera kombinationerna så att de som bygger på en viss strategi behandlas tillsammans. Den struktur han rekommenderar för undervisningen är följande (McIntosh, 2020):

1 fler (+1) 2 + 1; 3 + 1; 4 + 1; 5 + 1; …, 8 + 1; och omvänt 1 + 2; 1 + 3 och så vidare.

2 fler (+2) 3 + 2; 4 + 2; 5 + 2; 6 + 2; 7 + 2 och omvänt 2 + 3; 2 + 4, 2 + 5 och så vidare.

3 fler (+3) 4 + 3; 5 + 3; 6 + 3 och omvänt 3 + 4; 3 + 5; 3 + 6 och så vidare.

Inga fler (+0) 1 + 0; 2 + 0; 3 + 0; 4; …, 9 + 0 och omvänt 0 + 1; 0 + 2 och så vidare.

Tiokamrater 10 + 0; 9 + 1; 8 + 2; 7 + 3; 6 + 4; 5 + 5; 4 + 6; 3 + 7; 2 + 8; 1 + 9

Dubblor 0 + 0; 1 + 1; 2 + 2; 3 + 3; 4 + 4; 5 + 5

Undervisningen bör inriktas på att eleverna ska kunna härleda subtraktionskombinationerna ur additionskombinationerna, till exempel $3 + 2 = 5 \rightarrow 5 – 3 = 2; 5 – 2 = 3$.

Elever som inte automatiserar de första tio talens helhet och delar fastnar ofta i ett till ett-räkning, det vill säga för 4 + 2 räknar de med konkret material, eller med hjälp av fingrarna, först upp de fyra och sedan ytterligare två innan de räknar fram svaret. De räknar antingen alla föremålen eller utgår från någon av delmängderna, två eller fyra, för att få fram summan. Andra dubbelräknar genom att säga nästa räkneord och samtidigt hålla ordning på hur många ord de har sagt. För 2 + 7 räknar de tre$^{\text{ett}}$, fyra$^{\text{två}}$, fem$^{\text{tre}}$, sex$^{\text{fyra}}$, sju$^{\text{fem}}$, åtta$^{\text{sex}}$, nio$^{\text{sju}}$, en komplicerad och i längden ohållbar kognitiv utmaning. Det blir omöjligt att hålla isär de parallella räkneramsorna.

Det är viktigt att eleverna också automatiserar stor additionstabell. McIntosh (2020) föreslår följande struktur för den:

Lägg till 10 10 + 1; 10 + 2; …; 10 + 8; 10 + 9 och omvänt 1 + 10; 2 + 10 och så vidare.

Dubblor 6 + 6; 7 + 7; 8 + 8; 9 + 9; 10 + 10

Nio plus 9 + 2; 9 + 3; 9 + 4; …, 9 + 7; 9 + 8 och omvänt 2 + 9; 3 + 9 och så vidare.

Åtta plus 8 + 3; 8 + 4; 8 + 5; 8 + 6, 8 + 7 och omvänt.

Sju plus 7 + 4; 7 + 5 och omvänt.

Nära dubblor 4 + 5; 5 + 6; 6 + 7; 7 + 8 och omvänt.

Liksom med kombinationer inom tio menar McIntosh att undervisningen ska ge eleverna erfarenheter som hjälper dem att härleda subtraktioner ur automatiserade additionskombinationer. Grunden för att förstå och kunna använda räknelagar som underlättar beräkningar ligger i att inledningsvis veta vilka två tal som tillsammans bildar en bestämd helhet. Ett exempel: 7 + 8 → omgruppera till 5 + 2 + 8 → 10 + 5 alternativt 7 + 7 + 1 → 14 + 1 och på motsvarande sätt 8 + _ = 15; 15 – 7 = _ et cetera.

Exemplet 57 + 86 = _ + 84 handlar om omgruppering. Det speglar elevens förmåga att se relationen mellan ingående tal och att uppfatta sambandet mellan dem, det vill säga att kunna använda den associativa lagen $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Elever behöver många och olika erfarenheter för att vidga sitt kunnande i ett talområde. De tio första talen behöver följs upp i större talområden genom systematiskt arbete. Det är inte självklart för elever att 300 + 500, 13 + 5, 103 +5, respektive 800 – 500, 48 – 5, 48 – 45 och så vidare bygger på att talet 8 kan beskrivas som 3 + 5. Lärare kan tro att när elever har förståelse för helhet och delar i ett litet talområde, kan de på egen hand generalisera till större talområden. Så är det inte, men medveten och strukturerad undervisning där eleverna får många och olika erfarenheter kan hjälpa dem att utveckla sin förmåga att generalisera.

Referenser

Gelman, R., & Gallistel, C. R. (1986). *The child's understanding of number*. Harvard University Press.

Kiselman C., & Mouwitz L. (2008). *Matematikterminologi för skolan*. NCM, Göteborgs universitet.

McIntosh A. (2020). *Förstå och använda tal*. NCM, Göteborgs universitet.

Neuman, D. (1989). *Räknefärdighetens rötter*. Nordisk Juridik AB.

Vygotskij, L. (1999). *Tänkande och språk*. Daidalos.