

Matematisk problemlösning i skolan

Ole Björkqvist, Åbo Academy

Matematikens historia går långt tillbaka i tiden, och man vet relativt lite om den process som ledde till att människan utvecklade ett formaliserat sätt att resonera kring och representera sådant som vi idag inbegriper i vetenskapen matematik. Rötterna kan finnas i de olika sätt på vilka närstående djurarter orienterat sig i sin omvärld, men människans välutvecklade kommunikativa förmåga har möjliggjort en helt unik precisionsnivå i beskrivningarna.

I den utsträckning som matematikens ursprung är empiriskt, vilket innebär att de begrepp som används är väl anpassade till att beskriva hur man uppfattar sin omvärld, är matematiken definitivt nyttig och bidrar till att människan behärskar denna omvärld allt bättre. Samtidigt vet vi, att matematiken som vetenskap alltmer fjärrat sig från denna omvärld och idag har också andra mål än omedelbar nytta. Matematikens begrepp ses rätt allmänt som frigjorda från sitt ursprung, *abstraherade*, och samtidigt *idealiserade*, vilket innebär en möjlig reduktion av onödig komplexitet. Detta kompletteras av högt ställda krav på motsägelsefrihet inom det begreppssystem som matematiken använder, så att man inom ramen för systemet ska kunna dra säkra slutsatser. Att dessa slutsatser motsvarar slutsatser beträffande företeelser i omvärlden är inte ett nödvändigt krav, även om det ofta är önskvärt. Utvecklingen av den abstrakta matematiken sker genom mänsklig innovation, och till detta bidrar en strävan efter skönhet och fullständighet.

Enskilda matematiska problem har varit i fokus i olika skeden av matematikens utveckling. Ibland har de haft sitt ursprung i konkreta vardagsnära problem – ibland har de varit problem som utgjort en del av matematikens egen utveckling. Det som karakteriserat dem har varit behovet av en lösning, samtidigt som man under en kortare eller längre tid inte vetat hur man ska gå till väga för att lösa dem.

Ordet problem är inte på något sätt begränsat till matematiken, utan det förekommer på liknande sätt i anslutning till andra vetenskaper, både till den del deras problem härleder sig ur vardagen och till den del de utgör inomvetenskapliga problem som man vill lösa. En annan sak är att matematikens jämförelsevis långa historia ger matematiken ett visst privilegium att använda ordet, och dess ursprung i den gamla grekiskan kopplar det starkt till matematiken. Men därtill är ju ordet problem ett i vardagen vanligt förekommande ord, som innebär att man vill komma till en lösning (om man har ett problem), utan att det behöver vara fråga om någon speciell lösningsmetod. När problemet är löst försvinner det.

Skolmatematiken återspeglar delar av matematikens historiska utveckling, och den kännetecknas likaså av förekomsten av problem, som det gäller att lösa. Men eftersom skolmatematiken förekommer i ett fostrans- och utbildningssammanhang har den inte exakt samma syften som matematiken i samhället i övrigt. Tonvikten är kraftigt förskjuten mot att stärka barns och ungdomars förutsättningar att klara sig bra i framtiden, och vid lösandet av problem läggs det en påtaglig tonvikt på lösningsmetoderna. På något sätt ska de kunna bli en del av elevernas mentala resurser inför framtiden. Men också i fråga om själva problemen är man noga – man har mer eller mindre explicita kvalitetskrav i fråga om dem. Både när det gäller problem och lösningsmetoder gäller det att syssla med sådant som är av betydelse för framtiden som till exempel begreppslig utveckling, skicklighet och samhällelig relevans. Balansen mellan vad som är viktig matematik ur samhällets och yrkeslivets synvinkel å ena sidan och vad som är viktig matematik ur matematikens egen synvinkel återspeglas i de problem som man vill att eleverna ska sysselsätta sig med och de lösningsmetoder som man hoppas att de ska lära sig.

När man planerar problemlösning som en aktivitet i skolsammanhang måste man göra kompromisser som har att göra med att eleverna är olika. Det som är ett problem för en är inte nödvändigtvis ett problem för en annan, åtminstone inte med avseende på hur eleverna själva upplever det. ”Det är inte ett problem för mig” kan betyda både ”Det där känner jag inte att jag behöver hitta en lösning till” och ”Det där klarar jag väl enkelt”. En upplevelse att man har ett problem, också i ett matematiskt sammanhang, innebär en motivation att finna en lösning och en samtidig upplevelse att man ännu inte vet hur man ska finna den. Om någotdera villkoret inte är uppfyllt sysslar man i strikt mening inte med problemlösning.

Mera generellt omfattar skolmatematiken uppgifter, som i vissa fall upplevs som problem, i andra inte. Att utföra en uppgift som inte upplevs som ett problem kan vara värdefullt i sig, till exempel med tanke på stärkande av rutinfärdigheter eller som ett steg i en begreppsutveckling. Uppgifter som är avsedda som problem kan alltså ibland fungera väl på ett annat sätt, men motivationsfaktorn kan också förhindra att de har någon effekt alls. Också elever som från början är välmotiverade kan efterhand bli mindre motiverade att fortsätta med en uppgift, om utmaningen upplevs som för stor eller för liten.

Det sätt på vilket olika uppgifter sammanlänkas med varandra, oberoende av om de av eleverna uppfattas som problem eller inte, är av stor betydelse både med tanke på den bild som uppgifterna förmedlar av matematikens struktur och på det sätt de stöder varandra i lärandeprocessen. Ett under långa tider dominant sätt att se på saken karakteriserade skolmatematiken som en linjär progression av uppgifter, vilka eleverna klarade av i något olika takt, men i princip så att man inte avvek från ordningsföljden.

Detta synsätt har efterhand modifierats, även om det i större eller mindre utsträckning kvarstår eftersom det uppfattas som grundat i en logisk struktur för den begreppsliga utvecklingen. Modifikationen innebär bland annat att man accepterar att vissa uppgifter hör hemma på fler än ett ställe, att de kanske mer än någonting annat fungerar som länkar mellan de olika delarna av matematiken eller att de gör det möjligt att exemplifiera vitt skilda tillvägagångssätt inom matematiken. Sådana matematiskt rika matematikuppgifter kan också utgöra nyckeluppgifter med avseende på lärandeprocessen, om man utnyttjar deras inbyggda möjligheter.

Vill man alltså argumentera för att vissa uppgifter passar väl för problemlösning inom skolmatematiken kan man utgå från uppgifternas potential med avseende på

- lärande av matematik som är av betydelse i ett framtidsperspektiv
- motivation
- utmaning på en lämplig nivå.

Dessa aspekter är individrelativa, så att uppgifter i princip fungerar olika bra för olika elever. De är dessutom subjektiva i den betydelsen att eleven kanske gör en annan bedömning av uppgifternas lämplighet än vad läraren gör. Det senare kanske inte är så allvarligt i en klassrumsmiljö där det är läraren som fattar de viktiga besluten, men i ju högre grad man eftersträvar att eleverna verkligen ska äga problemen, desto mer relevant blir det.

Det finns med andra ord en hel del att beakta redan i valet av uppgifter, när det gäller problemlösning i klassen, och det kan vara svårt att balansera de olika aspekterna mot varandra. Man kunde också tycka att olika lärare skulle vara benägna att göra olika bedömningar av uppgifters lämplighet. Detta kunde komma sig av att de har olika erfarenheter av undervisning på ett probleminriktat sätt och kanske också av att de har personliga preferenser i fråga om uppgiftstyper. Det förekommer i alla fall en viss likriktning av uppfattningarna, så att många enskilda uppgifter på ett alldeles klart sätt uppfattas som goda utgångspunkter för problemlösning, och denna likriktning tenderar att standardisera vad man sysslar med. Ett gott exempel är uppgiften:

”En rektangels längd ökas med 10 % samtidigt som dess bredd minskas med 10 %. På vilket sätt förändras rektangelns area?”

I olika varianter är den ofta förekommande i läroböcker i matematik. Det är lätt att argumentera för att det faktiskt är en god uppgift utgående från dess rent matematiska kvalitéer. Andra uppgifter kan för många elever förena matematiska kvalitéer med hög motivationspotential. Ett exempel är följande:

”Du har ett fyraliterskärl och ett nioliterskärl och tillgång till vatten i en sjö. Din uppgift är att ta upp exakt sex liter vatten ur sjön. Du har inga andra hjälpmedel till hands. Hur klarar du av det?”

Förekomsten av goda matematikuppgifter, som överförts från generation till generation, antyder förekomsten av ett alldeles speciellt kulturarv, som har sitt ursprung i nyttig matematik och som efterhand förädlats genom abstraktion och idealisering. De uppgifter som utgör hörnstenar i detta kulturarv representerar tidigare lärares erfarenheter av vad som fungerat väl med tanke på lärandet av viktig matematik, motivation och lämpliga utmaningar.

Problemlösning i ett skolperspektiv kräver en fungerande bas av lämpliga uppgifter. Den är också i hög grad beroende av elevernas individuella förutsättningar att arbeta med sådana uppgifter och att den situation som arbetet utförs i är gynnsam. I detta sammanhang ska vi inte gå närmare in på de psykologiska och sociala aspekterna av matematisk problemlösning (som enskilt lärande och som lärande i grupp). Mycket av det är föremål för forskning inom matematikdidaktiken. Eftersom de olika aspekterna samverkar, är det svårt att studera dem enskilt, och man har ofta ansett det värdefullt att bedriva forskningen via integrerade perspektiv. Den ligger då närmare den reella situation som läraren upplever i klassen. Å andra sidan är det nyttigt att vid behov kunna tillämpa ett variabeltänkande på problemlösandet, så att man åtminstone temporärt bortser från vissa psykologiska och sociala variabler, som i specifika situationer kan göra matematiskt rika matematikuppgifter mindre väl fungerande. Det innebär att man lägger huvudfokus på det matematiska innehållet, utan att glömma bort hur viktiga de psykologiska och sociala aspekterna är.