

Representationer och strategier i problemlösning

Anna Teledahl, Höskolan Dalarna; Helena Eriksson, Höskolan Dalarna & Hanna Palmér, Höskolan Dalarna & Linnéuniversitetet.

Den här texten handlar om representationer och strategier som elever kan använda i problemlösning. Inledningsvis beskrivs representationer och strategier var för sig för att sedan sammankopplas och illustreras med exempel på elevlösningar från två olika problemuppgifter.

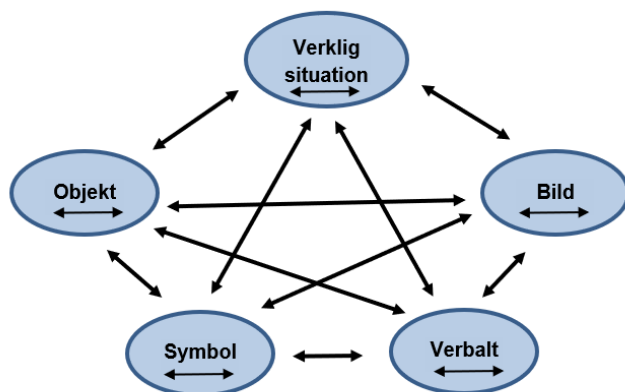
Representationer

Representationer är ett uttryck, till exempel en symbol, en bild eller ett objekt som står för (representerar) något annat än sig själv (Goldin & Shteingold, 2001). I alla situationer där en elev använder matematik, till exempel i samband med problemlösning, måste eleven använda olika representationer för att kommunicera med sig själva och med andra. När elever löser en problemuppgift är det dessutom både vanligt och önskvärt att de använder och kopplar samman olika representationer. Enligt flera forskare (t.ex. Duval, 2006) sker viktigt lärande i matematik när elever växlar mellan och sammankopplar olika representationer.

Kunskap om olika representationer och hur de relaterar till varandra bidrar till djupare förståelse av matematik och även till möjlighet för djupare förståelse för problemuppgifter. Figur 1 nedan illustrerar olika representationer samt växlingar som kan göras inom och mellan dem. Representationskompetens innebär att kunna använda och växla mellan olika representationer och för att elever ska utveckla sådan kompetens är lärares användande och synliggörande av olika representationer en viktig del (Duval, 2006; Lesh, 1981).

Figur 1

Figuren illustrerar olika representationer samt växlingar som kan göras inom och mellan dem



Kommentar. Figuren är en översättning av Lesh (1981).

Olika elever kan föredra, eller vara mer säkra i användandet av, vissa representationer och att växla mellan representationer är inte enkelt för alla elever. Genom att i undervisning erbjuda olika representationer kan elever erfara hur samma innehåll kan representeras på olika sätt och hur växlingar inom och mellan olika representationer kan göras. Synliggörande av representationer kan ske genom att lärare själva använder olika representationer och genom att elevers olika representationer görs synliga till exempel i helklassdiskussioner. Då kan andra elever erfara hur växlingar mellan representationer kan göras och upptäcka att det kan vara framgångsrikt att använda flera representationer i problemlösning. Eleverna kan också uppmärksammas på att olika representationer fungerar olika bra i olika sammanhang.

Strategier

En **strategi** kan förstås som ett tillvägagångssätt för att lösa en problemuppgift (Taflin, 2007). Elever kan använda en mängd olika strategier för att förstå och lösa problemuppgifter i matematik. En strategi kan vara mer eller mindre bestämd på förhand och användandet av strategier kan skifta snabbt där ett sätt att tänka kring eller arbeta med en problemuppgift förkastas och ersätts av ett nytt. Elever kan med fördel kombinera flera strategier och olika strategier kan även fylla olika funktion i olika delar av problemlösningsprocessen. En lösning på en problemuppgift kan således innebära användande och kombination av flera strategier.

Göra en lista

När elever inleder arbetet med en problemuppgift och ställer sig själva frågor likt ”Vad är frågan?” eller ”Vad vet vi redan?” kan det vara klokt att göra en lista över svaren på dessa frågor samt på olika alternativ för hur uppgiften kanske kan lösas (Taflin, 2007, efter Lester 1996). I förskoleklassen kan dessa frågor och en sådan lista med fördel göras tillsammans i hela elevgruppen. I listan kan eleverna eventuellt rita bilder, ge lämpliga beteckningar och dela upp problemuppgiften i mindre delar så att den blir mer överskådlig. Att göra en lista kan med andra ord möjliggöra för eleverna att skapa struktur, sätta sig in i en problemuppgift, försöka förstå vad det är som efterfrågas och ta fram en första idé för hur uppgiften kan lösas. Eleverna kan även dra sig till minnes om de stött på en liknande problemuppgift tidigare och hur de i så fall resonerade den gången. Listan kan då fortsätta med frågor likt; Går det att omformulera problemuppgiften så man kan dra paralleller till tidigare lösta problemuppgifter? Är det möjligt att dela upp problemuppgiften i mindre delar? Vilka delar består problemuppgiften av i så fall?

Här nedan presenteras ett antal strategier (Lester, 1996; Taflin, 2007) som exemplifieras med problemuppgifter, lektionsexempel och/eller elevlösningar. De strategier som presenteras ska inte förstås som heltäckande och i flera fall överlappar strategierna varandra. Den ordning som strategierna presenteras i ska inte förstås som hierarkisk.

Arbeta baklänges

För vissa problemuppgifter kan det vara framgångsrikt att arbeta baklänges. Detta gäller till exempel vid problemuppgifter där ett slutresultat är givet. Problemuppgifter med hemliga tal är ett exempel där arbeta baklänges kan vara en lämplig strategi.

Jag tänker på ett tal, adderar 6 och multiplicerar med 5. Då blir svaret 45. Vilket tal tänker jag på?

Ett annat exempel är följande algebraiska problemuppgift där arbeta baklänges kan vara en framgångsrik strategi:

En sträcka är A lång och lika lång som summan av sträckorna B och C. Vi vet också att $B + B = C$. Hur lång är A? Kan A anges på flera olika sätt?

I lösningen av denna problemuppgift kan det också vara en framgångsrik strategi att rita sträckorna vilket är en strategi som presenteras nedan.

Rita en bild

Strategin att rita en bild kombineras nästan alltid med andra strategier och är av central betydelse för att strukturera och förstå problemuppgifter (Hagland, 2007). En

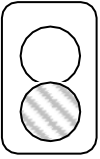
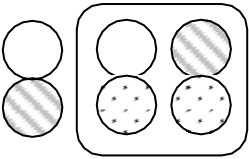
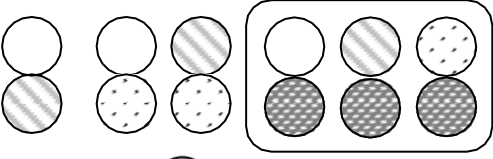
problemuppgift som kan lösas med flera olika strategier, däribland rita en bild, är glassproblemet nedan hämtat från Hagland, Hedrén och Taflin (2005):

Lisa ska köpa lösglass i kulor och kan välja på fyra olika smaker. Hon vill ha två glasskulor och varje smak kan väljas högst en gång och kulornas ordning spelar ingen roll. På hur många olika sätt kan hon välja sin glass?

Problemuppgiften innebär att ta reda på hur många olika glasstrutar Lisa kan välja mellan, om hon har fyra olika smaker att välja bland och ska kombinera dem två och två på alla tänkbara sätt, dock aldrig två kulor med samma smak. Nedan presenteras två olika lösningsförslag. I den första lösningen (Figur 2) görs det tydligt att varje ny smak som tillkommer kan kombineras precis en gång med de smaker som finns sedan tidigare. Genom detta förfarande kan man finna att antalet möjliga kombinationer är sex.

Figur 2

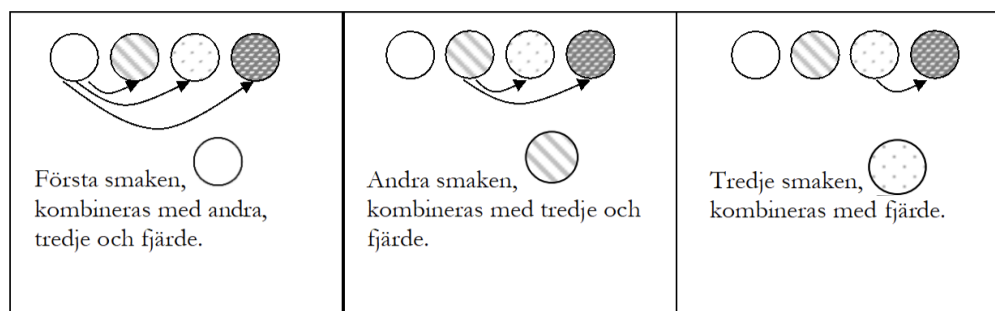
Varje ny smak kan kombineras en gång med de smaker som finns sedan tidigare

 Två smaker. 1 kombination	 Tre smaker,  ny smak, som kombineras med de andra två. (1+2) kombinationer = 3 kombinationer	 Fyra smaker,  ny smak, som kombineras med de andra tre. (3+3) kombinationer = 6 kombinationer
---	--	---

I lösningen nedan (Figur 3) kombineras istället den första smaken en gång med var och en av de andra tre smakerna. Den andra smaken kan på motsvarande sätt även kombineras med de två återstående. Slutligen kan den tredje smaken kombineras med den fjärde smaken. Det totala antalet kombinationer är sex.

Figur 3

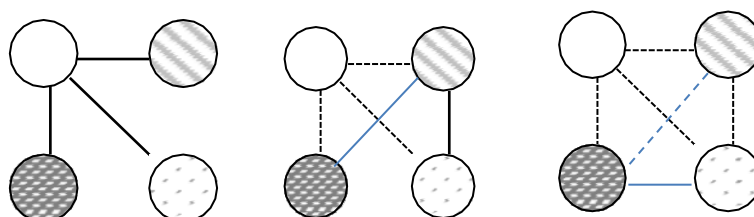
En smak i taget kombineras med de återstående



Lösningen som presenteras i Figur 3 kan också visas med följande bild (Figur 4).

Figur 4

En smak i taget kombineras med de återstående



Göra en tabell eller ett diagram

Tabeller och diagram kan utformas på många olika sätt. Ett exempel på en problemuppgift som kan lösas med en tabell är följande:

På skolan går dubbelt så många flickor som pojkar. Totalt går 96 elever på skolan. Hur många pojkar går på skolan?

Här kan eleverna göra en tabell med en kolumn för antalet flickor, en kolumn för pojkar, och en kolumn för totala antalet elever. Ser eleverna något mönster? Hur många rader i tabellen behöver de fylla i innan de ser mönstret för lösningen?

I en lösning av glassuppgiften ovan kan en tabell likt Tabell 1 användas för att systematiskt finna de möjliga kombinationerna. När man fyllt i alla kombinationer i tabellen kan de kombinationer som finns flera gånger strykas och eventuellt upptäcker eleverna att de enbart behöver inkludera de kombinationer som finns på ena halvan av tabellen.

Tabell 1

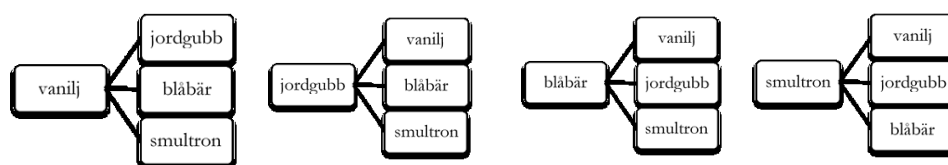
Tabell över möjliga kombinationer där dubletter strukits

	vanilj	jordgubb	blåbär	smultron
vanilj	-	vanilj/jordgubb	vanilj/blåbär	vanilj/smultron
jordgubb	jordgubb/vanilj	-	jordgubb/blåbär	jordgubb/smultron
blåbär	blåbär/vanilj	blåbär/jordgubb	-	blåbär/smultron
smultron	smultron/vanilj	smultron/jordgubb	smultron/blåbär	-

Ytterligare en möjlig strategi är ett så kallat träd-diagram (Figur 5). Här skrivs de fyra smakerna var och en i en egen ruta. De smaker de kan kombineras med kommer sedan i solfjädersform. Även här får man dividera antalet kombinationer med 2, eftersom vanilj-jordgubb räknas som samma som jordgubb-vanilj och så vidare.

Figur 5

Exempel på träd-diagram



För att gå vidare med glassproblemet och undersöker samband och göra det möjligt att generalisera kan även tabeller likt nedan (Tabell 2a och 2b) arbetas fram, till exempel i en avslutande helklassdiskussion.

Tabell 2a och 2b

Tabeller över kombinationer

antal smaker	2 kulor
1	-
2	1
3	$1 + 2 = 3$
4	$3 + 3 = 6$
5	$6 + 4 = 10$
6	$10 + 5 = 15$
7	$15 + 6 = 21$
8	$21 + 7 = 28$
9	$28 + 8 = 36$
10	$36 + 9 = 45$

antal smaker	2 kulor
1	-
2	1
3	$2 + 1 = 3$
4	$3 + 2 + 1 = 6$
5	$4 + 3 + 2 + 1 = 10$
6	$5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$
7	$6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$
8	$7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$
9	$8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$
10	$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$

Formulera ett samband

Att formulera ett samband, till exempel i en ekvation kan ses som en strategi där den mest generella lösningen eftersträvas. I glassuppgiften kan det handla om att hitta en ekvation, uttryckt med algebraiska symboler, som fungerar oavsett antal smaker. Men, ett samband kan även formuleras med egna ord, i något som ibland kallas för begynnande algebraiskt tänkande (Radford, 2012) eller som ett algebraiskt tänkande med en språklig systematik men utan vedertagna algebraiska symboler (Kaput, 2008). Elever kan till exempel med egna ord formulera generella regler likt nedan.

Om man har 4 smaker plussar man på med 3 till så många man hade när man hade 3 smaker. Om man har 5 smaker plussar man på med 4 till så många man hade när man hade 4 smaker. Så där gör man hela tiden. Man plussar alltid på med ett mindre än så många smaker man har. (Elev i årskurs 2)

Om det är 4 smaker så plussar man ihop $3 + 2 + 1$ och om det är 5 smaker plussar man ihop $4 + 3 + 2 + 1$ och så vidare. Man startar alltid på talet före hur många smaker det är. (Elev i årskurs 2)

Även problemuppgiften med pojkar och flickor som presenterades under rubriken tabeller och diagram ovan kan lösas genom att formulera ett samband. Den uppgiften kan beskrivas som ett mönster för sambandet mellan antalet flickor och pojkar och sambandet mellan det totala antalet elever och antalet flickor och pojkar. Det mönstret kan också beskrivas som ett uttryck. Här nedan finns olika förslag på hur ett sådant uttryck skulle kunna se ut.

Om man tar ett antal pojkar så går det dubbelt så många flickor. Sedan är antalet flickor adderat med antalet pojkar.

$$p + 2p = t$$

$$f + f/2 = t$$

$$\begin{cases} f = 2p \\ f + p = t \end{cases}$$

Här är f = antalet flickor, p = antalet pojkar och t = totala antalet elever.

Gissa och pröva

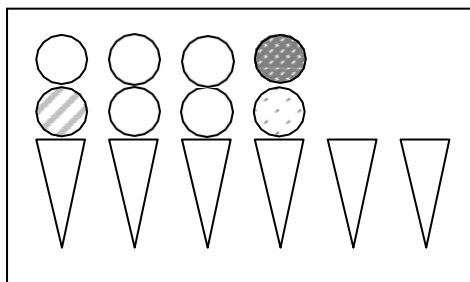
En annan strategi är att gissa och pröva (översatt från trial and error, Lester et al., 1989). De gissningar som görs är inte helt slumpmässiga. Pröva innebär att gissningarna görs mer eller mindre systematiskt. När gissa och pröva används är det viktigt att göra analyser av problemuppgiften för att kunna göra väl valda gissningar. För att gissningar ska kunna väljas med omsorg kan analyserna genomföras genom att lärare och elever tillsammans diskuterar en problemuppgift och/eller ritar gemensamma bilder. I uppgiften om antalet pojkar och flickor på skolan skulle en fråga likt "Är det rimligt att börja gissa att det går två flickor på skolan?" kunna utgöra en utgångspunkt för att reflektera över vilka tal som är rimliga att starta med för att gissa och pröva sig fram till en lösning. Om man startar med 50 flickor så blir det 100 pojkar och totalt 150 elever. Det blir för mycket. Om man istället startar med 20 flickor, hur många pojkar och hur många elever blir det då totalt? Varje gissning ger vägledning inför nästkommande gissning.

Använda laborativa material eller modeller

Ett sätt att arbeta med glassuppgiften är att eleverna får olikfärgade pappcirkor som de kan limma två och två på papper med färdigtryckta strutsymboler. Eleven nedan (Figur 7) prövar sig fram med hjälp av pappcirkor utan någon särskild synlig systematik.

Figur 7

Gissa och pröva med hjälp av pappcirkor



Att använda laborativa material eller modeller kan också vara en ingång för att förstå en problemuppgift. Elever kan använda materialet i en dramatisering, för att lösa en enklare problemuppgift, eller för att dela upp problemuppgiften i delar. Användandet av material kan schematiseras av någon form av tabell eller bild. Även i den tidigare uppgiften med tornet kan laborativt material fungera som ingång i att förstå och lösa uppgiften.

Lösa en enklare problemuppgift

En strategi för att lösa problemuppgifter är att byta ut talen och till exempel prova en lösning inom ett lägre talområde. Om det hade gått totalt 6 elever på skolan i problemuppgiften som efterfrågar antalet pojkar och flickor på skolan, hur skulle eleverna löst uppgiften då? Hur kan den lösningen överföras till ett större antal elever, och hur kan de slutligen tänka gällande de 96 eleverna? Eleverna kan göra en tabell för att upptäcka mönstret mellan antalet pojkar och flickor. Genom att utgå ifrån ett enklare talområde och genom att göra en tabell kan eleverna kanske ställa upp en ekvation utifrån att de urskiljer ett mönster med lägre och antal ($x + 2x = 6$ respektive $x + 2x = 96$, där x är antalet pojkar).

Samverkan mellan strategier och representationer

I texten ovan har representationer och strategier presenterats var för sig vilket enbart är en skrivteknisk disposition av texten. Oftast hänger den strategi en elev väljer för att lösa en problemuppgift och den representation som används för att kommunicera denna strategi intimt samman. Bilder kan till exempel utgöra både en strategi och en representation:

- När bilder används som en strategi används bilder för att förstå och/eller lösa problemuppgiften.
- När bilder används som en representation används bilder för att uttrycka eller illustrera de beräkningar man gjort eller de tankar man tänkt.

Även när elever ska redovisa hur de har löst en problemuppgift används representationer, det är dock inte säkert att en elev använder samma representationer när de ska kommunicera en lösning som de använde när de löste problemuppgiften.

I glassexemplet ovan presenteras bilden som en strategi, samtidigt som bilderna är representationer av de lösningar som eleverna föreslår. Tabellerna visar numeriska utfall av olika antal val av smaker man kan göra om man vill ha en glass med två kulor. Tabellerna är i sin tur sammankopplade med möjligheten att se mönster som kan ses som ytterligare en annan strategi. Mönstren som eleverna kan urskilja kan vara representerade med symboler, både numeriska och algebraiska, ytterligare en

representation. På så vis är strategier och representationer varandras nödvändigheter och omöjliga att helt skilja åt. En god problemlösningsförmåga innebär att man kan använda strategier och representationer oberoende och i samspel med varandra (Kozulin & Kinard, 2008).

Överblicka och ordna utifrån strategier och representationer

Det kunnande som eleverna ges möjlighet att utveckla i en problemlösningssituation påverkas både av problemuppgiften och av de strategier och representationer som läraren och eleverna väljer att fokusera på i problemlösningsprocessen (Kinard & Kozulin, 2012). Lärares undervisning genom problemlösning kan delas in i faserna **förutse – överblicka – välja ut – ordna – koppla ihop** (Smith et al., 2009; Stein et al., 2008; se även Del 2). Genom att läraren i fasen **förutse** reflekterar över vilka strategier och representationer som kan komma att bli aktuella kan läsaren göra sig beredd att stötta eleverna att utforska dessa i relation till den aktuella elevgruppens tidigare erfarenheter. Arbetet i lektionen kan organiseras i förväg så läraren på lättaste sätt kan **överblicka** elevernas arbete. Vidare kan en utgångspunkt för de elevlösningar som **väljs ut** för helklassdiskussion kan vara de strategier och/eller de representationer som eleverna har använt. Nedan följer två exempel på hur elevlösningar kan **ordnas** och **kopplas ihop** i helklassdiskussioner för att synliggöra elevernas olika användande av strategier och/eller representationer.

På hur många sätt kan nallarna sitta i soffan?

Det första exemplet utgår ifrån matematikinnehållet kombinatorik där elever i förskoleklass fått följande uppgift (Palmér & van Bommel, 2019): Tre nallar vill sitta i en tresitssoffa men kan inte komma överens om vem som ska sitta på vilken plats. En nalle har fått en idé att de kan byta plats.

Elevernas uppgift blir att undersöka på hur många olika sätt de kan sitta i soffan innan de behöver börja om från början igen. När yngre elever arbetar med problemuppgiften är det vanligaste att de använder bilder (ritar nallar) eller informella symboler (streck eller prickar i samma färger som nallarna) som representationer. Nedan (Figur 8) finns exempel på elevlösningar där olika representationer har använts. Förutom att i helklassdiskussionen uppmärksamma eleverna på vilka olika kombinationer de har hittat kan de uppmärksammas på hur de har representerat nallarna i sina dokumentationer.

Figur 8

Exempel på olika representationer i elevlösningar



Vad läraren väljer att synliggöra beror på syftet med den aktuella problemlösningen. Genom att läraren inför problemlösningen **förutser** vad som ska synliggöras blir det enklare att såväl **överblicka** som att **välja ut** och **ordna** elevlösningarna inför den avslutande helklassdiskussionen. I exemplen använder eleverna olika representationer och även olika grad av systematisering vilket kan vara utgångspunkt för en helklassdiskussion.

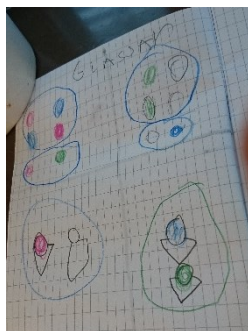
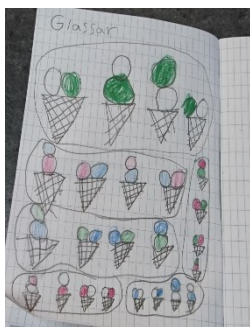
Ett sätt att **ordna** lösningarna i helklassdiskussion är utifrån representationer. Vilka olika representationer har eleverna använt? Är det någon elev som använt fler än en representation? Är det någon skillnad mellan att rita nallar och att rita streck? Därefter kan systematisering i lösningarna synliggöras. Har någon elev arbetat systematiskt genom att hålla en nalle konstant och variera de andra två? Vilken nalle har eleverna i så fall hållit som konstant? Innehåller lösningar dubletter och hur kan systematisering motverka uppkomsten av dubletter? En helklassdiskussion kan dock lika väl börja i synliggörandet av dubletter för att därefter uppmärksamma eleverna på möjliga sätt att systematisera lösningar för att eventuellt avsluta med synliggörande av olika representationer. Slutligen kan givetvis även antalet olika sätt som nallarna kan sitta på diskuteras men med fördel läggs fokus i helklassdiskussionen på lösningsprocessen snarare än på lösningen som sådan.

På hur många sätt kan man välja glass med två smaker?

Exemplet nedan utgår ifrån den ovan presenterade glassuppgiften. Villkoren eleverna arbetar utifrån är att Lisa vill ha en glass med två smaker när hon har fyra smaker att välja mellan. Hon måste välja olika smaker och en kombination kan bara räknas en gång.

Figur 9

Exempel på välja ut representationer i elevlösningar



Eleverna använde olika strategier för att lösa uppgifterna där rita en bild var den dominerande strategin. I Figur 9 visas några av de elevlösningar som valdes ut för helklassdiskussion. Lärarens val av elevlösningar utgick ifrån hur generella lösningarna var. I de utvalda lösningarna representerades lösningarna av en glass för varje smakkombination (vänster Figur 9) samt med färgmarkeringar för de olika kombinationerna (mitten Figur 9). I den tredje lösningen (höger Figur 9) använde eleven utklippta cirklar för att i handling peka hur valet av glassar gjorts. Samtidigt som eleven i handling visade sin strategi illustrerar läraren eleverns handlingar på tavlan. I den avslutande sammanfattningen av de **ordnade** elevlösningarna utvecklar eleverna under lärarens ledning en tabell likt Tabell 2b. Tillsammans hittar eleverna då mönstret för den talföljd som utvecklas då ytterligare smaker läggs till.

Sammanfattning

När elever löser en problemuppgift är det vanligt och önskvärt att de använder olika representationer och strategier. Den eller de strategier elever använder kan skifta under lösningen av en problemuppgift och strategier kan vara mer eller mindre bestämda på förhand. Ofta kombineras flera strategier eftersom de fyller olika funktion i olika delar av problemlösningsprocessen. Såväl representationer som strategier kan vara utgångspunkt för gemensamma helklassdiskussioner i samband med problemlösning.

Referenser

- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1–2), 103–131.
<https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. I A. Cuoco & F. Curcio (Red.), *Roles of representations in school mathematics – 2001 Yearbook* (s. 1–23). National Council of Teachers of Mathematics.
- Hagland, K. (2007). Rita en bild. *Nämnaren*, (3), 27–31.
- Hagland, K., Hedrén R., & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problemuppgifter: Inspiration till variation*. Liber.
- Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? I J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (Red.), *Algebra in the early grades*, (s. 5–17). Routledge.
- Kozulin, A., & Kinard Sr., J. T. (2008). *Rigorous mathematical thinking – Conceptual formation in the mathematics classroom*. Cambridge University Press.
- Lesh, R. (1981). Applied Mathematical Problem Solving. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 235–264. <https://doi.org/10.1007/BF00305624>
- Lester, F. K. (1996). Problemlösningens natur. I R. Ahlström, B. Bergius, G. Emanuelsson, L. Emanuelsson, M. Holmquist, E. Rystedt, & K. Wallby (Red.), *Matematik – ett kommunikationsämne*, (s. 85–91). NCM.
- Lester, F., Garofalo, J., & Kroll, D. (1989). Self-confidence, interest, beliefs, and metacognition: Key influence on problem-solving behaviour. I D. McLeod (Red), *Affect and mathematical problem solving: A new perspective* (s. 75–88). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3614-6_6
- Palmér, H. & van Bommel, J. (2019). *Problemlösning som utgångspunkt: Matematikundervisning i förskoleklass*. Liber
- Radford, L. (2012). On the development of early algebraic thinking. *PNA*, 6(4), 117–133.
- Smith, M.S., Hughes, E.K., & Engle, R.A., & Stein, M.K. (2009). Orchestrating discussions. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 14(9), 549–556.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313–340.
<https://doi.org/10.1080/10986060802229675>

Taflin, E. (2007). *Matematikproblem i skolan – för att skapa tillfällen till lärande*. Umeå Universitet.