

Pärlband och tallinjer

Hanne Hafnor Dahl & May Else Nohr, Högskolan i Oslo

I texten beskrivs hur pärlband används som modell för att arbeta med elevers utveckling av taluppfattning. Texten baseras på ett vetenskapligt arbete (Nohr & Dahl, 2009) och är en lättare bearbetning av en norsk artikel publicerad i Nämnaren (Dahl & Nohr, 2010) och översatt av Berit Bergius.

Ett sätt att arbeta med taluppfattning är att skapa konkreta och så småningom alltmer abstrakta bilder av talen ordnade i följd. Pärlor på rad kan vara en utgångspunkt för att visualisera en bild av heltal. Talraden kan sedan succesivt övergå till en tallinje, det vill säga en kontinuerlig bild där alla tal finns med, även de som inte är heltal.

Pärlband

Ett pärlband är en konkret representation av talraden. Det kan bestå av 10, 20 eller 100 pärlor beroende på vilket talområde som eleverna arbetar med. Ett 20-band är indelat i 5-grupper (Figur 1), det vill säga pärlorna är grupperade fem och fem i två olika färger.

Figur 1

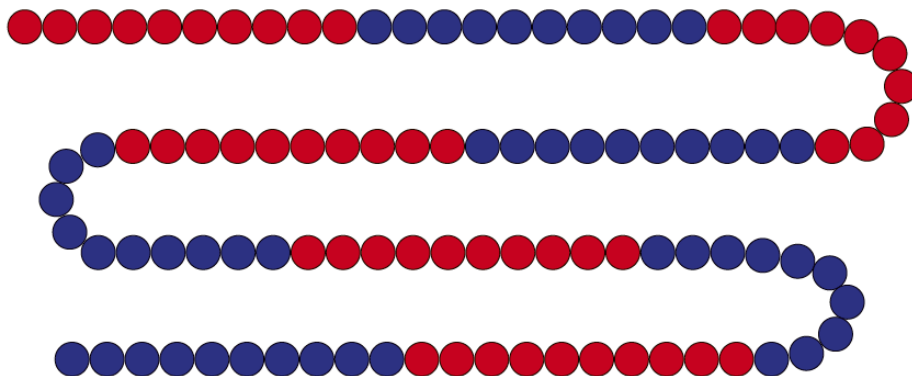
Pärlband uppdelat i femgrupper



Ett 100-band är indelat i 10-grupper (Figur 2). Pärlorna är grupperade 10 och 10 i två olika färger.

Figur 2

Pärlband uppdelat i tiogrupper



Pärlbandet är en visualisering av talraden och utgör ett stöd för elevernas mentala förståelse av talen. Det gäller både talens inbördes placering och mängden som talen representerar. Målet är att eleverna ska utveckla användbara talbilder och att de ska upptäcka relationer mellan talen, som att

- talet 6 är 1 pärla mer än 5 och samtidigt 4 pärlor färre än 10
- talet 29 är $10 + 10 + 9$ och samtidigt $10 + 10 + 10 - 1$.

Pärlband i nybörjarundervisningen

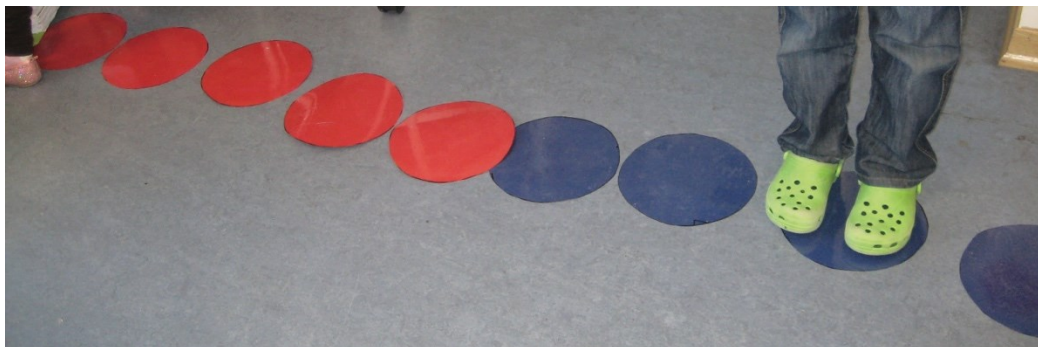
5- eller 10-grupperingarna ska hjälpa eleverna att finna givna tal och att bekanta sig med talens inbördes placering. I pärlbanden syns också mängden som talet står för. Femgrupperna blir ett stöd när eleverna ska avläsa tal. De kan se att 6 pärlor består av en 5-grupp och en pärla till i en annan färg. 100-pärlbandens 10-grupper ger eleverna stöd i att se att i 64 finns sex tior och att det i 69 finns nästan sju tior. Tior och femmor är viktiga hållpunkter.

Talrad på golvet

Under utprovningen av pärlbandsmodellerna kom vi på idén om att använda en talrad på golvet (Figur 3). Det är en konkret och fysisk modell, anpassad till de yngsta eleverna. De kan räkna framåt och bakåt samtidigt som de kan gå och stå på den.

Figur 3

Talrad på golvet



Talraden på golvet består av plastade pappcirklar (cirka 20 centimeter i diameter) i två olika färger. De är strukturerade i 5-grupper. Man kan starta med en talrad med tio cirklar och efterhand utvidga till tjugio. Cirklarna placeras på golvet och eleverna kan gå och stå på dem medan de räknar. Det är viktigt att definiera riktningen i räknandet, det vill säga att man alltid börjar från vänster.

Vi vill undvika att eleverna bara läser av talsymboler. Därför ska cirklarna vara omärkta (Figur 4). För att hitta *talet* 7 måste eleven istället se att det består av en 5-grupp och två enstaka. Eleven kan då samtidigt se att 7 är 2 mer än 5 och att 5 är 2 mindre än 7.

Figur 4

Omärkta cirklar



För *talet* 9 kan eleven se att det består av *en 5-grupp och 4 enstaka* samt att *9 är 1 mindre än 10* och att *10 är 1 mer än 9*.

Aktiviteten *Gissa ett tal* passar bra när vi ska arbeta med talens inbördes placering. Vi sätter en lapp med ett skrivet tal på en elevs rygg, till exempel talet 9. Eleven ska lista ut vilket talet är och ställer sig på vilken cirkel som helst på talraden på golvet. Om han ställt sig på den femte cirkeln frågar han *är talet större eller mindre än 5?* Sedan ställer han sig kanske på den tionde cirkeln och frågar *är talet större eller mindre än 10?* Kamraterna svarar att talet är mindre än 10. Då är talområdet avgränsat. Aktiviteten fortsätter tills eleven hittat rätt tal.

Det finns en poäng i att eleverna själva ställer frågor och även säger vilket tal de står på. Det visar att de kan orientera sig på talraden och att de förstår talens inbördes storleksförhållande, till exempel att *10 är större än 5* och *9 är mindre än 10*.

Utgångspunkten för att utveckla det matematiska språket är elevernas naturliga språk (Anghileri, 2000). Det är inte självklart för alla att *5 och 5 är 10* och *5 plus 5 är lika med 10* är samma sak. Det är därför viktigt att eleverna lär sig de matematiska orden och uttrycken, utifrån sitt eget vardagsspråk. För att nå dit måste de få sätta ord på egna tankar och kommunicera dessa med varandra och med läraren. Genom matematiska samtal, utifrån talraden på golvet, har vi som lärare gyllene tillfällen att få syn på elevernas förståelse för talraden. Frågor och svar som återges här är hämtade från undervisning med de yngsta eleverna. Eleverna har arbetat systematiskt med talraden på golvet under en tremånadersperiod. Exempel på frågor:

- Hur många cirklar finns det på golvet?
- Hur många blå och röda cirklar är det på talraden?
- Hitta 5 på talraden. Hur tänkte du?
- Du står nu på 10. Hitta 9. Hur tänkte du?

Frågornas ordning har betydelse. Det är lättare för eleverna att orientera sig på talraden om de först hittar 10, för att sedan hitta 9.

Figur 5

Talrad på golvet



Efter att ha arbetat regelbundet med talraden på golvet (Figur 5), visste de flesta att den består av 20 cirklar, 10 röda och 10 blå. På frågan om hur många cirklar det finns på golvet använde många talradens 5-gruppering när de svarade att det är 10 av varje färg därför att 5 och 5 är 10 . Några kopplade ihop talraden med addition och svarade att det måste vara 20 cirklar, för att *5 och 5 och 5 och 5 blir 20* eller $5 + 5 + 5 + 5$ är 20 . Några såg sambandet med 5 fingrar och 5 fingrar: Det är samma som 10 fingrar.

Talraden kan också vara ett bra stöd för elever när de ska förklara hur de tänker om begreppet före och efter. En elev använde sig av talraden när han beskrev sina tankar: ”jag stod på 10 och då är 9 där” och pekar på cirkeln före. Många elever var osäkra på

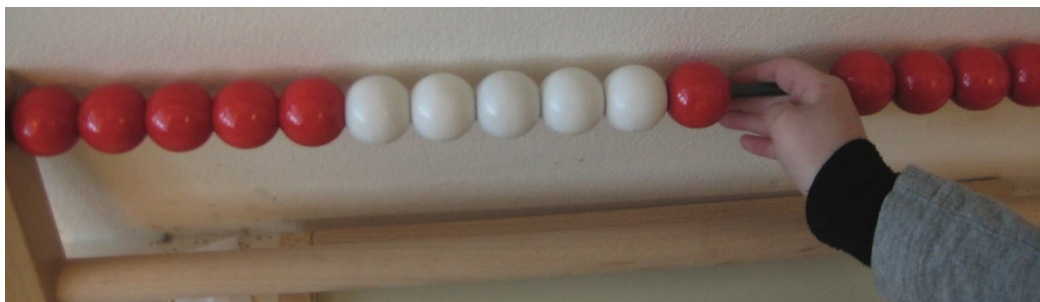
begreppen före och efter och blandade ihop dem. ”Efter 10 kommer 9.” Läraren upptäckte missuppfattningen och kunde arbeta med att precisera begreppen.

Pärlband på väggen

Eleverna kan tillverka egna pärlband av pärlor i två färger. De färdigträdde band som finns att köpa brukar vara röda och (trä)vita. Det bör också finnas ett stort demonstrationsband med större kulor (Figur 6). På samma sätt som med talraden på golvet utgår man från pärlbandets 5-gruppering när man ska hitta tal på 20-pärlbandet. Samtidigt som man räknar pärlorna kan man diskutera med eleverna om talens helhet och delar.

Figur 6

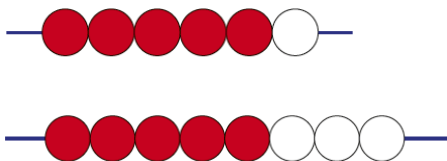
Demonstrationsband



6 är detsamma som 5 röda pärlor och 1 vit pärla. 8 är detsamma som 5 röda pärlor och 3 vita pärlor (Figur 7):

Figur 7

$$6 = 5 + 1 \text{ och } 8 = 5 + 3$$



Bygg upp tal med utgångspunkt i 5- och 10-grupperingar med hjälp av pärlbandet (Figur 8): 12 är detsamma som 5 röda, 5 vita och 2 röda pärlor, eller 10 och 2 pärlor:

Figur 8

$$12 \text{ är exempelvis } 5 + 5 + 2$$



Talet 18 är lätt att hitta genom att räkna 2 steg bakåt från 20 (Figur 9):

Figur 9

$$18 = 20 - 2$$



När talområdet vidgas till 100 är det lämpligt att införa 100-pärlbandet, som består av pärlor i två färger i 10-grupper. Målet är att 100-pärlbandet ska hjälpa eleverna att utveckla bra inre bilder av talen upp till 100. De ska frigöra sig från att räkna ett i taget, som snabbt blir ineffektivt då talraden utökas.

Gissa mitt tal

Pärlbanden kan också användas till aktiviteten *Gissa mitt tal*. Läraren bestämmer ett tal och en elev ska lista ut vilket talet är. Eleven ställer frågor som ”Är talet större eller mindre än 60?”. Talområdet visualiseras genom markeringar på pärlbandet som avgränsar området där det sökta talet finns, till exempel att det är mindre än 60 men större än 44.

Några exempel på hur man kan arbeta med tal upp till 100:

- Hitta givna tal med hjälp av 10-grupperna, till exempel att 32 är $10 + 10 + 10 + 2$ pärlor.
- Betona att 50 är hälften av 100, det vill säga mitten på pärlbandet. Vik och se efter.
- Resonera logiskt, till exempel att se att talet 75 finns mitt emellan 70 och 80, och att 99 finns precis före 100.
- Hoppa från 0 till 43 med 10-hopp och 1-hopp. Fortsätt med sådana övningar tills eleverna klarar att göra operationen med färre hopp, till exempel med 20 eller 30 i taget.
- Hoppa från 0 till 69, genom att först hoppa till 70 och sedan ett steg tillbaka.

Från talrad till tallinje

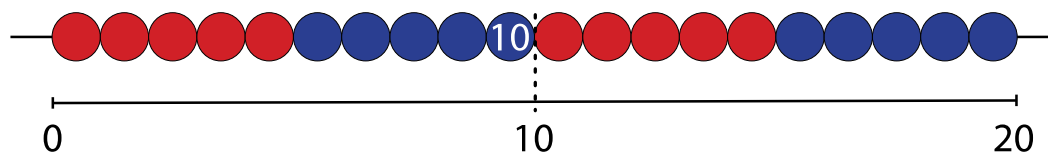
En mer abstrakt modell för tal är en tallinje. Den är mer abstrakt eftersom den representerar alla tänkbara tal, både de som finns utsatta och de som inte är markerade. Ett tal svarar mot en punkt på tallinjen eller en sträcka som har samma längd som avståndet från 0 till den punkten. Mellan två punkter, hur nära varandra de än ligger, finns det alltid fler punkter, fler tal. Genom att rita en tallinje tillsammans med talraden på golvet eller pärlbandet på väggen kan man hjälpa eleverna att nå en högre abstraktionsnivå. Läraren kan få insikt i elevernas förståelse för tallinjen och se om de har en inre föreställning av talens storleksordning.

Det finns en viktig skillnad som behöver uppmärksammas mellan talraden som är diskret och tallinjen som är kontinuerlig. På tallinjen ligger talet 10 precis mitt emellan 0 och 20

(Figur 10). På talraden är den tionde kulan inte i mitten eftersom det finns 9 kulor till vänster och 10 kulor till höger om den tionde kulan. Kula nummer 10 är inte den mittersta kulan, men mitten på talraden från 1 till 20 återfinns precis efter kula nummer 10. För att senare kunna läsa av skalor och diagram behöver eleverna förstå tallinjen, inte bara talraden.

Figur 10

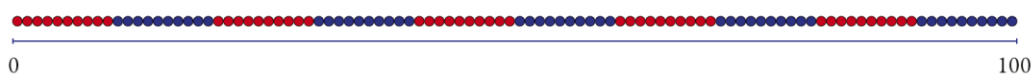
Mitt emellan 0 och 20



Om tallinjen ritas precis under talraden kommer den att vara skalenlig så att sträckan mellan 0 och 5 är lika stor som sträckan mellan 5 och 10. På en nästan tom tallinje där bara talen 0 och 20 är utskrivna, kan eleverna till exempel placera talen 5, 10 och 15 på rätt ställe och markera med ett streck eller skriva talsymbolen. Det är också lämpligt att samtidigt illustrera vad som görs på en tallinje, för att så småningom helt släppa talraden och enbart arbeta med tallinjen. Genom att arbeta med talrad och tallinje parallellt kan tallinjen etableras som en tankemodell. Ett exempel på övning kan vara att placera talen 4, 11 och 19 på rätt ställe på tallinjen, där talen 0, 5, 10, 15 och 20 är utskrivna. De tal som ska placeras ska ligga nära de som är utskrivna. På samma sätt kan man placera tal på nästan tomma tallinjer när talområdet utvidgas till 100 (Figur 11). Då är det lämpligt att ha ett pärlband på tavlan och en tallinje under som det går att göra markeringar på. Istället för ett pärlband går det att bygga en lång talrad av 100 multilink-kuber i två olika färger placerade i grupper om 10. Avstånd och antal koordineras då på ett ännu tydligare sätt.

Figur 11

Den tomma tallinjen utvidgas

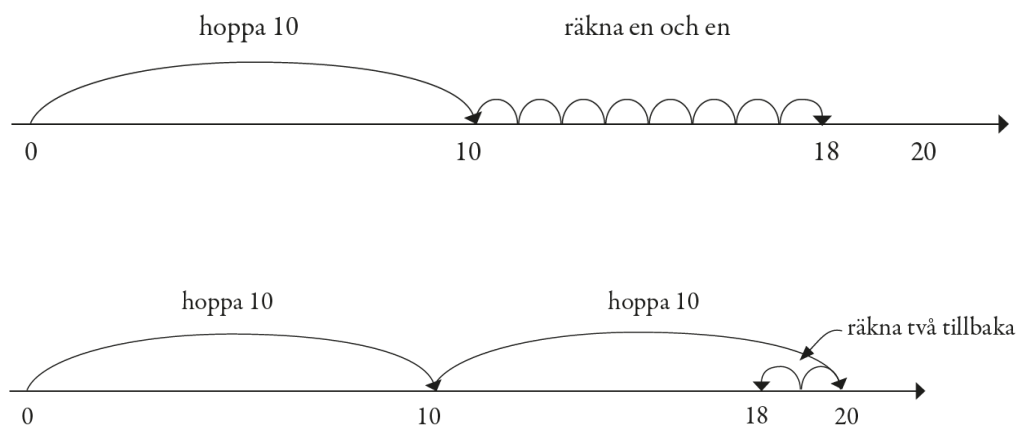


Att arbeta med tallinjen

Genom färgkodningen på talraden lär sig eleverna att förhålla sig till hela tiotal som en användbar strategi för huvudräkning. Strategin används också ofta vid uträkningar på tomma tallinjen. Det är viktigt att visa på att det finns flera sätt (Figur 12) att ”hoppa” på tallinjen eller pärlbandet. Man kan till exempel hitta talet 18 antingen genom att hoppa ett tiohopp och räkna åtta pärlor, eller hoppa två tiohopp och räkna två pärlor bakåt.

Figur 12

Flera sätt att hoppa på den tomma tallinjen



Göra beräkningar med hjälp av tallinjen

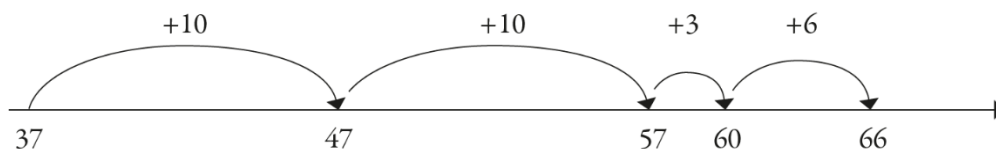
En ytterligare nivå av matematisering äger rum när eleverna gör uträkningar i addition och subtraktion på en tom tallinje. En helt tom tallinje saknar markeringar och talskala, det är bara de tal som ingår i uträkningen som markeras. Modellen utvecklades i början av 1900-talet vid Freudenthalinstitutet i Nederländerna (van den Heuvel-Panhuizen, 2001), och är tänkt att fungera först som en modell för att visa en uträkning och så småningom som en modell för eleven att tänka med. En tom tallinje ska vara ett stöd för elevens huvudräkning, ett "kladdpapper" för elevernas uträkningar. Det finns därför inga regler för hur stort avståndet ska vara mellan markeringarna som görs på tallinjen.

Beräkningar på en tom tallinje innebär ofta att första termen behålls odelad, medan den andra delas upp. Eleverna väljer en metod som de tycker passar bäst utifrån räknesätt, talområde och talen i den givna uppgiften. Även om det står eleverna fritt att göra sina egna "hopp" på tallinjen, finns det några grundläggande metoder (Beishuizen, 1999). De exemplifieras här med additionen $37 + 29$:

En metod innebär att det första talet behålls odelat och nästa delas upp, i tio- och entalshopp (Figur 13). Entalen kan antingen tas en i taget eller grupperas på ett lämpligt sätt, här som 3 och 6.

Figur 13

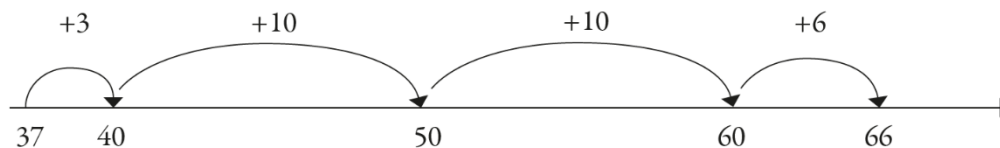
Första talet behålls odelat



En variant är att man först hoppar till närmaste heltal (Figur 14) och därefter fortsätter med de hela tiotalen och slutligen resterande ental.

Figur 14

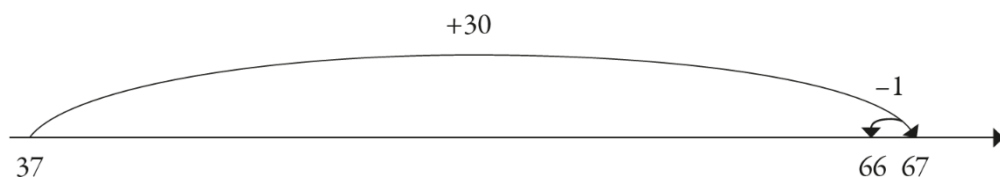
Hopp till närmaste hela tiotal



En tredje metod är överhops- eller kompensationsmetoden (Figur 15). Då hoppar man jämna tiotalshopp framåt och backar sedan för att kompensera att man kom för långt.

Figur 15

Överbops- eller kompensationsmetoden



Avslutning

Pärlband kan vara bra för att konkretisera uppåt- och nedåträkning. Den muntliga räkningen blir synlig, genom förflyttningar på pärlbandet, när man räknar en och en, två och två eller fem och fem pärlor i taget. Att säkert kunna räkna uppåt och nedåt innebär att eleven kan talraden utantill, ser sambandet till talens ordning och mängden som talen representerar (Fuson, 1988). Den inledande undervisningen bör innehålla dagliga övningar som säkerställer att alla elever lär sig talraden: först till 10, sedan till 20 och vidare till 100. Exempel på lämpliga övningar: räkna framåt och bakåt, säga vilket tal som kommer före

och efter givna tal och att räkna vidare från vilket tal som helst i det aktuella talområdet. Efterhand ska eleverna också kunna räkna med 2, 5 och 10 i taget.

Att kunna räkna uppåt och nedåt uppfattas ofta som självklart. Treffers (2001) påpekar att sådant räknande spelar en viktig roll i utvecklingen av elementär talförståelse. Enligt Henry och Brown (2008) kommer elever som löser uppgifter, med hjälp av olika räknemetoder, sannolikt att utveckla bättre talförståelse. De har lättare för att se samband mellan tal och tals egenskaper och utvecklar metoder som kan vara effektiva för att lösa additions- och subtraktionsuppgifter. Metoderna ger också eleverna ett verktyg för att lösa uppgifter med stora tal som huvudräkning (Henry & Brown, 2008). De kan dra nytta av att utgå från räkning på talraden och bygga vidare på den, genom att använda grupperingar – först femgrupper och senare tiogrupper. Det stämmer väl med våra erfarenheter. Vi ser att de av våra elever som har arbetat systematiskt med talräkning och samtidigt använt 5- och 10-grupperade pärlband, har haft stor nytta av detta.

Referenser

Anghileri, J. (2000). *Teaching number sense*. Continuum.

Beishuizen, M. (1999). The empty number line as a new model. I I. Thompson (Red.), *Issues in teaching numeracy in primary schools* (s. 157–168). Open University Press.

Dahl, H. H., & Nohr, E. M. (2010). Perlesnor og tom tallinje. *Nåmnaren*, (4), 37–42.

Fuson, K. C. (1988). *Children's counting and concepts of number*. Springer-Verlag.

Henry V. J., & Brown, R. S. (2008). First-grade basic facts: An investigation into teaching and learning of an accelerated, high-demand memorization standard. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(2), 153–183. <https://www.jstor.org/stable/30034895>

Nohr, M. E., & Dahl, H. H. (2009). *Tallforståelse og mentale regnestrategier på småskoletrinnet* (Mastergrad). Høgskolen i Oslo.

Treffers, A. (2001). Grades 1 (and 2) – Calculating up to 20. I M. van den Heuvel-Panhuizen (Red.), *Children learn mathematics* (s. 43–60). Freudenthal-institutet, Utrechts universitet.

van den Heuvel-Panhuizen, M. (Red.) (2001). *Children learn mathematics*. Freudenthal-institutet, Utrechts universitet.