Skolverket

Ett lektionsexempel: Cirkelns ekvation

Hans Thunberg och Mikael Cronhjort, KTH

Här följer ett exempel på en undervisningssekvens som syftar till att undervisa om avståndsformeln i planet och cirkelns ekvation. Detta exempel måste naturligtvis anpassas till elevgruppens förutsättningar. Här ges också tillfälle att tillämpa de generella strategierna för problemlösning som att först förenkla och studera specialfall och att rita figurer. Mer om strategier kommer i del 4.

Avståndsformeln

I. Gemensam utgångspunkt för arbetet är Pythagoras sats (som elevernas antas ha jobbat med tidigare). Läraren kan skriva upp formeln på tavlan och besvara eventuella frågor.

II. Eleverna får sätta sig i grupper och arbeta med följande sekvens av problem. Eleverna kan arbeta gruppvis hela tiden, eller först arbeta med problemen individuellt för att sedan gruppvis jämföra och diskutera sina lösningar med varandra. Läraren rör sig under tiden i klassrummet och stödjer eleverna i deras arbete.

1. Beräkna avståndet mellan origo och punkten med koordinater
   a) (3, -4) b) (2, 5)
   Rita tydliga figurer och förklara alla beteckningar som införs.

2. Beräkna avståndet mellan punkterna
   a) (2, 3) och (3, 5) b) (2,3) och (3, -4)
   Rita tydliga figurer och förklara alla beteckningar som införs.

3. Formulera ett generellt uttryck för avståndet d mellan två godtyckliga punkter i planet. Förklara också varför vi kan vara säkra på att ditt uttryck verkligen ger avståndet mellan punkterna, det vill säga du ska bevisa att din formel är korrekt. Rita också en tydlig figur och förklara alla beteckningar som införs.

   I vissa elevgrupper är det kanske bäst att gå direkt på uppgift 3, läraren kan då istället introducera uppgifter i stil med uppgift 1 och 2 till de elever eller elevgrupper som behöver hjälp med att hitta en ingång till det generella problemet.

III. Sammanfatta i helklass med fokus på den generella avståndsformeln och dess härledning genom att en grupp presenterar sin lösning. Fråga om andra grupper har gjort på andra sätt. Diskutera om alla varianter är rätt. Eventuella felaktiga formler kan avslöjas genom att pröva på ett specialfall och till exempel jämföra med mätning i en figur. Uppmuntra eleverna att själva bedöma rimligheten. Det kan också vara lämpligt att påpeka att om eleverna ställs inför ett problem som detta, att bestämma en generell formel, så kan en strategi vara att undersöka några exempel, och då börja med exempel som verkar enkelt för att sedan gå vidare till något som verkar lite svårare.

Cirkelns ekvation

IV. Diskutera i helklass vad det är som karaktäriserar en cirkel. Innan eleverna arbetar vidare på egen hand bör man i helklass ha etablerat påståendet att ”En cirkel med medelpunkt *M* och radie *r* består precis av alla de punkter som befinner sig på avståndet *r* ifrån punkten *M*”.

V. Eleverna arbetar på samma sätt som tidigare med följande uppgifter.

4. Formulera en ekvation som säger att punkten *P* med koordinater (*u*, *v*) befinner sig på avstånd 3 längdenheter ifrån origo. Rita en figur som visar möjliga lägen för punkten *P*.

5. Formulera en ekvation som säger att punkten *Q* med koordinater (*w*, *z*) befinner sig på avstånd 4 längdenheter ifrån punkten med koordinater (-1, 2). Rita en figur som visar möjliga lägen för punkten *Q*.

6. Formulera en ekvation i variablerna *x* och *y* som är uppfylld precis för de punkter (*x*, *y*) som ligger på cirkeln med radie *r* och medelpunkt (*a*, *b*). Rita en figur som illusterar situationen.

I vissa elevgrupper är det kanske även här lämpligast att gå direkt på det generella problemet i uppgift 6, och föreslå specialfall som i uppgift 4 och 5 för de elever som behöver hjälp att hitta en ingång.

VI. Summera i helklass genom att elevgrupper får redovisa sin lösning av uppgift 5 och 6. Diskutera alternativa lösningar, och visa eventuellt hur Pythagoras sats direkt kan leda oss till cirkelns ekvation, eller diskutera specialfallet enhetscirkeln och de trigonometriska funktionerna.

VII. Som en sista fas får eleverna arbeta vidare till exempel med att
(i) lösa kontextualiserade problem som tillämpar avståndsformeln och cirkelns ekvation;

(ii) med hjälp av grafritande räknare eller motsvarande experimentera med variationer på cirkelns ekvation, det vill säga andra kägelsnitt;
(iii) öva att snabbt kunna skissera en cirkel i ett *xy*-koordinatsystem utifrån given ekvation, och sedan kontrollera sin gissning med hjälp av sin grafritande räknare;
(iv) generalisera till avståndsformeln i tre dimensioner och sfärens ekvation;
(v) generalisera till olikheter som beskriver cirkelskivor och deras komplement.