

Räkneramsa – tallinje – talsystem

Ingrid Olsson, Mitthögskolan

Barn är tidigt intresserade av olika ramsor och dessa fyller också en viktig funktion i lärandet. Ramsor kännetecknas av att orden alltid kommer i samma följd. Ramsan *1, 2, 3 ...* som små barn rabblar med allt större säkerhet, utan kunskap om siffror och tal, kallas *räkneramsa*. Det är något särskilt med *1, 2, 3, 4 ...* jämfört med till exempel Ole, dole, doff, det märker barnen på vuxnas reaktion. När barn börjar använda räkneramsan blir den inte alltid korrekt. De kan säga *ett, två, tre, fem, åtta*. Med fler erfarenheter blir ramsan efter hand både korrekt och stabil. Förenklat kan sägas att när ”koden knäckts” för talen 11–20 och steget *tjugotio*, det vill säga 29, 30, kan barn räkna nästan hur långt som helst.

Räkneramsans struktur

Positionssystemets funktion i räkneramsan är en grundläggande matematisk idé som inte är uppenbar utan behöver lyftas i undervisningen. För att ge en viss förståelse för den komplexa struktur som eleverna behöver bli bekanta med, ska vi här göra en tankeövning. Vi konstruerar en ny räkneramsa med basen tio där orden inte är de vanliga. Vi använder de tio första orden i ramsan Ole, dole, doff, kinke, lane, koff, koffe, ane, binke, bane. Ordet lane förekommer två gånger i ramsan, därför får det bli ane vid det andra tillfället. Nu har vi en räkneramsa till tio. För enkelhetens skull gör vi talen 11–19 till ”tontal”, oleton, doleton, doffton och så vidare. Räkneordet tjugo blir dole-bane, trettio blir doff-bane och så vidare. Början av ramsan ser du här. Räkna nu vidare till lanebane.

ole	oleton	dolebaneole	doffbaneole
dole	doleton	dolebanedole	doffbanedole
doff	doffton	dolebanedoff	doffbanedoff
kinke	kinketon	dolebanekinke	doffbanekinke
lane	laneton	dolebanelane	doffbanelane
koff	koffton	dolebanekoff	doffbanekoff
koffe	koffeton	dolebanekoffe	doffbanekoffe
ane	aneton	dolebaneane	doffbaneane
binke	binketon	dolebanebinke	doffbanebinke
bane	dolebane	doffbane	kinkebane

[ole oleton dole doleton doff doffton kinke kinketon lane laneton koff koffton koffe koffeton ane aneton binke binketon bane dolebane

dolebaneole dolebanedole dolebanedoff dolebanekinke dolebanelane dolebanekoff dolebanekoffe dolebaneane dolebanebinke doffbane

doffbaneole doffbanedole doffbanedoff doffbanekinke doffbanelane doffbanekoff
doffbanekoffe doffbaneane doffbanebinke kinkebane].

Trots att tiostrukturen är välbekant upplever många vuxna att det är svårt att rabbla ramsan eftersom orden är ovana. När små barn börjar lära sig räknearmsan behöver de både lära sig orden och strukturen som bygger på tiogrupper.

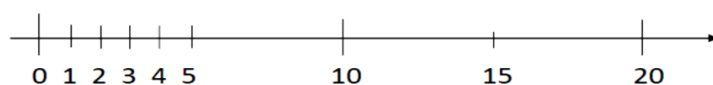
Elever i förskoleklass behöver förutom uppåträkning få erfarenheter av nedåträkning för att veta vilket tal som kommer före i ramsan. Nedåträkning kan upplevas svårare. Testa att räkna baklänges från bane till ole. Vilket ord kommer före kinke? Kanske använder du samma strategi som en del elever gör, nämligen att räkna från ole till kinke för att upptäcka vilket ord som kommer före kinke.

Talradens tiostruktur

I *talraden* är talen skrivna med siffror, 0, 1, 2 ... och placerade i stigande ordning. *Tallinjen* (Figur 1) är betydligt mer abstrakt och innebär att talen placeras utmed en linje och markeras med streck. Linjen slutar varken vid noll eller vid det sista tal som vi skriver ut.

Figur 1

Tallinje



På tallinjen har talen ett konstant relativt förhållande till varandra. Det är lika långt mellan 658 och 659 som mellan 4 och 5 eller (-8) och (-7).

Olika namn på talsystem

Talsystem definieras som ett system för hur tal anges med hjälp av siffror. När en siffras värde beror av dess plats, position, kallas systemet *positionssystem*. Eftersom vårt talsystem bygger på basen 10, kan det också kallas *decimalsystem*. Alla tre benämningarna innefattar såväl hela tal som tal i decimalform. Andra kulturer har talsystem som bygger på andra baser.

Vårt talsystem är grundläggande för hela aritmetiken. Därför måste alla elever ges möjlighet att utveckla god förståelse för det. De ska efterhand kunna bilda hur stora eller hur små tal som helst. Utvecklingen av detta talsystem, där valfria heltal kan skrivas med hjälp av endast tio olika tecken, 0–9, har tagit mänskligheten lång tid att utveckla. Många olika svårigheter uppstod och löstes under vägen och talsystemet innehåller därför flera olika delbegrepp.

Det tar lång tid att bygga upp förståelse för positionssystemet. Ingen enskild aktivitet eller sekvens av aktiviteter ger eleven allt som behövs. Genom många och varierande erfarenheter med olika representationer som betonar olika aspekter, växer förståelsen.

(McIntosh, 2020, s. 24)

För att få förståelse för talsystemet kan vi studera den historiska utvecklingen, visa på problem som uppstod och hur lösningarna gav upphov till nya delbegrepp.

Behovet av matematik har styrt utvecklingen

Människans behov av att kunna räkna ligger bakom utvecklingen av matematiken. Det började långt tillbaka, pågår och kommer att fortsätta. Så länge människan var jägare och samlare var behovet begränsat. När man omkring 10 000 år före Kristus började odla och ha husdjur uppstod behov av att beräkna markarealer, mäta när något skulle byggas et cetera. Omkring 2 700 år före Kristus byggdes Egyptens pyramider. Arbetet krävde ritningar och många matematiska beräkningar. Till detta anställdes skrivare, som även hade till uppgift att ge råd när det till exempel var dags att så eller för att beräkna hur mycket skatt folket skulle betala till sin Farao. Ungefär samtidigt utvecklades astronomin i Babylonien. Månkalender och solur konstruerades. Än idag delar vi in tid i timmar och minuter efter babyloniernas 60-system.

Konstruktion av segelfartyg gjorde långa handelsresor möjliga. Räknekunskaper behövdes för navigering och handel. Genom resorna spreds matematikkunskap mellan länder och världsdelar. Kunnande från bland annat Indien och Kina nådde Europa. På 1600-talet uppfanns många mätinstrument inom naturvetenskapen och matematiken behövdes för att behandla mätresultat.

Tal och talnamn utvecklas

Innan människorna kunde använda räkneord ristade de till exempel skåror i en pinne för antalet djur de fällt eller hur många pilspetsar de ägde. År 1937 hittades i dåvarande Tjeckoslovakien ett mer än 30 000 år gammalt vargben med 55 skåror i två rader. I ena raden är skåror ristade i grupper om fem. Under Medeltiden ristades storleken på lån in i en trästicka, karvstock. När skulden betalades delades stickan och blev två ”kvitton”. Ett jägarfolk i Australien hade endast två räkneord i sitt språk, ninta(ett) och tara(två), ma betydde och. Tre hette tara-ma-ninta och fyra tara-ma-tara. För antal större än fyra användes ett ord för många, mer exakt behövde det inte vara. En gammal kultur på Nya Guinea använde tal upp till 22. Istället för att använda ord visade de talen på kroppen. Talet 1 var höger lillfinger och talet 22 vänster lillfinger. Munnen stod för talet 12, höger axel var 8. Kroppen kan liknas vid en tallinje och det var lätt att uppfatta om ett tal var litet eller stort och vid jämförelser se vilket som var störst.

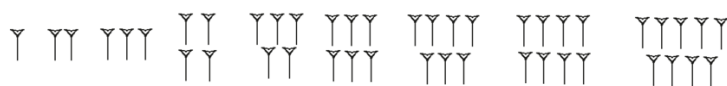
Gruppering

Problemet med att konstruera en effektiv räkneramsa löstes på olika sätt i olika kulturer. Gemensamt var att alla gjorde grupperingar. Babylonierna (Figur 2) valde grupper om 60:

Figur 2

Babyloniernas talsystem

Tecknen för 1-9:



Vid 10 utfördes en växling till <

Endast två tecken användes (< och <) och med hjälp av dem bildades tal upp till 59.



Nästa växling gjordes vid 60 och då användes samma tecken som för talet 1.

Kommentar: Illustration ur Ahlström et al., 1996, s. 103.

Mayafolket använde 20-grupper, kanske summan av fingrar och tår. Många kulturer använde enbart fingrarna som grund och konstruerade 10-bassystem med ental, hundratal, tusental och så vidare, där talsorterna hela tiden blir tio gånger större. För att kunna räkna med tal räcker det inte att gruppera. Det behövs också symboler (Figur 3). I den egyptiska kulturen utvecklades tiobassymboler som är enkla att tolka. Entalen 1–9 symboliserades av streck.

Figur 3

Mayafolkets talsystem

∩	10	Åsnehov. Åsnan var egyptiernas viktigaste husdjur.
☉	100	Hårlock. Fåret hade hundratal lockar i sin ull.
⊥	1 000	Lotusblomma. Det växte tusentals lotusblommor i Nilen.
⌋	10 000	Faraos spira. Den var ett tecken på makt över många.
☞	100 000	Grodyngel . I Nilen fanns hundratusentals grodyngel.
⌘	1 000 000	En känsla. ”Åh, vilket stort tal!”

Kommentar: Illustration ur Ahlström et al., 1996, s. 104.

Eftersom varje talsort har en egen symbol ser man om någon talsort saknas i det egyptiska systemet. Symbolerna kan skrivas i valfri ordning. (OBS: här står X för talet 100.) Talet 123 kan skrivas X∩∩III, ∩∩XIII, IIIX∩∩ eller X∩III∩I.

Positionen avgör värdet

Det egyptiska systemet krävde många symboler efter varandra för stora tal. Talet 999 krävde till exempel 27 symboler. Beräkningar med stora tal blev svåra att överblicka; systemet var tungarbetat och ineffektivt.

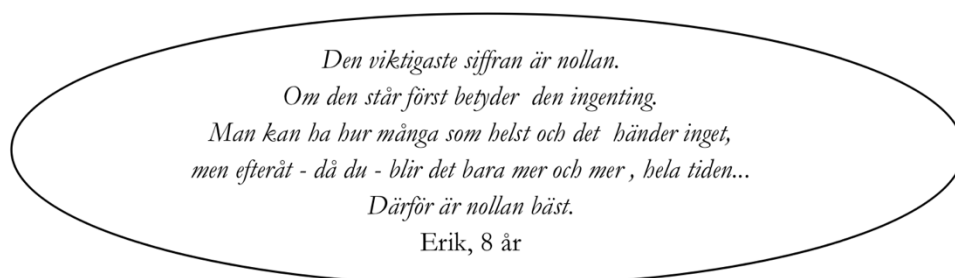
I Induskulturen utvecklades ett decimalsystem där positionen bestämde värdet. Man drog små fåror i marken, en för varje talsort. Från höger till vänster visade fårorna ental, tiotal, hundratal och så vidare. Små stenar i fårorna markerade tal. Alla stenar kunde representera valfri talsort. Det var fåran som stenen låg i, positionen, som avgjorde stenens värde.

Siffran noll uppstår

Talen är lätta att avläsa när man ser fårorna och stenarna. En tom fåra har en viktig funktion och måste på något sätt finnas med när talen skrivs. Inledningsvis markerades den med en prick. Så småningom blev symbolen 0. Med hjälp av nollan kan vi skriva vilka heltal som helst utan risk för feltolkningar. Nollan benämns ibland som den viktigaste siffran eftersom den medförde nya möjligheter för att skriva och räkna tal (Figur 4).

Figur 4

En elev har insett nollans betydelse



Brahmagupta (598–665 efter Kristus) var astronom och matematiker från nuvarande Pakistan och troligen den som först använde noll som ett tal. Han formulerade också regler för multiplikation och division med noll. Våra tio siffror härstammar från de hinduarabiska. I Europa dominerade de romerska siffrorna länge. Det var tämligen enkelt att skriva tal med dem, men de var ineffektiva vid beräkningar. Kunskapen om decimalsystemet och nollan nådde Europa på 1100-talet, men det var först på 1600-talet som det blev vanligt i Sverige. Beresta sjömän visste tidigt att människor österut räknade mycket effektivare än vad som var möjligt med de romerska siffrorna.

Vårt talsystem, positionssystem eller decimalsystem idag

För att utveckla förståelse för positionssystemet, eller för att repetera, bör konkret material väljas med omsorg. Det är viktigt att relationerna mellan talsorterna är tydliga. Ett vanligt förekommande tiobasmaterial består av entalskuber, tiotalstavar, hundratalsplattor och tusentalskuber. Tio entalskuber får plats utmed tiotalstaven. Hundra entalskuber eller tio

tiotalstavar får plats på hundratalsplattan och så vidare. Genom att använda flera representationer – konkret material, bilder, talspråk, symboler – stärks förståelsen. Ett sätt att synliggöra hur siffrors värde hör samman med position är att låta rutor representera de tidigare nämnda fårorna där vi placerar siffror (Figur 5), till exempel:

Figur 5

Fårar har ersatts av rutor

4	7	3	0	5
---	---	---	---	---

Det framgår tydligt att platsen avgör siffrans värde. Fårorna har försvunnit i vårt sätt att skriva tal, men positionernas betydelse kvarstår. Talet 300 utläses vanligen *trehundra*, men det är viktigt att eleverna även kan se talet som 300 ental, 30 tiotal och 3 hundratal. Det har vi nytta av i beräkningar, som $4 \cdot 30$ då man kan tänka $4 \cdot 3 \text{ tiotal} = 12 \text{ tiotal} = 120$. Den strategin fungerar även för tal i decimalform. I räkneorden kan man höra resultatet av den *multiplikativa egenskapen* $2 \cdot 100$ (tvåhundra) $3 \cdot 10$ (trettio) $5 \cdot 1$ (fem). Den *additiva egenskapen* innebär att de olika talsorterna kan adderas: $200 + 30 + 5 = 235$.

För vuxna är det självklart att växla på tio. För att få förståelse för elevers problem är det nyttigt för oss att räkna i baser vi är ovana vid. En utmaning kan vara att räkna i basen sex (Nystedt, 1991).

Stora tal

Decimalsystemet gör det möjligt att skriva och tolka hur stora tal som helst. I tolkningen av och när eleverna ska skriva stora tal kan det vara lämpligt att uppmärksamma intervallerna (Figur 6) med tre positionsrutor för tusen, miljon och miljard.

Figur 6

Intervall med tre positioner i varje

miljard	hundratalsmiljon	tiotalmiljon	miljon	hundratusental	tio-tusental	tusental	hundratatal	tiotal	ental
				3	1	5	2	4	6
miljard			miljon			tusen			

Vid stora tal, som till exempel 315 246, läser vi först det som finns inom tusenintervallen, 315 tusen och sedan 246, trehundrafemtontusen – tvåhundrafyrtiosex.

Referenser

Ahlström, R., Bergius, B., Emanuelsson, G., Emanuelsson, L., Holmquist, M., Rystedt, E., & Wallby, K. (1996). *Matematik – ett kommunikationsämne*. NCM, Göteborgs universitet.

McIntosh, A. (2020). *Förstå och använd tal*. NCM, Göteborgs universitet.

Nystedt, L. (1991). Rapport från Sexfingerlandet. *Nämaren*, (2), 14–17.