

Likhetstecknet och dess innebörd

Ingrid Olsson, Mitthögskolan

Thomas Carpenter, Megan Loef Franke och Linda Levi i översättning av Görel Sterner

Denna text består av två större delar. I den första skreven av Ingrid Olsson behandlas likhetstecknet med avseende på om det står för ett dynamiskt eller statiskt uttryck. I den andra behandlas likhetstecknets innebörd i förhållande till om uttryck är sanna eller falska.

Dynamisk och statisk uppfattning

Likhetstecknet har ofta införts parallellt med additionssymbolen + och med uppgifter som ”Du har tre pennor och får två pennor till. Hur många pennor har du då?”. Eftersom situationen är dynamisk, två pennor kommer till, uppfattas likhetstecknet i uttrycket $3 + 2 = 5$ som att det *blir* fem pennor.

Formuleringen ”Du har tre blå pennor och två röda pennor. Hur många pennor har du sammanlagt?” gör det naturligt att skriva $3 + 2 = 5$ samt att säga att det *är* fem pennor. Här är situationen statisk, det är inget som tillkommer utan de två pennsorterna betraktas samtidigt.

Motsvarande resonemang för subtraktion:

Dynamisk: ”Du har fem äpplen och ger bort tre äpplen. Hur många äpplen har du sedan kvar?” Många elever har endast detta *ta bort*-tänkande i subtraktion vid $5 - 3 = \underline{\quad}$.

Statisk: ”Anton har fem kottar och Ella har tre. Hur många fler kottar har Anton?”

○ ○ ○ ○ ○

○ ○ ○

Här jämförs antal och det kan även skrivas $5 - 3 = \underline{\quad}$.

Många elever saknar *differens*-tänkande. Det behövs för att enkelt kunna beräkna exempelvis $8 - 7$, $21 - 19$ och $401 - 398$ med hjälp av addition, som 399 , 400 , 401 .

Val av räknehändelser styr vilken begreppsförståelse av likhetstecknet som eleverna utvecklar (Larsson, 2011). Undervisningen måste erbjuda uppgifter med såväl statiska som dynamiska räknehändelser samt synliggöra dessa genom resonemang med eleverna (Fuson, 1992).

När är det inte likheter?

Eftersom elevernas uppfattning av likhetstecknet är betydelsefull borde kanske tecknet introduceras före symbolerna + och – och då i statiska situationer. Utan räkneoperationer ligger fokus helt och hållet på likheter eller inte på svaret.

För att tydligt visa vad något är kan motexempel och kontraster vara användbara. Istället för att bara säga när något gäller kan man även visa när det inte gäller. Här skulle det innebära en jämförelse av till exempel ●● och ●●●. Vi kan inte skriva = mellan grupperna av bollar eftersom antalet bollar är olika, två respektive tre. I stället passar tecknet $\neq$ som betyder inte lika med eller skilt från. Om vi blandar sådana uppgifter är det nödvändigt att för varje jämförelse ta ställning till om det är likheter eller inte, och välja antingen = eller $\neq$.



Eleverna skriver = eller $\neq$ i rutorna. För varje uppgift måste likhetstecknets innebörd vara i fokus.

Röda och blå bollar är inte lika

Någon kanske påpekar att röda och blå bollar inte är lika, färgerna är olika. Sådana kommentarer gör det nödvändigt att samtala om att det matematiska tecknet = inte handlar om föremålens egenskaper utan om antal och tal. Vi kan förtydliga detta genom att lägga siffror som anger antalet under respektive grupp. Det är lätt att ta för givet att alla tänker på antal, men en del elever kanske fastnar på färgen, andra på hur bollarna ligger och någon på om bollarna verkligen är lika stora.

Det är inte lätt att i förväg tänka ut hur olika elever uppfattar det undervisningen tar upp, men genom att känna till vanliga missuppfattningar kan läraren hjälpa eleverna till korrekt begreppsförståelse. Det är ett viktigt inslag i undervisningen att elever, i små och stora grupper, resonerar om det nya, sätter ord på det och vågar säga hur de uppfattat det. Frågor som ”Vad händer om ...?” där vi ändrar på förutsättningarna, utmanar eleverna till reflektion. ”Vad händer om det är bara en boll på varje sida? Vad händer om det är tio bollar? Hundra bollar? Kan vi ha samma tecken om det är en miljon bollar på varje sida?”

Ställ utmanande frågor och börja konkret

Variera antalet föremål, lägg siffror, jämför antal och välj passande tecken att lägga mellan grupperna, = eller $\neq$. Låt eleverna motivera sina val.

Lägg ●●●● $\neq$ ●●● och låt eleverna föreslå vad de skulle kunna göra för att få lägga = i stället. Efter ett förslag, fråga om det finns fler.

Låt eleverna ställa sig i grupper och berätta och jämföra antal elever i grupperna. Låt dem också använda plockisar och lägga lappar med = eller $\neq$ mellan sina grupper och rita motsvarande. Därefter kan det vara lämpligt att skriva passande tecken på ett arbetsblad

eller i en lärobok. Steget från det konkreta arbetet till de abstrakta symbolerna kan vara stort för många elever om det inte finns mellansteg där eleverna ska rita och sätta egna ord på det de gör, men det gäller att lägga fokus på rätt sak. Ska eleverna fundera kring likhetstecknet och dess innebörd bör inte själva räknandet vara för svårt och ta för mycket energi. En del elever tycker det är tråkigt om det är alltför lätt och behöver en större utmaning, till exempel i ett annat talområde.

Elevernas nuvarande uppfattning av likhetstecknet

Diskutera de aktiviteter som eleverna genomför i helklass.

- Låt eleverna berätta vad tecknet = betyder och ge exempel på hur det används. Låt dem även ge motexempel där $\neq$ används.
- Låt eleverna lösa en flervalsuppgift. Se förslag nedan.
- Diskutera gemensamt och uppmuntra eleverna att motivera sina val av svar.

Vilket tal ska stå i den tomma rutan? Välj alternativ.

$$3 + 5 = \square - 2$$

A. 6 B. 8 C. 10 D. 12

$$6 \cdot 4 = \square - 4$$

A. 10 B. 20 C. 24 D. 28

Den här typen av uppgifter, åtföljda av diskussioner i klassen och uppföljande intervjuer, kan ge god information om elevers uppfattningar. De felaktiga svarsalternativen ger en indikation om hur eleven uppfattar likhetstecknets innebörd och användning. Svaren på skriftliga uppgifter kan ge en första fingervisning, men det är i intervjuer och diskussioner som det verkligen går att få insyn i elevers tankar och idéer som sedan kan bli utgångspunkt för fortsatt undervisning. Förslag för att ta reda på elevernas uppfattning av likhetstecknet, som underlag för undervisning:

- Alla elever har två kort, = och $\neq$. Du säger eller skriver två uttryck, exempelvis $3 + 5$ och $7 + 1$. Eleverna håller upp ett av korten och du ser deras val.
- Skriv en flervalsuppgift och låt eleverna visa ett av korten för vart och ett av alternativen A, B, C och D.
- Låt eleverna svara skriftligt på några flervalsuppgifter och sedan motivera sina val i den gemensamma diskussionen.
- Låt eleverna själva skriva fler liknande uppgifter som de byter med varandra.

Likhetstecknets innebörd

Följande text är en något förkortad och bearbetad översättning av kapitlet *Equality* från boken *Thinking mathematically. Integrating arithmetic & algebra in elementary school* (Carpenter, Franke & Levi, 2003).

Elever i årskurs 1–6 fick följande uppgift: $8 + 4 = \square + 5$

Två vanliga svar var 12 och 17.

I alla årskurser var det mindre än 10 % av eleverna som gav det korrekta svaret 7 och resultaten i årskurs 6 var till och med något sämre än i övriga årskurser. Detta tyder på att många elever bär på allvarliga missuppfattningar om likhetstecknets innebörd. De saknar ofta en djupare förståelse för att likhetstecknet betecknar relationen mellan två uttryck, eller mellan två tal. En vanlig tolkning är att likhetstecknet är en uppmaning att utföra en beräkning, ungefär som miniräknaren gör när man trycker på symbolen för likhetstecknet. Denna missuppfattning begränsar elevernas möjligheter att lära sig basala aritmetiska idéer med förståelse och deras förmåga att representera och använda dessa idéer och skapar problem i mötet med algebra.

Missuppfattningar – några elevexempel

$$8 + 4 = \square + 5$$

Elev A:

- Det är 12.
- Hur vet du att det är 12?
- För att det är svaret. Jag räknade 8, 9, 10, 11, 12.
- Vad tänker du om 5:an som står där?
- Den är bara där. Den har ingenting att göra med 8 och 4. Den betyder ingenting. De kanske bara har tagit med den för att förvirra. Ibland sätter vår lärare in extra tal när vi löser problem för att vi ska tänka på vad vi ska addera och subtrahera.

Elev B:

- Det är 17.
- Hur kom du fram till det?
- Därför att jag vet att $8 + 4$ är 12 och 5 till är 17.
- Varför adderade du de talen?
- För att plustecknet betyder att man ska addera.
- Men $8 + 4$ står på ena sidan av likhetstecknet och 5 på den andra sidan?
- Ja, men man måste addera alla tal. Det är det som det betyder.

Elev C:

- Skriver 12 i den tomma rutan och skriver sedan 17 efter 5:an ($8 + 4 = 12 + 5 = 17$).
- Berätta hur du gjorde.
 - Jag lade ihop $8 + 4$ som är 12 och sedan måste jag lägga till 5 och då blev det 17.

- Är $8 + 4$ lika med $12 + 5$?
- $8 + 4$ är 12 och man lägger till 5 för att få 17.

Elevernas metoder för att skapa mening och förståelse för uppgiften och dess lösning var inte slumpmässiga. De försökte dra nytta av de erfarenheter de hade av att lösa additions- och subtraktionsuppgifter. I de flesta uppgifter som eleverna hade löst tidigare, kom svaret alltid direkt efter likhetstecknet. De generaliserade utifrån dessa erfarenheter och uppfattade att en ”regel” för att lösa den här typen av uppgifter var att svaret kommer direkt efter likhetstecknet. Samtliga elever i exemplen ovan tolkade likhetstecknet som en uppmaning att utföra en operation och att svaret skulle skrivas till höger om likhetstecknet. Elev C gav uttryck för en uppfattning som innebar att likhetstecknet egentligen var irrelevant i sammanhanget.

Likhetstecknet representerar en relation mellan två tal – några elevexempel

$$8 + 4 = \square + 5$$

Elev D (efter viss tvekan):

- Det är 7.
- Hur vet du det?
- $8 + 4$ är 12. Då måste jag tänka ut vad som ska adderas till 5 för att få 12. Jag räknade ut att det är 7.
- Varför räknade du ut vad som ska adderas till 5 för att få 12?
- För att jag hade 12 på den här sidan (pekar till vänster om likhetstecknet) och då måste jag ha 12 på den andra sidan också.
- Några elever har sagt att det ska stå 12 i den tomma rutan. Hur ser du på det?
- Det är fel. 12 och 5, det skulle bli 17 och det är inte lika med 12. Båda sidor måste vara lika.

Elev E (svarar snabbt):

- Det är 7.
- Hur vet du det?
- Jag såg att 5 var ett mer än 4 så talet i den tomma rutan måste vara ett mindre än 8. Så det är 7.
- Intressant. Vi prövar en annan uppgift. $57 + 86 = \square + 84$
- Det är lätt. 59.
- Det var snabbt!
- Ja, det är precis som den förra uppgiften. Det är 2 mer eftersom 84 är 2 färre.

Båda eleverna uppfattade likhetstecknet som uttryck för en relation mellan tal. Elev D räknade ut summan på likhetens vänstra sida och fann det tal som adderat till 5 skulle ge detta tal. Elev E sökte efter relationer, både mellan likhetens båda sidor och mellan de ingående talen, vilket gjorde det onödigt att utföra någon beräkning. Förmåga att reflektera över relationer mellan matematiska uttryck som i exemplet med E, är kritisk för elevers

möjligheter att tänka mer generellt kring aritmetik och för att utvidga sitt aritmetiska kunnande till algebra.

Undervisning om likhetstecknets innebörd

Ett fruktbart sätt att hjälpa elever att utveckla förståelse för likhetstecknets innebörd och användning är att utmana deras befintliga uppfattningar. Det kan undervisningen göra genom att engagera eleverna i diskussioner om lösningar på problem och uppgifter där olika uppfattningar om likhetstecknet uppdagas. I dessa diskussioner kan läraren uppmuntra och stödja eleverna att tydligt formulera sina uppfattningar om likhetstecknets innebörd och hur det kan användas, så att de själva och kamraterna kan förstå de olika perspektiv som finns representerade i klassen. För att elever ska utveckla djupare förståelse för likhetstecknet, är det nödvändigt att de blir medvetna om vilka uppfattningar som förekommer och vilket stöd som finns för dessa uppfattningar.

Ett syfte med diskussionerna är alltså att synliggöra elevernas uppfattningar om innebörden av likhetstecknet men de är samtidigt ett viktigt steg i att utveckla tanke- och samtalsmodeller som svarar mot principerna för algebraiska resonemang. När undervisningen uppmuntrar elever att lösa uppgifter och att diskutera alternativa föreställningar om likhetstecknet, försätts eleverna i en situation där de behöver formulera matematiska principer som ofta lämnas outsagda. De måste motivera de principer som de själva föreslår på ett sätt som övertygar andra, och de måste upptäcka och lösa motstridiga antaganden och slutsatser.

I lärares strävan att engagera eleverna i diskussioner och att utmana deras uppfattningar är valet av uppgifter av kritisk betydelse. Speciellt valda uppgifter kan

- uppmuntra eleverna att formulera sina idéer i ord
- utmana elevernas uppfattningar genom att variera uppgifterna så att de tvingas att undersöka och pröva om deras uppfattningar håller
- synliggöra elevernas tänkande.

Sanna och falska utsagor

Vid introduktion av sanna och falska utsagor är det ofta enklast att ge ett exempel och låta eleverna avgöra om påståendet är sant eller inte sant, det vill säga falskt. Det kan vara en god idé att börja med ett påstående som innebär relativt enkla beräkningar med en enda siffra till höger om likhetstecknet, men det är inte alltid nödvändigt. Ofta uppfattar elever i samband med klassrumsdiskussioner snabbt vad som avgör vilka utsagor som är sanna eller falska.

Läraren: Är detta påstående sant eller falskt: $8 - 5 = 3$?

Elev: Det är sant.

Läraren: Hur vet vi att det är sant?

Elev: Eftersom 8 minus 5 är 3. Om jag till exempel har 8 karameller och äter upp 5 så har jag 3 karameller kvar.

Läraren: Är detta påstående sant eller falskt: $3 \cdot 4 = 15$?

Elev: Det är falskt. $3 \cdot 4$ är 12 och 12 är inte lika med 15.

Läraren: $587 + 468 = 900$, sant eller falskt?

Elev: Det är falskt.

Läraren: Hur vet vi det?

Elev: $500 + 400$ är lika med 900. Men vi har $87 + 68$ också så $587 + 468$ måste vara mer än 900. Alltså måste det vara falskt.

Läraren: $587 + 468 = 1055$, sant eller falskt?

Elev: Sant. Jag startade på 900 och räknade ut resten i huvudet. $80 + 60$ är 140. $8 + 7$ är 15 och $900 + 155$ är 1055.

Den här typen av uppgifter där svaret avges direkt till höger om likhetstecknet är eleverna vana vid. När de är förtrogna med att resonera om sanna och falska utsagor kan läraren uppmuntra dem att pröva sina uppfattningar om likhetstecknets innebörd ytterligare. Genom att variera formen för sanna och falska utsagor kan olika perspektiv på likhet lyftas fram och utmana elevernas uppfattningar av hur likhetstecknet används. Exempelen nedan handlar om addition men utsagor med samma struktur kan förstås användas för samtliga räknesätt.

- a) $3 + 5 = 8$
- b) $8 = 3 + 5$
- c) $8 = 8$
- d) $3 + 5 = 3 + 5$
- e) $3 + 5 = 5 + 3$
- f) $3 + 5 = 4 + 4$

De flesta elever håller förmodligen med om att den första utsagan är sann men några är kanske inte lika säkra på den andra utsagan. Genom att uppmuntra eleverna att engagera sig i en diskussion om hur a och b skiljer sig åt kan läraren hjälpa dem att formulera sina uppfattningar, vilka ligger till grund för att avgöra om en utsaga är sann eller falsk. En del elever kan säga att det bara ska finnas ett enda tal till höger om likhetstecknet. I så fall kan utsaga c uppmuntra eleverna att ytterligare diskutera sina antaganden. Om de hävdar att det enbart är till vänster om likhetstecknet som det får finnas två tal kan d, $3 + 5 = 3 + 5$, vara utgångspunkt för att granska detta påstående. Eleverna kan ofta motivera att $3 + 5 = 3 + 5$ är

sant med att det är samma tal på båda sidor om likhetstecknet. Utsaga e ger ett något annorlunda perspektiv att tänka om detta påstående.

Genom att inkludera noll kan en del elever acceptera utsagor där fler än ett tal förekommer efter likhetstecknet. Begrunda följande utsagor:

a) $9 + 5 = 14$

b) $9 + 5 = 14 + 0$

c) $9 + 5 = 0 + 14$

d) $9 + 5 = 13 + 1$

De flesta elever kommer att bedöma utsaga a som sann. Inledningsvis kan det vara lättare att acceptera utsaga b än d som sann. I b följer svaret på $9 + 5$ direkt efter likhetstecknet och de flesta elever känner till effekten av att lägga till noll. En del elever som inte skulle acceptera utsaga d som sann, kan däremot acceptera b som sann. Detta öppnar för resonemang om att ha mer än ett enda tal efter likhetstecknet. Utsaga c erbjuder ytterligare en utmaning. Svaret visas inte längre direkt efter likhetstecknet, men den enda skillnaden mellan utsaga b och c är att ordningen mellan talen har ändrats. Troligtvis är eleverna medvetna om att ordningen mellan de tal de adderar inte påverkar svaret. I annat fall bör det bli föremål för diskussion.

En jämförelse mellan utsaga b och c kan ytterligare utmana de regler som eleverna utgår från när de använder likhetstecknet. Om de accepterar utsaga a, b och c som sanna, har många skäl till att inte acceptera utsaga d som sann redan eliminerats. Detta kan resultera i en fruktbar diskussion om nödvändigheten att tillämpa regler konsekvent.

Öppna utsagor

Samma idé kan illustreras på många sätt med hjälp av öppna utsagor. Frågan är ”Vilket tal kan du skriva i den tomma rutan för att göra utsagan sann?”. Detta sätt att tala om öppna utsagor ger en koppling mellan sanna/falska och öppna utsagor. Följande öppna utsagor svarar mot de tidigare uppgifterna med sanna och falska utsagor.

$$3 + 5 = \square$$

$$8 = 3 + \square$$

$$8 = \square$$

$$3 + 5 = \square + 5$$

$$3 + 5 = \square + 3$$

$$3 + 5 = \square + 4$$

$$3 + \square = 8$$

$$\square = 3 + 5$$

Eleverna ger ibland olika svar beroende på om de ska bedöma sanna och falska utsagor eller öppna utsagor. Vissa elever som verkar ha förstått att likhetstecknet representerar en relation, återgår till att beräkna summan av talen till vänster om likhetstecknet om de i allt för stor utsträckning får arbeta med uppgifter där svaret ges direkt till höger om likhetstecknet. Eleverna behöver kontinuerliga erfarenheter som kan utmana dem att tänka kring likhetstecknet som uttryck för en relation. Frågan är: "Vilket tal kan du skriva i den tomma rutan för att göra utsagan sann?" Det kan finnas många förslag men bara ett gör att utsagan faktiskt är sann. Detta sätt att resonera erbjuder en länk mellan sanna/falska respektive öppna utsagor.

Kommunikation och samspel i klassrummet

Genom att välja lämpliga uppgifter kan läraren skapa en kontext där elever uppmuntras att granska och pröva sina uppfattningar om likhetstecknets innebörd. Diskussioner om matematiska idéer och hur dessa diskussioner förs är av betydelse för all undervisning i matematik. Målet är inte bara att eleverna ska utveckla relevanta föreställningar om användningen av likhetstecknet utan också att engagera dem i konstruktiva matematiska resonemang. Att diskutera alternativa uppfattningar om innebörden av likhetstecknet kan utmana eleverna att undersöka och testa de bevekelsegrunder de har för sina påståenden. "Varför tror du att du inte kan skriva utsagor på det sättet?" Att hjälpa eleverna att förstå den accepterade användningen av likhetstecknet underlättar för dem att göra generaliseringar i matematik.

Diskussionerna kan också hjälpa eleverna att inse och reflektera över att olika uppfattningar förekommer i klassen och att alla uppfattningar inte kan vara korrekta. Det handlar inte bara om att räkna ut vad som är rätt svar, utan att utveckla förståelse för grundläggande skillnader mellan olika uppfattningar.

Användning av likhetstecknet – en konvention

I strävan att hjälpa elever att utveckla förståelse för att likhetstecknet uttrycker en relation, bör lärare komma ihåg att likhetstecknets användning grundar sig på en överenskommelse, en konvention. Att ordningen mellan de ingående talen i en addition kan bytas till exempel $6 + 5 = 5 + 6$ är inte en konvention utan en rent matematisk struktur. Det är en egenskap hos talen som gör att de kan hanteras på ett visst sätt. Det går inte att bevisa att likhetstecknet representerar en relation, snarare än en uppmaning att göra något med de ingående talen. Men genom att uppmuntra eleverna att motivera sina ståndpunkter, till exempel varför de anser att ett matematiskt uttryck inte kan skrivas på ett visst sätt, kan dörren öppnas för nya insikter om vad som är konventioner och vad som är matematiska egenskaper.

Riktmärken

Elever går inte nödvändigtvis igenom en sekvens av distinkta faser då de utvecklar sina uppfattningar om likhetstecknet och man bör inte anta att alla elever följer samma utvecklingsgång. Det finns dock några riktmärken för undervisningen att ta hänsyn till.

- Att få elever att uttrycka sig specifikt om vad de tror att likhetstecknet betyder, är ett första riktmärke för att de ska kunna förändra sina uppfattningar. Om eleverna ska kunna jämföra och kontrastera olika uppfattningar, måste de ha klart för sig vilka deras egna föreställningar är. De behöver få andra utmaningar än att bara jämföra svar på uppgifter som $8 + 4 = \square + 5$. Vissa elever kan säga att likhetstecknet måste föregås av två tal som sammanbinds med ett plus eller ett minus och sedan följas av svaret (vilket resulterar i 12 i uppgiften ovan). Andra kan säga att man måste använda alla ingående tal (vilket resulterar i svaret 17). Även om ingen av dessa uppfattningar är korrekta så är det ett framsteg att de blir tydligt formulerade. Det ger en god grund för fortsatta utmaningar.
- Det andra riktmärket är när eleven accepterar några matematiska uttryck som sanna, även om de inte har formen $a + b = c$. Det kan vara $8 = 5 + 3$, $8 = 8$, $3 + 5 = 8 + 0$ eller $3 + 5 = 3 + 5$.
- Det tredje riktmärket är att eleven uppfattar att likhetstecknet betecknar en relation mellan två ekvivalenta tal. Här jämför eleverna talen till vänster och höger om likhetstecknet genom att beräkna båda sidorna.
- Det fjärde riktmärket uppnås när eleverna kan jämföra de matematiska uttrycken utan att utföra beräkningar.

Dessa riktmärken är en vägledning. Alla elever i en viss klass kommer inte att uppnå dessa samtidigt och alla elever kommer inte heller att följa denna utvecklingsgång. Vissa elever använder ett sådant relationellt tänkande som kännetecknar den fjärde nivån redan i den inledande undervisningen om att likhetstecknet representerar en relation mellan tal. I de tidiga årskurserna kommer variationen av uppfattningar vara stor under tiden som eleverna strävar efter att förstå hur likhetstecknet används.

Referenser

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically. Integrating arithmetic & algebra in elementary school*. Heinemann.

Fuson, K. C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. I D. A. Grouws (Red), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 243–275). Macmillan.

Larsson, K. (2011). Subtraktion. *Nämnaren*, (4), 46–50.