Skolverket

Undervisa matematik utifrån problemlösning, gy

(Vid revidering av modulen har vi använt delar av innehållet i modulen Problemlösning för åk 7-9. Vi har även kompletterat med Problembanken från samma modul.)

Problemlösning har en särställning i matematikundervisningen. I Gy11 är problemlösning framskriven både som en förmåga och som ett centralt innehåll genom vilket *alla* förmågor kan utvecklas – inte enbart förmågan att lösa problem. Problemlösning är således både mål och medel i matematikundervisningen. Att undervisa genom problemlösning i syfte att lyfta alla förmågor och att göra det på ett sätt så att alla elever blir delaktiga, utmanas, utvecklas och bidrar till varandras lärande inrymmer både stora möjligheter och är en stor pedagogisk utmaning. Syftet med den här modulen är att ge dig som lärare stöd och verktyg för att ta dig an den utmaningen.

Modulen består av åtta delar med följande rubriker:

1. Matematiska problem och problemlösning
2. Problemlösning och centralt innehåll
3. En undervisningsmetod
4. Klassrumsnormer
5. Strategier
6. Matematisk modellering
7. Argumentation och bevis
8. Bedömning

Del 1 innehåller texter och övningar som introducerar problemlösning. Tanken är här att du ska börja fundera på problemlösningens roll i matematikundervisningen. I del 2 tar vi upp problemlösning som en del av det centrala innehållet. I del 3 får du bekanta dig med en undervisningsmetod som används i Japan och i del 4 beskrivs olika klassrumsnormer som sedan vidareutvecklas i del 5, strategier. Utöver detta innehåller modulen även aspekter som matematisk modellering i del 6, argumentation och bevis i del 7 och slutligen bedömning i del 8.

I Problembanken finns ett antal matematikuppgifter. De matematiska områden som tas upp berör geometri, kombinatorik, talteori och algebra. Uppgifterna är framförallt valda för dig som lärare och kan användas som ett diskussionsunderlag vid de kollegiala träffarna. Vår ambition är att du, med viss anpassning, ska kunna pröva uppgifterna i din egen undervisning. Om detta inte är möjligt kan du komplettera med egna uppgifter. I modulen finns också ett fördjupningsmaterial.

Ansvariga för modulen

Luleå tekniska universitet, i samarbete med Stockholms universitet, Kungliga Tekniska Högskolan och Åbo Akademi.

Del 2. Problemlösning och centralt innehåll

Problemlösning har under lång tid ansetts vara en separat del av matematikundervisningen. I tidigare läroplan (Lpf 94) har begreppet problemlösning bara tagits upp i den generella beskrivningen av ämnet. I och med införandet av Gy11 har problemlösningens roll i undervisningen förtydligats ytterligare då det inte bara tas upp som en av de matematiska förmågorna utan även som en del i det centrala innehållet.

Om man försöker att integrera problemlösning i klassrumsundervisningen, så att man undervisar en större del av kursens centrala innehåll genom problemlösning blir undervisningen mer stimulerande och kan leda till ett bättre lärande samt följer styrdokumentens intentioner.

Målet med den här delen är att du ska undervisa något centralt innehåll genom problemlösning. Du ska även analysera det läromedel du använder dig av, uppmärksamma de problemuppgifter som läromedlet innehåller samt planera för en lektion utifrån materialet.

Del 2: Moment A – individuell förberedelse

Läs

Förbered dig genom att läsa texten ”Att undervisa centralt innehåll genom problemlösning”. I texten diskuteras bland annat hur man kan få problemlösning att vara stimulerande och leda till matematiklärande. Läs även texten ”Ett lektionsexempel: Cirkelns ekvation”, som visar ett exempel på en undervisningssekvens.
Ha följande frågor i åtanke när du läser texterna:

- Vilka erfarenheter har du som motsäger eller stödjer det som sägs i texterna?
- Vilket centralt innehåll skulle du vilja undervisa genom problemlösning? Varför?
- Vilka fördelar och nackdelar ser du med att anpassa och utveckla befintliga problemuppgifter?

När du läser texterna ska du välja ut två citat som du vill uppmärksamma. Efter varje citat skriver du ned dina egna kommentarer. Ta med dig dessa till moment B.

Se film

Du ska också se en lektionsfilm, som genomförs i en högstadieklass, men innehållet som behandlas är i detta sammanhang inte det väsentliga. Fokusera på hur läraren har strukturerat lektionen och hur eleverna samspelar. Gör stödanteckningar om sådant som du lägger märke till beträffande undervisningen.

Skolverket

Analysera läromedel

Välj ett centralt innehåll som du vill undervisa om.
Undersök innehållet i någon lärobok som du använder i undervisningen. Studera var problemuppgifter om ditt centrala innehåll förekommer.

- Vilka typer av uppgifter handlar det om?
- Presenteras problemuppgifterna invävda i kursen eller som separata delar?

Ta med din läroboksanalys till moment B.

Material

PDF **Att undervisa centralt innehåll genom problemlösning**
M. Cronhjort och H. Thunberg

PDF **Ett lektionsexempel: Cirkelns ekvation**
M. Cronhjort och H. Thunberg

En lektion på högstadiet – division med tal i decimalform
Filformatet kan inte skrivas ut.

Att undervisa centralt innehåll genom problemlösning

Mikael Cronhjort och Hans Thunberg, KTH

Problemlösning är en självklar del av matematiken. Vi vill inspirera till att integrera problemlösning i den vanliga klassrumsundervisningen, och till att undervisa en större del av kursens centrala innehåll genom problemlösning, istället för att se problemlösning som en isolerad aktivitet vid sidan av det resterande innehållet. Vi tror att detta följer styrdokumentens intentioner, och kan göra undervisningen mer stimulerande och kan leda till ett bättre lärande. Det är viktigt att alla elever får arbeta med problemlösning, och att det inte uppfattas som en extra aktivitet, till exempel för de elever som arbetat klart.

I ämnesplanen i matematik för gymnasieskolan har problemlösning en särställning. Problemlösning är en av de förmågor som eleverna skall ges möjlighet att utveckla genom undervisningen, och problemlösning förekommer även som ett kunskapsområde i beskrivningen av det centrala innehållet i samtliga kurser.

Under rubriken Ämnets syfte står bland annat att

> Undervisningen ska (…) ge utrymme åt problemlösning både som mål och medel.

Problemlösning som medel kan tolkas som syftande på att använda problemlösning som en metod för att undervisa om någon annan förmåga eller om någon annan del av det centrala innehållet. Ett sådant arbetssätt bidrar också till att förverkliga de övergripande mål som anges tidigare i samma stycke

> Undervisningen ska innehålla varierande arbetsformer och arbetssätt, där undersökande aktiviteter utgör en del. (…) Vidare ska den ge eleverna utmaningar samt erfarenhet av matematikens logik, generaliserbarhet, kreativa kvaliteter och mångfacetterade karaktär.

Syftet med denna text är att visa på hur problemlösning kan användas som ett medel för att undervisa en given del av det centrala innehållet, till exempel räkning med potenser. Idén med sådan undervisning är att eleverna inte bara ska öva på procedurer och räknelagar, som förevisats av läraren eller läroboken, utan också själva vara med och upptäcka mönster, metoder och samband. På så sätt får eleverna större möjligheter att skapa mening och sammanhang, vilket stärker lärandet.

Detta ställer vissa krav på problemuppgifterna, de måste fokusera på det aktuella centrala innehållet och också hjälpa eleverna att utveckla förståelse för viktiga begrepp, samband och metoder. Texten kommer därför att diskutera olika typer av problemuppgifter och hur man kan planera lektioner för denna typ av undervisning.

Olika typer av problem passar för olika syften

Det kan vara svårt att i undervisningssammanhang dra en skarp gräns mellan problemuppgifter och andra uppgifter. Man brukar definiera ett problem (eller en problemuppgift) som en övningsuppgift som eleven vid den aktuella tidpunkten saknar standardmetod för att lösa. Vilka uppgifter som utgör problem beror alltså på vem som skall lösa uppgiften och vid vilket stadium i sin matematikutveckling eleven ifråga befinner sig. Att lösa en andragradsekvation är exempelvis ett svårt problem för den som inte har lärt sig att använda kvadratkomplettering eller den så kallade ”pq-formeln”, medan samma uppgift är en rutinuppgift för den som vet hur man ska gå till väga. På samma sätt kan uppgiften att bevisa Pythagoras sats vara alltifrån ett mycket svårt problem till en uppgift av standardkaraktär.

Det finns många olika typer av problemuppgifter. Några typer som förekommer i gymnasieundervisning är:

- **Kontextualiserade problem** handlar om en situation, t.ex. i vardagen eller yrkeslivet. Dessa kan också kallas textproblem. De kan behöva tolkas, mer eller mindre fritt, som en matematisk modell innan man löser problemet. Problemformuleringen kan helt sakna matematiskt språk. Motsatsen kan kallas **inom-matematiska problem**, som saknar utom-matematiska kopplingar.
- **Öppna problem** brukar man kalla problemuppgifter där formuleringen är sådan att man kan tänka sig såväl olika lösningsmetoder som olika svar. Så är till exempel fallet med kontextualiserade uppgifter där inte alla förutsättningar är givna.
- **Rika problem** som begrepp introduceras av Hagland mfl (2005). De anger sju kriterier som ska uppfyllas för att ett problem ska betraktas som rikt. Bland annat krävs att problemet ska gå att arbeta med på olika kognitiva nivåer. Enklare specialfall av frågeställningen kan kanske undersökas genom prövning eller genom laborativt arbete, medan det krävs matematiska algebraiska resonemang av beviskaraktär för att besvara frågan i sin fulla omfattning. De så kallade aspektuppgifterna som använts på nationella prov i matematik är ofta konstruerade på detta sätt. Rika problem ska också kunna lösas på flera olika sätt, med olika strategier och representationer.
- **Kluringar** syftar ofta på problem lite vid sidan av de matematiska allfarvägarna. Ofta kräver lösningen någon för problemtypen speciell typ av knep eller tankefigur.

Dessa typer av problem kan ge förutsättningar för eleverna att utveckla olika förmågor som modelleringsförmåga, resonemangsförmåga, kommunikationsförmåga och naturligtvis även problemlösningsförmåga.

Varje typ av problemuppgifter har dock sina didaktiska begräsningar och risker. Karlsson och Kilborn (2013) jämför svenska och ryska kursplaner i matematik för årskurs 1 – 6. Bland annat pekar man på att problemlösning har en tydligare definierad roll i den ryska kursplanen, och att problemlösningen där också kopplas tydligare till övrigt centralt innehåll. Man skriver också att

> Det som betonas [i den ryska kursplanen] är att problemlösning i första hand ska ske med matematiska metoder, inte genom att gissa och pröva. (…) Problemlösning är därför ingen fristående rubrik, som i den svenska kursplanen, utan ska genomsyra alla delar av det centrala innehållet. Lägg speciellt märke till, att i den ryska kursplanen varnas det för att arbete med sådana ”kluringar” som saknar matematiskt idéinnehåll, eftersom detta ger en felaktig bild av matematikens natur.
>
> (Karlsson och Kilborn 2013)

Vi vill även fästa uppmärksamhet vid att arbete med öppna eller rika problem kan leda till att elever fastnar i lösningsmetoder på lägre nivå (som till exempel prövning) istället för att lära sig behärska vissa metoder och begrepp eller att se generella samband. Elevernas kunskapsbrister kan förbli osynliga om de kan lösa uppgifterna med metoder på lägre nivå, metoder som sedan är helt otillräckliga i andra sammanhang. Det är därför viktigt att läraren uppmärksammar när detta händer och stöttar eleven i fråga att komma vidare i sin matematiska kunskapsutveckling.

När syftet är att använda problemuppgifter som medel för att undervisa ett visst centralt innehåll är det viktigt att elevernas arbete med uppgifterna verkligen fokuserar mot det tänkta målet. Rika eller öppna problem och kluringar är då inte alltid lämpliga. I det här sammanhanget kan det vara en nackdel att ett problem erbjuder vitt skilda lösningsmetoder. Vi fortsätter med att diskutera hur man hittar eller konstruerar problem lämpade för att undervisa om ett utvalt centralt innehåll.

Att planera för undervisning genom problemlösning

Undervisning har ofta formen av att läraren först presenterar ett nytt begrepp eller en metod, varpå eleverna arbetar enskilt med att lösa övningsuppgifter av rutinkaraktär. En fara med denna undervisningsform är att eleverna endast fokuserar på att använda formler och beräkningsmetoder. Utöver detta kan eleverna även reflektera över hur formlerna härleds, när de får användas, vilka samband som finns med andra formler och metoder, eller varför de beräkningsmetoder man använder faktiskt ger det önskade resultatet. Detta kan i sin tur innebära att de procedurer man övar på lätt glöms bort då de inte inordnas i ett begreppsligt sammanhang.

Att undervisa genom problemlösning kan ge eleverna bättre möjligheter att se samband mellan olika matematiska begrepp och att använda eller anpassa standardmetoder i nya situationer. För att detta ska vara framgångsrikt krävs både en effektiv kommunikation i klassrummet och noga valda problem, ofta en sekvens av problem, som succesivt leder fram till ett nytt begrepp eller samband. Såväl instruktioner som problemuppgifter måste med andra ord utformas så att de leder eleverna till att arbeta med just det centrala innehåll som avses.

Som exempel kan vi tänka oss en lektion som syftar till att undervisa om potenslagarna och hur dessa används vid beräkningar. Låt oss förutsätta att eleverna sedan tidigare är förtrogna med potenser med positiva heltalsexponenter som ett förkortat skrivsätt för upprepad multiplikation, och i enkla fall kan skriva om värdet av sådana uttryck till ett uttryck utan potenser. En enkel skiss till planering skulle kunna se ut på följande sätt.

1. Läraren inleder lektionen med att i helklass kortfattat repetera potensnotation med positiva heltalsexponenter, och förklarar därefter att eleverna nu själva ska få leta efter mönster som uppstår vid multiplikation av potensuttryck.
2. Eleverna får individuellt eller i mindre grupper experimentera med att beräkna numeriska uttryck av formen $x^a x^b$ och uttrycka svaret som en potens av *x,* för att sedan försöka formulera det mönster de ser i såväl ord som i en generell formel. Kanske kan eleverna också försöka formulera ett generellt resonemang (det vill säga ett bevis) för sin generella formel.
3. Eleverna redovisar vad de funnit i en lärarledd helklassdiskussion. Läraren sammanfattar, formulerar potenslagen för multiplikation av uttryck med samma bas, och genomför tillsammans med klassen ett bevis för detta.
4. Lektionen avslutas med att eleverna arbetar med ett kontextuellt problem som leder fram till en tillämpning eller konkret tolkning av det generella abstrakta resultatet.

Det viktiga i den här typen av undervisning är att problemen är ändamålsenliga och att läraren organiserar undervisningen på ett strukturerat sätt. Det handlar om ett slags förhållningssätt man har som lärare. Ett exempel på detta ges av läraren Bengt Drath i videoklippet ”*En lektion om division med tal i decimalform*”. Precis som i exemplet ovan används inom-matematiska uppgifter, och de är av en typ som vanligtvis skulle betraktas som rena proceduruppgifter – den första uppgift som eleverna arbetar med är beräkna kvoten 6 dividerat med 0.1. Genom att eleverna uppmanas att arbeta med att finna olika strategier för att genomföra beräkningen, och sedan också förklara sina strategier, ges arbetet en karaktär av ett öppet problem. I lärarledda helklassdiskussioner summeras resultaten och läraren tydliggör de mönster som eleverna har upptäckt. För att styra eleverna till att lära sig ett visst centralt innehåll använder läraren uppgifter som är endast delvis öppna. Man begränsar valen av lösningsmetod för att ge träning och perspektiv på det aktuella centrala innehållet. Gullbrand (2013) beskriver fler exempel på hur lärare organiserar sin undervisning i samband med problemlösning. Det framhålls som viktigt att läraren initierar och leder processen, stödjer eleverna i deras samtal och funderingar under arbetets gång så att det inte fastnar eller kommer på villospår, och slutligen sammanfattar och summerar.

Problemuppgifter

För att underlätta att få in problemlösning som arbetsform i alla delar av en kurs är det bra att ha ett stort förråd av problemuppgifter som man kan använda. Som ett första steg för att utöka sin personliga uppgiftsbank kan man bekanta sig med det utbud av problemuppgifter som finns i olika läromedel. Läromedlen kan även ge exempel på olika sätt att arbeta med problem. Problemuppgifterna kan finnas dels blandade med standarduppgifter, dels samlade i speciella avsnitt. Många läroböcker har någon sorts markering för att göra det lättare att hitta uppgifter som inte är standarduppgifter. De kan exempelvis kallas aktivitet, gruppaktiviteter, kommunicera, upptäck och visa, digitala rutan, utmaning eller aspektuppgift. Bland dessa kan man hitta uppgifter av problemlösningskaraktär.

Det finns även andra källor där man kan hitta problemuppgifter. Nationellt centrum för matematikutbildning (NCM) har på sin hemsida länkar till problem, bland annat från Kängurutävlingen. Man kan också använda aspektuppgifter från offentliggjorda nationella prov som ett material för problemlösning i grupp.

När man vill använda problemlösning som ett medel att undervisa ett givet centralt innehåll, ställs det flera krav på de problemuppgifter eleverna ska arbeta med. Önskvärt är att uppgifterna

- fokuserar på det aktuella centrala innehållet
- stödjer eleverna i att konstruera centrala begrepp och sammanhang
- är tillräckligt öppna för att det ska finnas något att diskutera eller jämföra
- är på rätt nivå för eleverna.

I de fall man arbetar med kontextuella problem, är det också viktigt att beakta möjligheten till programinfärgning.

För en given situation är det inte alltid man hittar lämpliga uppgifter i läroböcker eller i andra källor. Då kan man behöva modifiera befintliga uppgifter eller själv konstruera lämpliga problem. Här följer några tips på hur man kan gå till väga.

1. Använd standarduppgifter med problemlösning som arbetsform, som i videoklippet *”En lektion om division med tal i decimalform”* med Bengt Drath.
2. Använd ett undersökande arbetsätt, som i exemplet på en lektion om potensräkning.
3. Gör om standarduppgifter till problemuppgifter genom att ge svaret och be eleverna att konstruera frågor som kan ge svaret (Prestage och Perks, 2001). Exempel på sådana uppgifter kan vara

Vilka rätvinkliga trianglar kan ni hitta som har hypotenusan 17?

   eller

Vilka andragradsekvationer har lösningen $x = 5$ eller $x = –2$?

4. Svårighetsnivån kan varieras genom att välja enklare eller svårare numeriska värden på konstanter och koefficienter, använda bokstäver istället för numeriska värden, eller ge mer eller mindre information. Exemplet ovan, där man söker andragradsekvationer som har en viss lösning, blir enklare om man säger att lösningen ska vara $x = 1$ eller $x = 3$, men svårare om man istället kräver att $x = a$ eller $x = b$ ska utgöra ekvationens lösningar.
5. Om målet med lektionen är att undervisa om en speciell lösningsmetod eller ett visst samband, kan man använda sig av en följd av uppgifter som i små steg leder fram till en härledning av metoden eller sambandet. Genom att uppgifterna återspeglar härledningens form, blir elevernas lösningar sammantaget något av en tankekarta över lösningsmetoden/sambandet, dess härledning och dess kopplingar till närliggande matematiska begrepp. Uppgifterna i texten ”Ett lektionsexempel – Cirkelns ekvation” är konstruerade enligt denna princip.

Det är alltid bra att kritiskt granska sin undervisning och vara beredd att modifiera de problemuppgifter som man använder. Det som har fungerat i en klass fungerar inte nödvändigtvis i en annan. Man kan behöva anpassa till exempel problemens kontext eller svårighetsgrad till det program eller den grupp som man undervisar.

Att arbeta tillsammans med sina kollegor och att dela erfarenheter kan både underlätta och berika processen när man vill utveckla eget material. Feedback från elever kan också vara till god hjälp. Det kanske viktigaste är att våga pröva sig fram. Vid första försöket blir sällan allting som man tänkt sig, men varje försök ger mera erfarenhet, och därmed förutsättningar för att förbättra materialet från gång till gång.

Referenser

Gullbrand, A. (2012). Problemlösning som en del i matematikundervisningen. Nämnaren, vol 186, nr 2013:2, s. 58 – 61.

Hagland, K., Hedrén, R.& Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem – inspiration till variation*. Stockholm: Liber.

Karlsson, N. & Kilborn, W. (2013). En jämförelse av skolkulturer. Nämnaren, vol. 186, nr 2013:2, s. 43 – 51.

Prestage, S. & Perks, P. (2001). *Adapting and extending secondary mathematics activities. New tasks for old*. New York: David Fulton Publishers.

Skolverket

Matematik – gymnasieskola
Modul: Undervisa matematik utifrån problemlösning
Del 2: Problemlösning och centralt innehåll

Ett lektionsexempel: Cirkelns ekvation

Hans Thunberg och Mikael Cronhjort, KTH

Här följer ett exempel på en undervisningssekvens som syftar till att undervisa om avståndsformeln i planet och cirkelns ekvation. Detta exempel måste naturligtvis anpassas till elevgruppens förutsättningar. Här ges också tillfälle att tillämpa de generella strategierna för problemlösning som att först förenkla och studera specialfall och att rita figurer. Mer om strategier kommer i del 4.

Avståndsformeln

I. Gemensam utgångspunkt för arbetet är Pythagoras sats (som elevernas antas ha jobbat med tidigare). Läraren kan skriva upp formeln på tavlan och besvara eventuella frågor.

II. Eleverna får sätta sig i grupper och arbeta med följande sekvens av problem. Eleverna kan arbeta gruppvis hela tiden, eller först arbeta med problemen individuellt för att sedan gruppvis jämföra och diskutera sina lösningar med varandra. Läraren rör sig under tiden i klassrummet och stödjer eleverna i deras arbete.

1. Beräkna avståndet mellan origo och punkten med koordinater
   a) (3, -4) b) (2, 5)
   Rita tydliga figurer och förklara alla beteckningar som införs.

2. Beräkna avståndet mellan punkterna
   a) (2, 3) och (3, 5) b) (2,3) och (3, -4)
   Rita tydliga figurer och förklara alla beteckningar som införs.

3. Formulera ett generellt uttryck för avståndet d mellan två godtyckliga punkter i planet. Förklara också varför vi kan vara säkra på att ditt uttryck verkligen ger avståndet mellan punkterna, det vill säga du ska bevisa att din formel är korrekt. Rita också en tydlig figur och förklara alla beteckningar som införs.

   I vissa elevgrupper är det kanske bäst att gå direkt på uppgift 3, läraren kan då istället introducera uppgifter i stil med uppgift 1 och 2 till de elever eller elevgrupper som behöver hjälp med att hitta en ingång till det generella problemet.

III. Sammanfatta i helklass med fokus på den generella avståndsformeln och dess härledning genom att en grupp presenterar sin lösning. Fråga om andra grupper har gjort på andra sätt. Diskutera om alla varianter är rätt. Eventuella felaktiga formler kan avslöjas genom att pröva på ett specialfall och till exempel jämföra med mätning i en figur. Uppmuntra eleverna att själva bedöma rimligheten. Det kan också vara lämpligt att påpeka att om eleverna ställs inför ett problem som detta, att bestämma en generell formel, så kan en strategi vara att undersöka några exempel, och då börja med exempel som verkar enkelt för att sedan gå vidare till något som verkar lite svårare.

Cirkelns ekvation

IV. Diskutera i helklass vad det är som karaktäriserar en cirkel. Innan eleverna arbetar vidare på egen hand bör man i helklass ha etablerat påståendet att ”En cirkel med medelpunkt M och radie r består precis av alla de punkter som befinner sig på avståndet r ifrån punkten M”.

V. Eleverna arbetar på samma sätt som tidigare med följande uppgifter.

4. Formulera en ekvation som säger att punkten P med koordinater (u, v) befinner sig på avstånd 3 längdenheter ifrån origo. Rita en figur som visar möjliga lägen för punkten P.

5. Formulera en ekvation som säger att punkten Q med koordinater (w, z) befinner sig på avstånd 4 längdenheter ifrån punkten med koordinater (-1, 2). Rita en figur som visar möjliga lägen för punkten Q.

6. Formulera en ekvation i variablerna x och y som är uppfylld precis för de punkter (x, y) som ligger på cirkeln med radie r och medelpunkt (a, b). Rita en figur som illusterar situationen.

I vissa elevgrupper är det kanske även här lämpligast att gå direkt på det generella problemet i uppgift 6, och föreslå specialfall som i uppgift 4 och 5 för de elever som behöver hjälp att hitta en ingång.

VI. Summera i helklass genom att elevgrupper får redovisa sin lösning av uppgift 5 och 6. Diskutera alternativa lösningar, och visa eventuellt hur Pythagoras sats direkt kan leda oss till cirkelns ekvation, eller diskutera specialfallet enhetscirkeln och de trigonometriska funktionerna.

VII. Som en sista fas får eleverna arbeta vidare till exempel med att
(i) lösa kontextualiserade problem som tillämpar avståndsformeln och cirkelns ekvation;

(ii) med hjälp av grafritande räknare eller motsvarande experimentera med variationer på cirkelns ekvation, det vill säga andra kägelsnitt;
(iii) öva att snabbt kunna skissera en cirkel i ett *xy*-koordinatsystem utifrån given ekvation, och sedan kontrollera sin gissning med hjälp av sin grafritande räknare;
(iv) generalisera till avståndsformeln i tre dimensioner och sfärens ekvation;
(v) generalisera till olikheter som beskriver cirkelskivor och deras komplement.

Del 2: Moment B – kollegialt arbete

Diskutera

- Vilka citat har ni uppmärksammat? Kommentera och reflektera över dessa.
- Vilka erfarenheter har ni som motsäger eller stödjer det som sägs i texterna?
- Vilka fördelar och nackdelar ser ni med att anpassa och utveckla befintliga problemuppgifter?
- Vilket centralt innehåll valde ni i er läroboksanalys? Varför?

Diskutera filmen utifrån de stödanteckningar som ni gjort. Det kan till exempel vara intressant att lyfta fram något som flera personer har uppmärksammat, men också sådant som bara en av er har uppmärksammat.

- Vad har ni lagt märke till? Vad var det som gjorde att ni fastnade för just det?
- Såg ni något som ni skulle vilja använda i er undervisning?
- Kunde ni se något under lektionen som avslöjade lärarens planering och förberedelse?

Förbered inför moment C

Planera en lektion som tar upp ett centralt innehåll genom problemlösning. Använd det centrala innehåll som valdes i moment A. Låt er också inspireras av texten ”Ett lektionstillfälle: Cirkels ekvation” vid er planering.
Använd era läroboksanalyser och de problemuppgifter ni hittat i läroböckerna eller i Problembanken.
Tänk på att ett specifikt innehåll kan undervisas på flera sätt. Ni kan därför ha valt samma centrala innehåll, men med olika mål och metoder. Se diskussionen er kollegor emellan som ett hjälpmedel för att vidareutveckla era planeringar.

Del 2: Moment C – aktivitet

I detta moment ska du genomföra din planerade lektion/aktivitet.

Skriv ner, med korta stödord, iakttagelser du uppmärksammar under lektionen. Efter lektionen sammanfattar du dina erfarenheter. Skulle du vilja ändra på lektionens innehåll och upplägg till nästa gång?

Ta med dina anteckningar till nästa gemensamma träff, moment D.

Du kan även välja att besöka en kollegas lektion och analysera denna. Planera i så fall hur detta ska organiseras.

Del 2: Moment D – gemensam uppföljning

Diskutera

- Hur fungerade lektionsplaneringen? Vad fungerade bra/mindre bra? Vad kan utvecklas?

- Beskriv en situation du särskilt uppmärksammade.
- Hur kan du utveckla undervisning av det centrala innehållet genom problemlösning?

Skriv

Skriv en kort personlig sammanfattning och spara den tillsammans med dina övriga anteckningar.

Fördjupa dig

Om du är intresserad av att läsa mer inom det här området så hittar du mer material i modulens fördjupning.

Fördjupning

Fördjupning gymnasieskola

Del 2. Problemlösning och centralt innehåll

Gullbrand, A. (2012). Matematikundervisning genom problemlösning. http://ncm.gu.se/media/luma/GE-2012/Gullbrand_Examensarbete_slutversion.pdf

Petersson, H. (2013). *Problemlösningens grunder*. Lund: Studentlitteratur.