

Laborativt arbetssätt

Lena Nilsson, NCM

Under 2000-talet har ett laborativt arbetssätt i matematik fått ett allt större genomslag, visar en kunskapsöversikt av Rystedt och Trygg (2010). Ibland används orden induktiv och deduktiv för att beskriva olika arbetssätt. I ett undersökande eller utforskande arbetssätt har eleverna tillgång till material av allehanda slag och undersöker många snarlika fall för att sedan dra en slutsats. Eleverna delar exempelvis upp talet 10 på alla tänkbara sätt, med olika material, i olika kontexter, de resonerar och diskuterar för att efter hand lära sig alla tiokamrater. Detta kallas för en *induktiv metod* och innebär att man går från det specifika till det generella.

I en mer traditionell undervisning demonstrerar läraren eller läroboken en metod eller ett matematiskt samband, till exempel en beskrivning av vad subtraktion är. Eleverna gör sedan egna beräkningar utifrån givna problem där det finns exempel på subtraktioner som både innebär ”ta bort” och ”att jämföra”. Detta kallas för en *deduktiv metod* som går från det generella till det specifika.

Laborativt eller konkretiserande arbetssätt

Laborativt material kan användas både induktivt och deduktivt. När det används induktivt kallas det ofta ett *laborativt arbetssätt*. Då kan alla elever delta och starta från den nivå de befinner sig på. Ifall området är helt nytt för eleverna kan de starta med den informella förståelse de redan har med sig. Alla måste dock inte börja med konkret arbete, om elever har förkunskaper kan de gå direkt in på en mer abstrakt nivå. De kan sedan stanna olika länge på de olika nivåerna när de i olika takt arbetar sig vidare till den helt abstrakta nivån. När laborativt material används deduktivt kallas det istället för ett *konkretiserande arbetssätt* och innebär en omvänd arbetsgång. Alla elever startar i den formella och abstrakta matematiken. För de elever som inte klarar detta får läraren arrangera ett konkretiserande innehåll, vilket i praktiken ofta betyder att dessa elever får använda laborativt material medan övriga elever fortsätter på den abstrakta nivån.

Konkret och abstrakt

Till vardags säger vi ofta att eleverna ska ”gå från det konkreta till det abstrakta”. Så är det i regel för yngre elever, men vi bör även hålla öppet för den andra riktningen, alltså från det abstrakta till det konkreta. Att konkretisera och åskådliggöra ett abstrakt och generellt matematiskt uttryck är många gånger betydligt mer utmanande, för såväl lärare som elever, än att följa en arbetsgång från det konkreta till det abstrakta. Svårigheten från konkret till abstrakt är att säkerställa att eleverna verkligen når det abstrakta. Vilken riktning vi än väljer är det ändå vad som händer mellan dessa båda ytterligheter som är det mest avgörande för att det ska uppstå en möjlighet för eleven att lära. Av den anledningen ska vi titta närmare

på några beskrivningar av laborativt arbete. Först beskrivs en arbetsgång som i huvudsak berör lärarens planering, sedan följer en arbetsgång som mer detaljerat beskriver elevens process från konkret arbete till abstrakt kunnande och slutligen några ord om tanketavlor och elevers dokumentation som hör samman med deras laborativa arbete.

Laborativa aktiviteters planering

En laborativ aktivitet planeras ganska självklart med de tre delarna introduktion, genomförande och uppföljning. Här belyses några inslag som är värda att ha i åtanke vid planering.

Gemensam introduktion

Introduktionen innebär att elever får en inblick i vad som ska hända eller vad de ska göra. Den ska skapa förväntan och nyfikenhet och bör också skapa frågor hos eleverna som motiverar dem att undersöka såväl material som aktivitet och vad arbetet kan leda till. Därmed inte sagt att läraren behöver berätta vad som ska hända eller vad eleverna förväntas lära sig. I vissa aktiviteter kan det vara klokt med en introduktion där läraren använder material som motsvarar det eleverna ska använda, men i större format. Materialet syns bättre och visar att det inte är materialet i sig som är det viktiga.

Genomförande av aktivitet

Det laborativa arbetet kan ske enskilt där eleverna får egen tid att tänka och reflektera, i par, i grupp eller i helklass som ger förutsättningar för att sätta ord på det som sker i aktiviteten. I praktiken blir det vanligtvis en kombination. Denna del kan många gånger vara den som är enklast för läraren att planera då det ofta finns detaljerade beskrivningar i böcker, pärmar och på webben. Under det laborativa arbetet har läraren möjlighet att ”se hur eleverna tänker” om olika matematikinnehåll. Eleverna ska inte enbart arbeta praktiskt med konkret material, de ska även ges möjlighet att arbeta halvkonkret, halvabstrakt för att nå ett abstrakt kunnande, se nedan.

Gemensam uppföljning och diskussion

Den gemensamma uppföljningen är betydelsefull och avgörande för elevernas långsiktiga lärande. Om eleverna enbart plockar iordning efter sig i slutet av genomförandet av aktiviteten är risken stor att den mest får karaktär av ”görande”. När läraren istället avslutar en aktivitet på ett genomtänkt sätt med en uppföljande diskussion finns möjlighet att förstärka inläringen och undanröja missuppfattningar. Genom att jämföra begreppsuppfattningar och Lösningsstrategier som eleverna redogör för kan de tillägna sig allt effektivare tankesätt.

Läraren kan här hjälpa eleverna att bli medvetna om vilket matematiskt innehåll som har behandlats, även om det ofta är relativt uppenbart, och vilka matematiska förmågor som har kommit till uttryck. Det senare är inte alltid lika uppenbart utan behöver belysas av läraren.

Fyra nivåer

Ett sätt att beskriva och göra elever medvetna om vad som händer på vägen mellan konkret och abstrakt är att de tydligt får arbeta med nivåerna halvkonkret och halvabstrakt (Heddens, 1986).

Konkret

Den grundläggande nivån innebär arbete med fysiskt material, ofta i plast, trä eller papper, som kan hanteras manuellt. Sakerna kan vändas och vridas, de går att uppleva med flera sinnen. I många fall är det konkreta materialet en abstraktion av ett annat verkligt föremål, till exempel leksaker och plockmaterial som är tillverkade i en annan skala än det som de representerar. På denna nivå kan det laborativa materialet fylla en funktion för att åskådliggöra något abstrakt eller för att underlätta vid beräkningar. Det talade ordet är viktigt när både lärare och elever formulerar det som sker. Särskilt vid aktiviteter där det händer något, exempelvis vid addition då två mängder läggs samman eller vid subtraktion då en mängd tas bort, kan det bli tydligare åskådning och samtal än när motsvarande händelse visas med en bild.

Halvkonkret

För att lämna den helt konkreta nivån övergår eleverna till att använda bilder. Dessa kan vara elevers egna naturtrogna teckningar, är det en cykel ska det synas att det är en cykel, men lika gärna fotografier eller andra illustrationer som exempelvis memorykort. Det finns elever som tycker så mycket om att rita och måla att de fastnar i det och helt missar matematiklärandet, medan andra elever avskyr att teckna och vill för allt i världen slippa det på matematiklektionerna. Läraren måste avgöra när det är dags för eleven att gå vidare i processen eller att hitta alternativ som gynnar elevens lärande.

Halvabstrakt

Eleverna lämnar sina föreställande bilder till förmån för egna informella symboler. Leksaksbilen som tidigare har ritats omsorgsfullt med hjul, dörrar och strålkastare kan nu ersättas av en ruta eller ett streck. Det viktigaste är att eleven själv vet vad den valda symbolen representerar.

Abstrakt

Eleven går från sina egna informella symboler till den formella matematiken med siffror, andra symboler, räknelagar och regler. Förhoppningsvis har eleven då med sig en förståelse för vad de formella uttrycken står för. I annat fall finns det möjlighet för eleven att gå tillbaka både i sin dokumentation och i sina tankar för att se varifrån ett formellt uttryck härstammar.

Dessa fyra nivåer från konkret till abstrakt har inga vattentäta skott mellan sig. Naturligtvis kan eleverna ha med sig laborativt material eller bilder som stöd för tanken på senare nivåer, men det finns åtminstone två betydelsefulla inslag att uppmärksamma. Dels måste eleverna få tillräckligt med tid för att arbeta på de mellanliggande nivåerna. För en lärare som redan behärskar det matematiska innehållet och har god förståelse för det aktuella

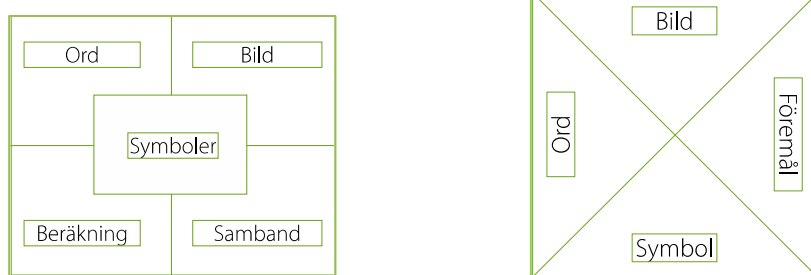
begreppet är det lätt att bli lite otålig och skynda på eleverna, kanske till och med ibland överväga att hoppa över de mellanliggande nivåerna och istället berätta för eleverna vad som händer. Dels är det nödvändigt att se till att eleverna inte fastnar på den konkreta nivån utan att de ges möjlighet att koppla sina erfarenheter från det konkreta arbetet med material via bilder och informella symboler till abstrakt och generell matematik. I båda fallen kan det annars resultera i att det laborativa arbetet enbart har blivit ett tidsödande ”görande” som inte fyller någon verklig funktion för elevens lärande.

Tanketavlor

Ovan gjorda beskrivningar är relativt linjära. Andra alternativ är att arbeta med representationer i en ordning som antingen läraren eller eleven själv bestämmer. Ett exempel (Figur 1) är att använda någon form av tanketavlor (McIntosh, 2020).

Figur 1

Två olika slags tanketavlor, en för enskilt arbete och en för arbete i par eller liten grupp



Tanketavlor är också ett konkret exempel på hur elever kan dokumentera både vad de gör och vad de lär sig. En betydande orsak till varför elever ska dokumentera är att det laborativa arbetet annars lätt kan bli osynligt. När materialet är bortplockat ”finns inget kvar” om ingen form av dokumentation har gjorts. Då kan till och med en ifylld sida i en traditionell lärobok vara mer konkret. Elevernas dokumentation kan göras med stor variation. Ett enkelt sätt är att fotografera under pågående arbete och sedan sätta text till. Dagens teknik kan verkligen underlätta oavsett om det är eleven själv eller läraren som skriver, eller om texten talas in. Olika former av dokumentation kan hjälpa elever att utveckla begrepp steg för steg, eller att se likheter och skillnader mellan olika begrepp. De kan också tydliggöra vad elever kan före och efter ett arbetsområde och hjälpa dem att utveckla ett mer matematiskt språk (Rystedt & Trygg, 2013). Dokumentationen kan också fungera som ett sätt att kommunicera.

När dessa dokumentationer är sparade finns möjligheter att även använda dem till analys och bedömning. Eleven, läraren och föräldrar kan se vad eleven har arbetat med och vilken utveckling som har skett. Elevernas dokumentationer ger också läraren tillfälle att upptäcka missuppfattningar i ett tidigt skede.

Vilken arbetsgång som används, hur och vid vilket tillfälle, måste avgöras från lektion till lektion, ytterst beroende på vilket matematikinnehåll som är det primära målet för elevernas lärande.

Olika slags material

De laborativa matematikmaterial som används i dagens undervisning kan delas in i tre grupper (Rystedt & Trygg, 2010):

- *Vardagliga föremål* som finns i hemmen, på skolor och arbetsplatser, i samhället och i naturen kan användas i matematikundervisningen. Ett vanligt exempel är redskap för att mäta, som måttband, meterstock, hushållsmått, våg och termometer. Det som ofta benämns som plockmaterial kan vara vardagliga föremål som gem, knappar, glasspinnar, stenar, snäckor och kastanjer.
- *Spel* kan avse både kommersiella spel och sådana som är konstruerade och tillverkade av lärare och elever. Det kan vara allt från traditionella spel som schack och fia till hypermoderna digitala spel.
- *Pedagogiska material* är speciellt framtagna och producerade för att användas i matematikundervisningen. Några vanliga exempel är tiobasmaterial, multilink, geostrip, cuisenairestavar och logiska block.

Pedagogiska material har en lång historia. Vi kan gå tillbaka till den grekiske filosofen Aristoteles som redan på 300-talet f Kr gav uttryck för att kunskap kan utvinnas genom att vi först studerar många konkreta exempel för att upptäcka vad som är utmärkande för dem, det vill säga en induktiv metod. Han betraktade matematik som abstraktioner av tingens konkreta egenskaper. Här görs några nedslag från slutet av 1800-talet för att lyfta fram några av dem som bidragit till utvecklingen av laborativa material.

Friedrich Fröbel var inspirerad av den schweiziske pedagogen Johann Heinrich Pestalozzis idéer om att använda alla sinnen i det första steget i läroprocessen (Fröbel, 1995). Fröbel konstruerade ett material, som fått namnet *Frøbels lekgåvor*, vilket är särskilt riktat mot barn och som fått stor betydelse i förskolan.

Maria Montessori var egentligen läkare men öppnade 1907 en skola i Rom för de så kallade ”obildbara” barnen. Hon observerade att intresseförändringar hos alla barn följer ett givet mönster. Hennes idé om inlärning handlar om att gå från det konkreta till det abstrakta och hon arbetade fram ett matematikmaterial som bland annat lyfter fram taluppfattning och aritmetiska begrepp (Montessori, 2013). Materialet används idag även av elever i grundskolan.

Anna Kruse var lärarinna och senare föreståndarinna för en skola i Stockholm. Hon har i sin bok *Åskådningsmatematik* (Kruse, 1910) beskrivit hur material och stoff, snarare än lärarens förklaringar ska leda till att eleven gör egna upptäckter. Hon förespråkar ett arbetssätt som är laborativt och undersökande och menar att siffror inte ska användas för

tidigt. Kruse talar sig varm för ett material som hon kallar räknelappar och som hon fått inspiration till från en dansk småskolelärarinna. Lapparna är kvadratiska, 3 x 3 cm, röda på ena sidan och blå på den andra.

George Cuisenaire var belgisk folkskollärare. Han såg att många av eleverna hade svårt att skilja på tals storlek och konstruerade då ett material med tio olika långa stavar. Senare kom den engelske psykologen och matematikprofessorn Caleb Gattegno att sprida information om stavarna och hur de kan användas i matematikundervisningen. I Sverige har Gudrun Malmer gjort en stor insats för att sprida materialet och visa lärare hur stavarna bör användas (Malmer, 1990). Om stavarna ska komma till sin fulla rätt är det viktigt att de används som ett relationsmaterial och inte så att varje färg knyts till ett specifikt tal. Malmer utvecklade även andra laborativa material och hon betonade också språkets betydelse som stöd i elevernas lärande.

Zoltan Dienes är ett relativt okänt namn i Sverige, men material som han är upphovsman till är desto mer bekanta. Det är han som bland annat har konstruerat den ursprungliga versionen av det vanligt förekommande multibasmaterial, de första konkreta algebraiska materialen samt de logiska blocken. Dessa material och tillhörande instruktioner ligger till grund för dagens användning av laborativa material i undervisningen. Hans kanske mest kända bok *Building up mathematics* (Dienes, 1960) beskriver inte bara material och aktiviteter utan kopplar också samman det laborativa arbetet med idéer om elevers gemensamma lärande i grupparbeten. Dienes föddes i Ungern och levde större delen av sitt långa liv i England.

Resultat från studier

I en kunskapsöversikt om laborativ matematikundervisning (Rystedt & Trygg, 2010) framkom att många studier visar positiva resultat. Enligt de kriterier som hade satts upp i respektive undersökning presterar elever som använder laborativa material bättre än de elever som inte gör det. Resultatet stöds av en metaanalys av 55 studier som täcker in hela spannet från förskola till college (Carbonneau et al., 2013). I denna analys framkom flera variabler som påverkade resultatet, exempelvis mångfalden av representationer samt hur aktiv läraren är. Några resultat från dessa översikter är:

- Lärarens erfarenhet och kunnande om material är avgörande för hur de används och vilka elevresultat arbetet ger.
- Elever ser inte alltid relationen mellan ett material och det begrepp det ska representera. Det finns många exempel där elever kämpar ihärdigt med att se "något" i materialet, men tyvärr helt fel saker. I värsta fall kan det till och med leda till att elever får missuppfattningar om ett särskilt matematikinnehåll.
- Ska arbete med laborativa material ge resultat behöver de användas långsiktigt. Enstaka laborativa tillfällen tillför i regel inte mycket, kanske skapar de då snarare förvirring hos eleven. En undervisning som genomsyras av det

laborativa arbetssättet tillåter att material alltid finns till hands, även om det under perioder inte alls behöver användas.

- Ju äldre eleverna blir, desto mer ansvar bör de själva få ta om och när de vill använda material.
- Lärare som oreflekterat börjar använda laborativa material för att förändra sin undervisning når sällan särskilt långt. Laborativa material kan inte på egen hand förväntas förbättra undervisningen.

De mest centrala slutsatserna är:

- De laborativa materialen i sig ger inte eleverna matematiska insikter. Matematik är ett värde som läraren måste tillföra och/eller lyfta fram.
- Lärarens roll är avgörande för vilken effekt den laborativa matematikundervisningen får för elevernas lärande.

Med andra ord räcker det inte att bara se till att det finns gott om laborativa matematikmaterial i ett klassrum och att dessa används. Istället måste såväl material som aktiviteter sättas i ett sammanhang som är relevant för eleverna och där de själva kan se vilka framsteg de gör så att de med gott självförtroende helt kan släppa ett material och förlita sig på att de ändå förstår matematikinnehållet.

Referenser

Carbonneau, K. J., Marley, S. C., & Selig, J. P. (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology*, 105(2), 380–400. <https://doi.org/10.1037/a0031084>

Dienes, Z. (1960). *Building up mathematics*. Hutchinson Educational.

Fröbel, F. (1995). *Människans fostran*. Studentlitteratur.

Heddens, J. (1986). Bridging the gap between the concrete and abstract. *The Arithmetic Teacher*, 33(6), 14–17. <https://www.jstor.org/stable/41192835>

Kruse, A. (1910). *Åskådningsmatematik*. Norstedt & Söners förlag. [Nytryck 2010].

Malmer, G. (1990). *Kreativ matematik*. Ekelunds förlag.

McIntosh, A. (2020). *Förstå och använda tal: en handbok*. (Reviderad.) NCM, Göteborgs universitet.

Montessori, M. (2013). *The Montessori method*. Transaction publishers. (Originalutgåvan publicerad 1964)

Rystedt, E., & Trygg, L. (2010). *Laborativ matematikundervisning – vad vet vi?* NCM, Göteborgs universitet.

Rystedt, E., & Trygg, L. (2013). *Matematikverkstad – en handledning för laborativ matematikundervisning*. NCM, Göteborgs universitet.