

Undervisa matematik utifrån problemlösning, gy

(Vid revidering av modulen har vi använt delar av innehållet i modulen Problemlösning för åk 7-9. Vi har även kompletterat med Problembanken från samma modul.)

Problemlösning har en särställning i matematikundervisningen. I Gy11 är problemlösning framskriven både som en förmåga och som ett centralt innehåll genom vilket *alla* förmågor kan utvecklas – inte enbart förmågan att lösa problem. Problemlösning är således både mål och medel i matematikundervisningen. Att undervisa genom problemlösning i syfte att lyfta alla förmågor och att göra det på ett sätt så att alla elever blir delaktiga, utmanas, utvecklas och bidrar till varandras lärande inrymmer både stora möjligheter och är en stor pedagogisk utmaning. Syftet med den här modulen är att ge dig som lärare stöd och verktyg för att ta dig an den utmaningen.

Modulen består av åtta delar med följande rubriker:

1. Matematiska problem och problemlösning
2. Problemlösning och centralt innehåll
3. En undervisningsmetod
4. Klassrumsnormer
5. Strategier
6. Matematisk modellering
7. Argumentation och bevis
8. Bedömning

Del 1 innehåller texter och övningar som introducerar problemlösning. Tanken är här att du ska börja fundera på problemlösningens roll i matematikundervisningen. I del 2 tar vi upp problemlösning som en del av det centrala innehållet. I del 3 får du bekanta dig med en undervisningsmetod som används i Japan och i del 4 beskrivs olika klassrumsnormer som sedan vidareutvecklas i del 5, strategier. Utöver detta innehåller modulen även aspekter som matematisk modellering i del 6, argumentation och bevis i del 7 och slutligen bedömning i del 8.

I Problembanken finns ett antal matematikuppgifter. De matematiska områden som tas upp berör geometri, kombinatorik, talteori och algebra. Uppgifterna är framförallt valda för dig som lärare och kan användas som ett diskussionsunderlag vid de kollegiala träffarna. Vår ambition är att du, med viss anpassning, ska kunna pröva uppgifterna i din egen undervisning. Om detta inte är möjligt kan du komplettera med egna uppgifter. I modulen finns också ett fördjupningsmaterial.

Ansvariga för modulen

Luleå tekniska universitet, i samarbete med Stockholms universitet, Kungliga Tekniska Högskolan och Åbo Akademi.

Del 5. Strategier

Genom att läsa texten "Om strategier" i Moment A får du inblick i olika strategier som kan användas vid problemlösning. Du får även möjlighet att fundera på vilket sätt du kan stötta eleverna att välja och utveckla sina problemlösningsstrategier.

Målet med den här delen är att du ska fördjupa dina kunskaper om olika strategier vid problemlösning. Dessutom ska du planera en lektion för att konkretisera detta.

Del 5: Moment A – individuell förberedelse

Läs

Förbered dig inför den gemensamma träffen genom att läsa artikeln "Om strategier". Ställ dig följande frågor:

- Vilka frågor ställer du till dig själv när du löser ett matematiskt problem?
- Hur tar du elevernas potentiella strategier i beaktande vid din lektionsplanering?
- Hur stöttar du eleverna i användningen av olika strategier vid problemlösning under lektionen?

När du läser texten ska du välja ut två citat som du uppmärksammar. Efter varje citat skriver du ned dina egna kommentarer. Ta med dig dessa till den gemensamma träffen, moment B.

Lös problem

Välj ett problem från Problembanken, t.ex. från Ekvationer och system av ekvationer s. 19 eller välj ett problem från läroboken. Lös problemet och reflektera över dina strategier när du löser uppgiften. Gör korta anteckningar som du tar med dig till er gemensamma träff, moment B.

Material



Om strategier
A. Wikström och O. Björkqvist

Om strategier

Anna Wikström, Luleå tekniska universitet
Ole Björkqvist, Åbo Akademi

Problemlösning har i många fall handlat om att eleverna ska tillämpa speciella matematiska metoder i en mer eller mindre bekant kontext för att matematiken ska framstå som mer verklighetsanknuten. Forskning har visat att detta inte har varit särskilt effektivt.

Som vi tidigare nämnt uppfattar elever problemlösning i matematik som följer:

- Varje problem som presenteras, av en lärare eller en lärobok, går alltid att lösa och är rimligt.
- Det finns ett (och endast ett) korrekt svar till varje problem.
- Svaret går att få med hjälp av att man utför en eller flera uträkningar med talen i uppgiften, och då oftast alla tal.
- Problemet innehåller all information som behövs för att lösa det.
- Personer, saker och platser skiljer sig från verkligheten trots att de kan verka verkliga.

Idag är det många lärare som använder problemlösning som ett verktyg och en undervisningsmetod att jobba med för att utveckla förståelsen av matematiska begrepp. Då blir väl konstruerade uppgifter, kunskap om olika problemlösningsstrategier och träning i matematiskt tänkande viktiga delar för att eleverna ska bilda en djupare förståelse för matematiken.

Väl utformade matematikuppgifter

Användning av väl utformade matematikuppgifter med tillhörande aktivitet och möjlighet till samarbete är en av nycklarna till lyckad undervisning och god matematikinläring. Det är däremot inte alltid så lätt att hitta passande uppgifter. Många problem kan tyckas intressanta och matematiskt stimulerande, men de ska även följa undervisningens syfte och mål.

Kunskap om strategier

Det är betydelsefullt att läraren framhåller att problem kan lösas på flera sätt och att det sker en kommunikation mellan lärare och elever kring de olika strategierna. Genom att använda sig av och öva på de olika strategierna blir man också skickligare på dem.

Undervisning som har ett problemlösningsperspektiv har alltså både att göra med:

- variation av de uppgifter, som kan lösas med en viss strategi och
- variation av de strategier, som kan tillämpas på en viss uppgift.

Vardera typen av variation kan förverkligas gradvis, om man så föredrar. Det innebär att det förekommer vissa likheter mellan de uppgifter som löses med en bestämd strategi eller att det finns vissa likheter mellan de strategier som tillämpas på en bestämd uppgift. För svagare elever kan detta vara ett avgörande stöd. Å andra sidan får man de vackra aha-upplevelserna om man löser helt olika uppgifter med en och samma strategi eller en och samma uppgift med helt olika strategier. Eleverna blir sedan duktiga problemlösare genom att försöka ta sig an problemet och när läraren modifierar uppgiften och stöttar dem i själva processen.

Polyas välbekanta modell för problemlösning omfattar följande fyra steg:

1. Förstå problemet
2. Planera för vilken strategi som ska användas
3. Använda strategin
4. Se tillbaka på problemet

Några av de strategier Polya beskriver handlar om transformation av problemet till ett ekvivalent problem, lösande av ett mera omfattande (mera generellt) problem, lösande av ett mindre omfattande problem (ett specialfall) och lösande av ett besläktat problem. Andra strategier som ofta figurerar i problemlösningslitteraturen kan ha en tydligare koppling till matematiska begrepp, såsom strategin att söka och utnyttja symmetri eller paritet och strategin som går under namnet duvslagsprincipen eller Dirichlets lådrprincip.

De representativa strategierna är av synnerligen stor betydelse. Matematiska problem går ofta att beskriva i ord, bild och form. Det sker till exempel genom att man diskuterar problemet med andra, använder sig av konkret material, ritar en bild, ett diagram eller graf och/eller att göra en lista eller tabell. Genom att göra detta får man en förståelse för vad problemet är och hur man kan lösa problemet. Ofta är det fråga om att gå från något konkret (en bild) till något abstrakt (till exempel en tabell). Valet mellan två abstrakta matematiska representationer (till exempel en graf eller en formel) kan också vara helt avgörande för om man lyckas komma till en lösning av ett problem. Det språk som

används för att representera matematiska problem i ord kan vara både konkret och abstrakt. Det är viktigt att vara medveten om de språkliga och de matematiska utmaningarna vid problemlösning.

Strategin att angripa ett problem baklänges innebär att man utgår från det mål som sätts i uppgiften, undersöker hur detta mål kan nås från ett tidigare steg, hur detta i sin tur kan nås från ett ännu tidigare steg, osv. En obruten kedja till utgångssituationen (som beskrivs av uppgiftens formulering) innebär att man konstruerat sig en lösning.

Att testa sig fram (trial and error) kan också uppfattas som en problemlösningsstrategi, förutsatt att de försök till lösning som görs följer någon form av uteslutningsprincip. I sin enklaste form, med två tillgängliga möjligheter att välja mellan, är den nära förknippad med principen för indirekta bevis.

Exempel

Becken & Osvoid (2006) analyserar följande problem:

Det har gått en månad sedan Ichiros mamma lades in på sjukhuset. Han har bestämt sig för att be en bön med sin lillebror i templet varje morgon för att mamman snart ska bli bra. I Ichiros plånbok finns 10 tio-yen-mynt och i den yngre broderns plånbok finns 22 fem-yen-mynt. De har bestämt att varje gång ta ett mynt från var och en och stoppa i myntboxen. De ska fortsätta att be tills endera plånboken är tom. Efter avslutad bön tittar de en dag i sina plånböcker och upptäcker att den yngre brodern har mer pengar kvar än Ichiro. Frågan är: Hur många dagar är det sedan de började be? (s.215–228)

Eleverna använde följande strategier för att lösa problemet:

1. En nedräkningsprocedur, antingen med stöd av konkret material eller med hjälp av en tabell:

Dag nr	1	2	3	4	...	11	12	13	14	15	16	17	18
Ichiro	170	160	150	140	...	70	60	50	40	30	20	10	0
Brodern	105	100	95	90	...	55	50	45	40	35	30	25	20

2. En regel för beräkning:
Ta hela differensen $180 - 110$ vilket ger 70 och dividera med differensen av brödernas gåvor 10-5, som är 5. Detta ger $70/5$, dvs 14 dagar innan de har lika mycket pengar. Alltså har brodern mer pengar efter 15 dagar.
3. Symbolisk representation:
Låt x beteckna antalet dagar. Låt Ichiros pengar tecknas y_I och broderns y_B . då har vi de linjära sambanden $y_I = 180 - 10x$ och $y_B = 110 - 5x$. Summorna är lika

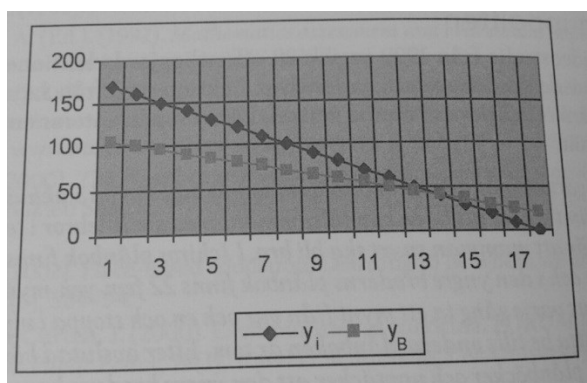
när $180 - 10x = 110 - 5x$, med andra ord när $x = 14$. Brodern har mer pengar när $180 - 10x < 110 - 5x$, med andra ord när $x > 14$.

För att komma fram till kategori 3 använder eleverna sig av kategori 1 eller 2.

Ytterligare en strategi som eleverna kan använda sig av är:

4. En visuell geometrisk representation:

I ett koordinatsystem kan vi representera det linjära sambandet mellan x och y_I samt mellan x och y_B som punkter på två linjer. I diagrammet ser vi lösningen då Ichiros linje ligger ovanför broderns, dvs då $x > 14$.



De första kategorierna, som består av elevlösningar på lägre nivå, kan uppfattas som väldigt enkla och då förbises vid en gemensam diskussion. De slutliga ekvationerna och olikheterna kan tyckas utgöra kärnan vid matematikundervisning på gymnasiet. Däremot kan man, genom att även använda sig av dessa lösningar, beskriva matematiken när man går från det specifika till det generella.

Lösningsstruktur enligt Lithner

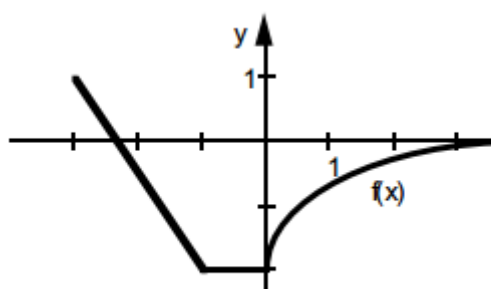
Lithner (2000) frågar sig hur universitetsstudenter resonerar sig fram till en lösning när de ska lösa ett matematiskt problem. I analysen presenteras följande Lösningsstruktur:

1. *Problematisering*: En svårighet där det inte är uppenbart hur man ska fortsätta.
2. *Strategival*: En möjlighet är att välja (i vid mening: välja, minnas, rekonstruera, konstruera och så vidare) en strategi som kan lösa svårigheten. Detta val kan stödjas av en *Förutsäggande argumentation*: Kommer strategin att lösa den problematiska situationen?
3. *Strategigenomförande*: Kan stödjas av *Verifierande argumentation*: Har strategin löst den problematiska situationen?
4. *Slutsats*: Ett resultat erhålls.

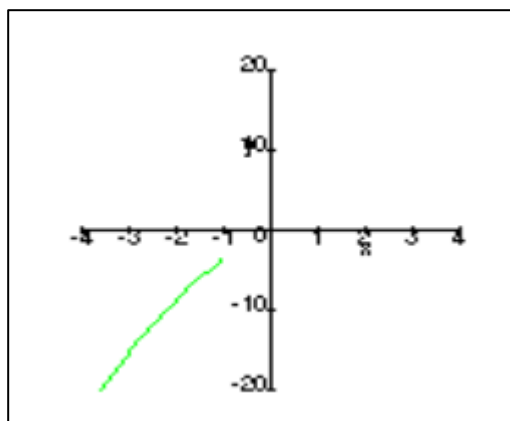
I Exempel 2 i artikeln (Lithner, 2000) ska studenter med utgångspunkt i en graf lösa tre uppgifter.

Exempel 2

- a) Skissa grafen till $f'(x)$.
- b) Vad är $f(-2)$, $f'(0)$ och $f''(2)$?
- c) Skissa grafen till $g(x)$, om $g'(x) = f(x)$.

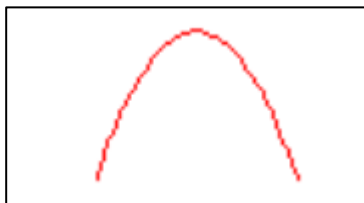


En av Lithners studenter Per försöker lösa 2c med välbekanta algoritmiska metoder i intervallet $(-3, -1)$. Han gör ett antal slarvfel och kommer fram till följande skiss:



Per går sedan vidare till nästa deluppgift utan att reflektera över sitt svar. Lithner avbryter honom och följande samtal uppstår:

- Är f derivatan till g ?
- Nej, derivatan till g är positiv (han pekar på sin figur ovan), men inte f (han pekar på $(-3, -1)$ i figuren i Exempel 2).
- Kan du utifrån detta resonemang göra en grov skiss av g på $(-3, -1)$?
- Först är derivatan positiv (han pekar på figuren i Exempel 2), sen negativ:



Lithner beskriver sina frågor som en försiktig ledning. ”Per har redan kunskapsbasen för att skickligt konstruera en helt annan typ av matematiskt resonemang än tidigare och det tar honom bara någon minut att komma fram till en hyfsad figur. Varför gör Per inte så själv från början?”

Lithner analyserar Pers arbete fram till den första, felaktiga, figuren som följer:

”(2) Strategival: Den mest välbekanta metoden är att identifiera k och m i $y = kx + m$. Integrerar sen med välbekant algoritm.

(3) Strategigenomförande: Kunde ha lyckats, men det innehåller många steg vilka ger några slarvfel. Ingen verifierande argumentation eller kontroll av svaret.”

Lithner lyfter huvudorsaken till studentens svårigheter och framgångar. Studentens svårigheter i den första delen beror på att resonemangen baseras på väletablerade erfarenheter från inlärningsmiljön. Detta kan även gälla i icke-rutinmässiga situationer eller där rutinerna trasslar till sig. I den andra delen beror studentens framgång på en konstruktion av resonemang som baseras på matematiska egenskaper hos derivatan.

Lithners artikel visar på svårigheterna som uppstår när de matematiska begreppen blir mer avancerade. Studenten Per resonerar sig inte fram utan försöker komma ihåg de strategier han använt tidigare när han löst liknande problem. Med hjälp av läraren kan han sedan inse bristerna i sina uträkningar och resonerar sig fram till en annan lösning.

Lithner analyserar sedan läroböcker som används vid universitetsstudier och anser att resultaten mycket troligt även kan gälla gymnasieskolans läroböcker. Hans resultat visar att ca 70 % av uppgifterna kan lösas på ett matematiskt ytligt sätt. Detta gör eleverna genom att de känner igen uppgiften och kopierar ett liknande löst exempel, eller följer någon form av regel. Detta skriver han kan göras utan att konstruera egna resonemang, och utan att beakta uppgifternas matematiska egenskaper. Han menar att om man använder samma strategival, det vill säga att identifiera liknande exempel eller regler, men med en mindre förändring av den givna lösningsmetoden, så kan ytterligare ca 20 % av uppgifterna hamna i den kategorin. I själva strategigenomförandet måste däremot en mindre förändring av den givna lösningsmetoden göras. I endast 10 % av uppgifterna måste de matematiska egenskaperna beaktas och studenten kan skapa egna resonemang. Dessa, menar Lithner, kan därför kallas kreativa problem.

Lärarens roll

Lärarens undervisning och inställning till problemlösning visar sig ha stor betydelse för elevernas resultat. Om läraren presenterar ett problem och visar hur det löses sker väldigt lite utveckling hos eleverna. Forskningen har visat att grupp- och helklassdiskussioner ökar elevernas problemlösningsförmåga. Då blir det en bättre diskussion och alla får möjlighet att prata och presentera sina tankar och lösningar. Slutligen så måste problemlösning få ta den tid den tar. Eleven ska inte förväntas läsa och börja lösa problemet på en gång. I det fallet är problemet inget riktigt problem enligt definitionen, som vi nämnde i del 1.

Referenser

Bekken & Osvald (2006), Reflektioner kring en videostudie. I Boesen, J. m.fl. (red.) *Lära och undervisa matematik – internationella perspektiv*. (s. 215–228). Göteborg: NCM.

Lithner, J. (2000). Varför blir matematik så svårt? *Nämna*ren Nr 4, 46–51.
[tillgänglig via Nämnarens artikeldatabas <http://ncm.gu.se/namnaren>]

Del 5: Moment B – kollegialt arbete

Diskutera

- Vilka citat har ni uppmärksammat? Kommentera och reflektera över dessa
- Diskutera problemuppgiften som ni valde i moment A. Vilka strategier använde ni? Motivera!
- Hur arbetar ni med elevernas problemösningsstrategier i undervisningen?
- Hur kan elevernas strategival utvecklas?

Förbered inför moment C

Planera en lektion/aktivitet med fokus på elevernas olika lösningsstrategier. Använd någon av problemuppgifterna som ni valt i moment A och anpassa problemet till någon av dina kurser. Tänk på att uppgiften ska vara utmanande och ge möjlighet att använda olika strategier. Diskutera vilka olika strategier ni förutser av just era elever för det valda problemet.

Följ den japanska metoden, som togs upp i del 3, i er planering.

Del 5: Moment C – aktivitet

I detta moment ska du utföra en lektion och fokusera på elevernas olika problemlösningsstrategier.

Skriv ner, med korta stödord, iakttagelser du uppmärksammar under lektionen. Efter lektionen sammanfattar du dina erfarenheter. Skulle du vilja ändra på lektionens innehåll och upplägg till nästa gång?

Ta med dina anteckningar till nästa gemensamma träff, moment D.

Du kan även välja att besöka en kollegas lektion och analysera denna. Planera i så fall hur detta ska organiseras.

Del 5: Moment D – gemensam uppföljning

Diskutera

Samtala utifrån de lektioner ni har planerat och undervisat.

- Överensstämde de strategier eleverna använde med de ni hade förutsett?
- Vilka diskussioner fördes om olika strategival?
- Hur kan man utveckla lektionen utifrån era diskussioner och erfarenheter?

Skriv

Skriv en kort personlig sammanfattning och spara den tillsammans med dina övriga anteckningar.

Fördjupa dig

Om du är intresserad av att läsa mer inom det här området så hittar du mer material i modulens fördjupning.

Fördjupning

Fördjupning gymnasieskolan

Del 5. Strategier

I den här delen finns fler texter där du kan läsa mer om problemlösningsstrategier.

Referenslitteratur

10 Instructional Shifts That Raise Student Achievement.
Leinwand, S (2009). Accessible Mathematics.