

Representationer, uttrycksformer och begrepp

Ola Helenius, Elisabeth Rystedt och Lena Trygg, NCM

Den här texten inleds med ett besök i en förskoleklass där läraren medvetet använder flera uttrycksformer och olika representationer av antal när eleverna sorterar djur.

Eleverna i förskoleklassen sitter i en ring på golvet. I mitten ligger en stor hög med plastdjur. Läraren frågar hur djuren kan sorteras. Många ivriga händer vinkar och alla får möjlighet att ge ett förslag: djur som finns i skogen eller djur som man kan ha hemma, djur som finns eller inte finns i Sverige, djur som är gulliga eller otäcka och så vidare.

I par får eleverna prata och bestämma hur de vill sortera sina tilldelade djur. De lägger djuren i två högar och ritar av dem. Kim som nyligen har brutit armen och har svårt för att hålla i en penna får istället ta kort på sina djur. Alla försöker räkna antalet djur i varje hög, men några elever har svårt att räkna i rätt takt och kan då som stöd lägga en platsiffra vid varje djur. Några elever kan skriva med bokstäver vad det är för djur och skriva antalet i varje hög med siffror. I slutet av lektionen tittar alla tillsammans på hur paren har sorterat sina djur. Eleverna jämför vilka som har gjort lika och om något par hittat på ett alldeles eget sätt att sortera sina djur på. Slutligen skrivs antalet djur i varje hög på tavlan. Läraren tar fram en miniräknare, summerar och ”tänker högt” då varje antal slås in. Allra sist tittar alla på resultatet i miniräknaren. Hur kan ett så stort tal som 143 tolkas?

I förskoleklassens djursortering förekommer flera olika uttrycksformer och representationer och en del av god begreppsförståelse är att kunna använda dem på ett flexibelt sätt. Men även under uppbyggnaden av begreppsförståelse spelar användningen av dem en stor roll. Att representera och uttrycka ett begrepp på olika sätt är därmed både ett medel och ett mål för begreppsförståelsen.

Diskussioner förs bland matematikdidaktiker om huruvida benämningarna uttrycksformer och representationer är synonyma eller om de står för olika företeelser. En användbar tolkning är att representationen står för något, till exempel ett matematiskt begrepp, medan uttrycksformen anger formen, det vill säga hur matematiken kommuniceras. Ett konkret exempel på detta är när en person ritar flera olika trianglar som alla får *representera* begreppet triangel, men där *uttrycksformen* i samtliga fall är en bild.

Begrepp

I Nationalencyklopedin förklaras begrepp med ”det abstrakta innehållet hos en språklig term”. Ett matematiskt begrepp är inte för evigt definitivt, exakt, absolut och klart avgränsat – tvärtom kan det förändras och utvecklas över tid i takt med att matematiken

och dess användning utvecklas. Begrepp är mänskliga tankekonstruktioner och kan betraktas som matematikens byggstenar. Ett matematiskt begrepp kan vara ett matematiskt *objekt* som till exempel en kvadrat, en *process* som till exempel subtraktion eller en *egenskap* som till exempel volym. Med exempelvis begreppet area avses det abstrakta innehåll vi lägger i benämningen area eller med andra ord – vad vi menar med area.

Eftersom ett matematiskt begrepp är en tankekonstruktion behövs någon form av ”etiketter” för att vi ska kunna kommunicera med och om det. Begreppet måste uttryckas på något sätt och därmed representeras visuellt, verbalt eller i handling. Men det är i praktiken sällan uppenbart vad som kommer först – själva begreppet eller olika sätt att uttrycka det. Tänk på begreppet *rund*. Å ena sidan kan man definiera rund som formen på en cirkel. En cirkel kan ges en exakt matematisk beskrivning, till exempel som alla punkter som ligger på ett visst avstånd från en given punkt. Men å andra sidan stöter barn på ordet rund och utforskar dess betydelse långt innan de kan sägas ha en färdig abstrakt idé av vad det betyder. De erfår olika representationer av rundhet redan innan de känner själva begreppet.

Att arbeta med begrepp

När vi arbetar med begrepp i skolan behöver flera delar beaktas:

Begreppen representeras med hjälp av olika uttrycksformer

Det kan ske med ord, bilder och andra symboler eller med situationer och olika konkreta material.

Begreppens egenskaper

I det här sammanhanget betraktas egenskaper synonymt med vilka kännetecken eller vilken beskaffenhet ett begrepp har. En egenskap hos addition är att det inte spelar någon roll i vilken ordning man adderar. Egenskaper hos ett matematiskt begrepp kan anges i definitionen. Egenskapen att arean av en yta inte ändras om ytan roteras kan till exempel ingå i en grundläggande definition av begreppet area. De matematiska begreppens egenskaper kan också fastställas genom att man genomför ett bevis, till exempel visar att varje triangel i den euklidiska geometrin har vinkelsumman 180° .

Relationer till andra begrepp

Varje matematiskt begrepp anknyter till andra begrepp. Det finns exempelvis en relation mellan begreppet kvadrat och begreppet area: varje kvadrat har en area. Däremot finns ingen lika uppenbar relation mellan kvadrat och subtraktion: det är inte självklart vad det skulle betyda att subtrahera en kvadrat från en annan kvadrat. Det går däremot att subtrahera arean på en mindre kvadrat från arean på en större kvadrat för att få fram skillnaden mellan storleken på kvadraterna. Begreppet area är inte begränsat till att handla om kvadrater utan har mening för såväl regelbundna som oregelbundna former.

Definition

I en definition försöker man så exakt som möjligt att precisera vad som utmärker det aktuella begreppet, så att det också går att särskilja från andra begrepp.

Representationer

Representationer ersätter något och står i stället för något annat. Själva ordet representation kommer av det latinska 'repraesenta' 'tio' som betyder "åskådliggörande framställning eller exempel". En viktig egenskap hos en representation är att den gör det representerade indirekt närvarande för användaren.

(Nationalencyklopedin)

I engelskspråkig litteratur refererar termen representation till både process och produkt.

"... to the act of capturing a mathematical concept or relationship in some form and to the form itself."

(NCTM, 2000)

En *representation* är alltså något som med avsikt används eller utformas för att i tanke, handling eller kommunikation ersätta det man syftar på. Det kan vara fråga om att ett abstrakt begrepp representeras av något konkret och påtagligt. Begreppet finns då indirekt närvarande på något sätt via sin representation. Vägmärket för "förbud mot infart med fordon" (en röd cirkel med en gul rektangel) representerar enkelriktad färdväg och får själva förbudet att "närvara" (Figur 1).

Figur 1

Ett indirekt närvarande begrepp



Ett typiskt matematiskt exempel är att vi använder siffror när vi arbetar med tal. Siffran står där istället för själva talet som man inte kan se, men som man förväntas associera till. Tecknet "3" är en symbol för talet tre, tecknet är som ett "namn" på begreppet. När vi skriver 38 kan vi se de båda siffrorna tillsammans som en symbol eller siffrorna var för sig som två symboler vars placering blir mycket viktig. Om vi istället placerar siffran 8 som en exponent med 3 som bas, 3^8 , får vi en symbol för ett helt annat tal. Tecknet π är som ett "namn" på begreppet pi. En representation kan alltså vara en symbol, en bild, ett objekt eller något annat som representerar ett matematiskt objekt. Andra exempel på detta är

symbolerna 1 och 0 eller fem prickar på två tärningar. Båda fallen representerar talet tio, men med två olika former av representation, symboler respektive bild. Ett sätt att beskriva dessa former är att dela in dem i olika register. Ett register innehåller representationer som är nära relaterade till varandra. Ett exempel på ett sådant register är det ikoniska registret som innehåller skisser, bilder och mönster. Ett annat är det symboliska registret som innehåller symboler såsom siffror, olika matematiska tecken och bokstäver.

Matematisk aktivitet handlar ofta om att ersätta en representation med en annan, exempelvis kan ett visst matematiskt uttryck representera ett annat. För att förstå användbarheten i detta kan vi exempelvis betrakta det symboliska uttrycket $(167+168+169)/3$. Den första tolkningen är kanske att detta representerar en beräkning som ska utföras. Men om vi istället ser att det kan representera ett uttryck för medelvärdet av de tre talen i täljaren så blir det uppenbart att "svaret" är 168. Representationer kan dessutom ha dubbla roller, vi kan exempelvis låta konkreta föremål representera matematiska begrepp och vice versa. En rektangel på ett papper kan få representera fotbollsplanen på skolgården, men fotbollsplanen kan i ett annat sammanhang få agera representant för en (abstrakt) rektangel. Ett laborativt material som markörer kan fungera som en konkret representation för abstrakta tal när de används för att visa relationen mellan exempelvis jämna och udda tal. De kan även användas för att modellera verkliga situationer, som när ett visst antal markörer representerar motsvarande antal föremål eller personer.

... och uttrycksformer

Ibland används begreppet uttrycksform för att benämna det som vi ovan kallar representationer. I Nämnarenartikeln *Matematiska uttrycksformer och representationer* (Gustafsson et al., 2011) menar författarna att de båda orden ofta används för samma sak, men i artikeln tas de upp och förklaras separat. Liksom i det tidigare exemplet hör uttrycksformen samman med i vilka former som representationer uttrycks, men i artikeln för de även in med vilka medier som detta sker. Exempel ges på hur bildlig representation kan uttryckas med hjälp av en graf på papper, med grafitande räknare, på interaktiv skrivtavla et cetera. Artikeln sammanfattas med att representationer och uttrycksformer naturligt går in i varandra och att det många gånger är enklast att tänka på dem som ett begrepp med både innehåll och form. Artikelförfattarna anser att oavsett synsätt så är det väsentliga att representationer och uttrycksformer är till för att vi ska få möjlighet att tänka på, använda och kommunicera matematiska begrepp på olika sätt.

Förstå och använda olika uttrycksformer

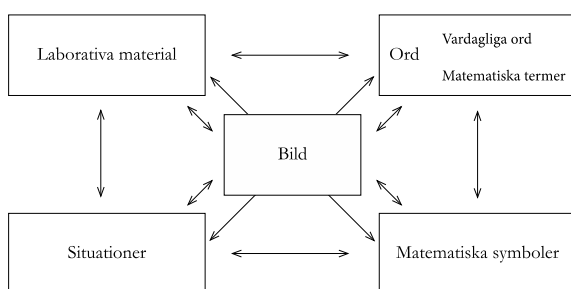
Lärande i matematik kan beskrivas som en kumulativ process där man stegvis får tillgång till allt fler och mer avancerade uttrycksformer och förstår hur de hänger samman och hur de kan användas. Att kunna uttrycka sig på flera sätt är ett tecken på god begreppsförmåga. Den som kan använda flera olika sätt att beskriva samma begrepp har en rikare begrepps bild och därmed en mer funktionell begreppskunskap. För att få stöd i sin begreppsutveckling behöver eleverna ges möjlighet att möta ett och samma matematiska begrepp med hjälp av flera olika uttrycksformer. Begreppet kan därigenom bli mer konkret

och tillgängligt för reflektion, samt hjälpa eleverna att få överblick – och att strukturera sitt tänkande. Därför räcker det inte att enbart räkna med siffror och bokstäver i en lärobok utan eleverna måste få arbeta med fler uttrycksformer som att

- undersöka med laborativa material, ”penna och papper” eller digitala hjälpmedel
- tala och skriva matematik med såväl vardagliga ord och matematiska termer
- använda bildspråk, med allt ifrån egna informella skisser till professionellt framtagna illustrationer
- exemplifiera med hjälp av verkliga och fiktiva situationer i närmiljö och omvärld
- beskriva sina tankegångar med hjälp av, för kunskapsnivån lämpligt, matematiskt symbolspråk.

Figur 2

Schematisk uppdelning av uttrycksformer



Figur 2 är en omarbetad uppdelning på fem uttrycksformer utifrån Richard Leshs (1981) schematiska bild över representationsformer och deras kopplingar till varandra. Rubriken *Ord* inkluderar både informellt vardagsspråk och formella matematiska termer. Både *Ord* och *Symboler* kan förekomma i såväl tal som skrift. Man kan också välja andra sätt för uppdelning, som exempelvis i fysiska, bildliga eller grafiska, verbala, numeriska och symboliska uttrycksformer.

Specifika matematiska uttrycksformer

Vissa symboliska representationsformer är speciellt utvecklade för matematiken och kan därför kallas ”matematikens uttrycksformer”. Dessa används inom matematiken men också i matematikens tillämpningar i andra ämnen. Matematiska representationsformer som tillhör grundskolans matematik är:

- siffror och positionssystemet
- aritmetiska symbolsystem – hur vi skriver beräkningar

- algebraiska symbolsystem – hur vi skriver algebraiska uttryck och ekvationer
- tabeller
- tallinjer och koordinatsystem
- grafer och diagram.

Översätta och välja representationer och sätt att uttrycka dem

Elever behöver utveckla sin förmåga att översätta och välja mellan olika representationer. Det innebär förståelse för representationernas inbördes förhållande, att ha kännedom om deras styrkor och svagheter samt att kunna välja lämplig uttrycksform beroende på situation och syfte. När elever aktivt engageras i att uppfatta sambanden mellan olika representationer, stärks den matematiska förståelsen av begreppet, men det är inte givet att eleven på egen hand kan översätta mellan olika uttrycksformer som till exempel mellan laborativa aktiviteter och matematiska symboler. Genom att se på vilka sätt som eleven representerar ett aktuellt begrepp kan läraren få värdefull inblick i elevens tänkande. Detta ger stöd för läraren att, där så behövs, bygga broar mellan elevens informella och matematikens formella uttrycksformer.

Referenser

Gustafsson, I.-M., Jakobsson, M., Nilsson, I., & Zippert, M. (2011). Matematiska uttrycksformer och representationer. *Nämnamn*, (3), 36–45.

Lesh, R. (1981). Applied mathematical problem solving. *Educational studies in mathematics*, 12, 235–264. <https://doi.org/10.1007/BF00305624>

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics. <https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Principles-and-Standards/>