

Fingertal och romerska siffror

Ulla Johansson, Umeå universitet

Enligt 1700-talsekonomen Adam Smith är siffrorna ”några av de mest abstrakta termer som människan är i stånd att finna uttryck för”. Det är våra fingrar vi kan tacka för våra väl utvecklade räknefärdigheter och utan dem skulle taluppfattningen hos människan vara rudimentär (Dantzig, 1930). Filosofen Edmund Husserl uttrycker, i slutet av 1800-talet, i *Philosophie der Arithmetik*:

De sinnligt förnimbara bilder av mängder, som våra fingrar kan forma, måste ha trugat sig på mängder av andra objekt för efterbildning av antal. Och så uppstod ”fingertalen”. Den ursprungliga räknemetodens utveckling genom fingertalen, fullkomnar tillblivelsen av den systematiska räknemetoden. Den väg vi slog in på var en nödvändig konsekvens av fingertalens vidareutveckling.

(Husserl, 1898)

Det finns flera anledningar till att just fingrarna – inte stenar eller pinnar – ”trugade sig på andra objekt för efterbildning av antal”:

- fingrarna finns alltid till hands
- fingrarna kan grupperas med hjälp av händerna
- i en ogrupperad samling objekt kan vi knappast uppfatta fler än tre, utan att räkna eller gruppera dem, men händernas gruppering av fingrarna gör att vi kan uppfatta fler:
 - 5: hela handen
 - 4: hela handen minus ett
 - 6, 7 och 8: hela handen plus ett, två eller tre
 - 9: båda händerna minus ett
 - 10: båda händerna
- fingertalen låter oss både se och känna antal.

Att arbeta med fingertal

Den svenska specialläraren och forskaren Dagmar Neuman har arbetat mycket med fingerräkning (Neuman, 1987; 1989; 2013). Hon beskrev redan på 1980-talet hur eleverna spontant berättade för henne hur de använde sina fingrar med en hel hand som ett tydligt femtal för att tydligt se tal och beräkningar (Neuman, 1986). Ibland uppfattas fingertalen som ett slags laborativt material, men de bör snarare ses som tidiga symboler för tal. Barn

använder fingertal för att kunna se antal som döljer sig bakom abstrakta räkneord de möter och för att se det exakta antalet i delar och helhet när de adderar och subtraherar.

I följande text beskrivs en arbetsgång baserad på dessa erfarenheter där eleverna undan för undan får bekanta sig med ett gemensamt sätt att visa fingertal baserade på handens femtal. Eleverna kan också upptäcka och se den tydliga kopplingen mellan addition och subtraktion. Att medvetet arbeta med fingertal på detta sätt kan hjälpa elever att få en tydlig struktur för att använda fingrarna på ett utvecklingsbart sätt istället för att i skymundan använda fingrarna på sätt som inte är utvecklingsbara.

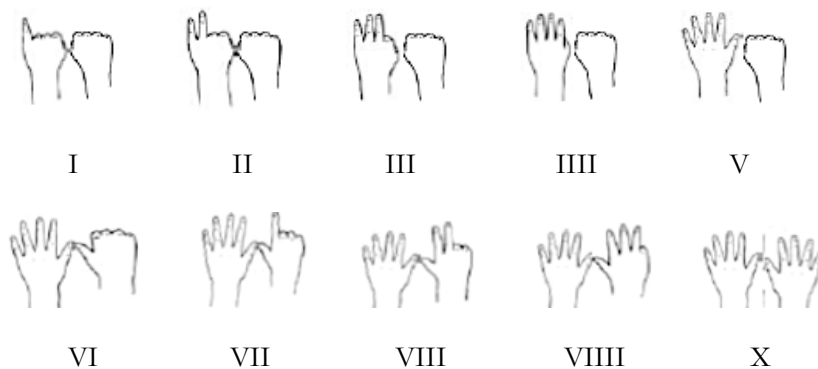
Fingertalens utseende

Tidigt i människans historia avbildades abstrakta räkneord på samma sätt som romerska siffror (Figur 1) och eleverna gör detsamma utifrån några grundförutsättningar. Fingertalen ska forma en talrad

- som är läsbar i läsriktningen: vänster → höger
- med varje fingertal på rätt plats i ordningsföljden.

Figur 1

Kopplingen mellan fingertal och romerska siffror



För att det ska vara möjligt att diskutera och jämföra sina fingertal är det viktigt att alla elevers fingertal ser likadana ut och att de håller händerna på samma sätt. Det går lättast när de lägger händerna på bordet med handflatan ned. Vänster hands lillfinger är då I, lillfinger och ringfinger II och när långfingret läggs till är det III, trots att barn aldrig brukar visa lillfingret för I. Händerna utom höger lillfinger är 9, även om barn brukar föredra att vika in tummen. Fingertalen representerar nu de siffror som ska användas och därför måste alla visa dem på samma sätt – som romerska siffror.

I det romerska sifferuttrycket för 5, det vill säga V, avbildar det vänstra strecket de fyra fingrarna och den högra tummen (Figur 2).

Figur 2

Det romerska sifferuttrycket fem



III V

Numera skriver vi ofta IV, handen minus ett finger, i stället för IIII, det vill säga fyra fingrar, men det ursprungliga sättet finns fortfarande kvar på exempelvis urtavlor och här visar och skriver eleverna IIII. På motsvarande sätt skrivs numera ofta nio som IX, båda händerna minus ett finger, i stället för VIIII (Figur 3), det vill säga handen plus fyra fingrar. Eleverna visar och skriver dock på det gamla sättet.

Figur 3

Det romerska sifferuttrycket nio



VIII

Tecknet X (Figur 4) avbildar de båda händerna där en hand är rättvänd och en upp och ned, det vill säga fem (V) uppåt och fem (V) nedåt. Det är svårt att hålla händerna åt olika håll, så istället gör eleverna X genom att korsa tummarna.

Figur 4

Det romerska sifferuttrycket tio



Att beskriva händelser med hjälp av fingertal

När eleverna vet grunderna för hur fingertalen visas fortsätter läraren arbetet med berättelser om mätning av olika slag. Ordet enhet och likhetstecknet = införs.

En flicka hade fått fler enheter av ett sidentyg än sin kamrat. För att det skulle bli rättvist måste kamraten få en enhet till.

Plustecknet börjar användas i elevernas sagoskrivböcker:

_____ = _____ + _____

Eleverna ska *beskriva händelsen*, inte lösa problemet. De kan till exempel skriva:
III = I + II.

Betydligt senare möter eleverna skriftligt presenterade problem, till exempel:

_____ + II = VIII

Eleverna börjar då med att tillsammans ge förslag på vad läraren kan ha berättat. Förslagen handlar alltid om att *något fattas*. Därefter får de uppmaningen att visa hur många enheter som fattas med hjälp av romerska siffror. De första skriftligt presenterade problemen är alltså öppna utsagor skrivna med ett + (plustecken), trots att de är subtraktionsproblem. Uppgiften ovan kan lösas genom att subtrahera II från VIII.

Elever subtraherar i många sammanhang utan att vara medvetna om det och utan att ha mött minustecknet i undervisningen. När tecknet införs får det till att börja med betydelsen ”ta bort”. Senare upptäcker elever att subtraktionsproblem går att lösa på samma sätt som additionsproblem. Ibland utropar någon lättad: ”Men de’ här e’ lika lätt som plus ju!”. De vet inte att subtraktion kan tecknas med både plus och minus. Nu är det dags att introducera addition och läraren berättar:

Idag fick mitt kaninpar sju ungar. Hur många kaniner har jag nu?

Eleverna ska tillsammans lista ut hur de ska skriva det läraren har berättat. Efter diskussion skriver de: $2 + 7 = _$.

Nu uppstår ett problem. Det finns ingenting som berättar om talet som helhet. Subtraktion är att dela upp en känd helhet. Addition är att sätta samman kända delar till en från början okänd helhet. För att lösa $2 + 7$ försöker en del elever att lägga upp först två och sedan sju fingrar, men det är svårt. Andra skriver II VII, men det säger dem inte så mycket. Några lägger spontant först upp sju fingrar och sedan två. Så småningom kommer någon elev på att de inte kan skriva II före V och flyttar II så det står VIII. Då är problemet löst.

I slutet av varje lektion diskuteras ”Vad har vi lärt oss idag?”. Samtalen kan sammanfattas så här:

- Den största delen måste alltid komma först *i ett uppdelat fingertal* som är större än fem eftersom den hör ihop med handen.
- Den största delen måste alltid komma först *i ett uppdelat tal* som är större än fem och är skrivet med romerska siffror då den hör ihop med tecknet V.
- Tecknet V delas bara på ett ställe, det vill säga mellan det vänstra och högra strecket i V-tecknet, vilket motsvarar att handen delas mellan de fyra fingrarna och tummen. Därför blir slutsatsen att börja med det största talet i uppgifter med plus, där ett okänt tal ska skapas av de två tal som finns i uppgiften.

Den yttersta förutsättningen för att utföra huvudräkning är att direkt kunna alla sätt att dela upp de tio första talen i två delar (Figur 5):

Figur 5

De tio bastalens 25 del-helhetsmönster

Två	Tre	Fyra	Fem	Sex	Sju	Åtta	Nio	Tio
1 1 2	2 1 3	3 1 4	4 1 5	5 1 6	6 1 7	7 1 8	8 1 9	9 1 10
		2 2 4	3 2 5	4 2 6	5 2 7	6 2 8	7 2 9	8 2 10
				3 3 6	4 3 7	5 3 8	6 3 9	7 3 10
						4 4 8	5 4 9	6 4 10
								5 5 10

Fingertal och romerska siffror gör alla bastalens kombinationer synliga (Figur 6):

Figur 6

Bastalens kombinationer med fingertal och romerska siffror

5 1 6 V I	6 1 7 VI I	7 1 8 VII I	8 1 9 VIII I	9 1 10 VIII I
4 2 6 V ①	5 2 7 V II	6 2 8 VI II	7 2 9 VII II	8 2 10 VIII II
3 3 6 V ①	4 3 7 V ①	5 3 8 V III	6 3 9 VI III	7 3 10 VII III
		4 4 8 V ①	5 4 9 V IIII	6 4 10 VI IIII
				5 5 10 V V

Figuren visar att det i princip går att *se* alla bastalens kombinationer i fingertalen. Ibland flyttar elever, utan att de tänker på det, den rörliga tummen från den första handen till den andra, till exempel i kombinationerna 4|2|6, 4|3|7 och 4|4|8. Enda fallet där de fyra fingrarna måste delas upp är 3|3|6. Eleverna lär sig att se och kombinera talen utan att räkna varje finger.

En vanlig gång från fingertal till att uppfatta talen 1–10 abstrakt är att elever

1. lägger upp ett ungefärligt antal oräknade fingrar
2. lägger upp hela handen och räknar sig fram till fingertal större än fem
3. känner igen fingertalen och lägger upp dem utan att räkna
4. ”tänker med sina händer”
5. ”bara vet”.

Elever som använder fingertal eller romerska siffror för att *se* bastalens kombinationer upptäcker två viktiga begrepp: additionens kommutativa egenskap ($7 + 2 = 2 + 7$) och sambandet mellan addition och subtraktion (om $2 + 7$ är 9, måste $9 - 7$ vara 2). Tabellträning av talfakta utan hänsyn till samband mellan tal, ger inte elever möjlighet att upptäcka dessa begrepp. Till exempel att $2 + 3 = 5$ tränas för sig och $3 + 2 = 5$ för sig, eller att additionstabellen är totalt skild från subtraktionstabellen. För elever som kan

kombinationerna och förstår tiobas- och positionssystem är addition och subtraktion i högre talområden i princip enbart generalisering av räknesätten inom området 1–10.

Matematiksvårigheter

Äldre elever i matematiksvårigheter använder fingrarna på ett annat sätt än nybörjare. De formar dem för att se resultatet av dubbelräkning.

Ett exempel: $3 + 7 = _$ 3 ... 4 ^{1 finger}, 5 ^{2 fingrar}, 6 ^{3 fingrar}, 7 ^{4 fingrar}, 8 ^{5 fingrar}, 9 ^{6 fingrar}, 10 ^{7 fingrar}.

När de ser att fingrarna kommit till sju vet de att de har räknat upp sju ord, och att det sist uppräknade ordet, tio, är det rätta svaret. Ett ganska vanligt problem är att elever som gör på detta sätt är att de är osäkra på var de ska börja eller vilka tal som ska räknas med. I exemplet börjar en del med ett finger redan då de tänker och startar med 3.

I dubbelräkning formar eleverna en slags fingertal av de räkneord de räknar upp för den adderade eller subtraherade termen. Dessa fingertal berättar bara om en av talets delar, aldrig om hela talet. Naturligtvis blir det också ett väldigt otympligt sätt att räkna på när det kommer till högre talområden eller tal i bråk- eller decimalform. Används fingrarna på detta sätt leder det alltså lätt in i en återvändsgränd där inga föreställningar av tal, inga aritmetiska begrepp och ingen huvudräkning kan utvecklas.

Referenser

Dantzig, T. (1965). *Talen – vetenskapens språk*. Aldus.

Husserl, E. (1898). *Philosophie der Arithmetik*. Tyskland.

Neuman, D. (1986). Att se istället för att räkna. *Nämnamn*, (1), 34–37.

Neuman, D. (1987). *The origin of arithmetic skills*. Acta universitatis gothoburgensis.

Neuman, D. (1989). *Räknefärdighetens rötter*. Nordisk Juridik AB.

Neuman, D. (2013). Att ändra arbetssätt och kultur inom den inledande aritmetikundervisningen. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 18(2), 3–46.