

Problemlösning som mål och medel

Helena Grundén, Högskolan Dalarna; Helena Eriksson, Högskolan Dalarna; Johan Åkerstedt, Högskolan Dalarna

Problemlösning är en viktig del i matematikundervisningen i årskurs 4–6. I denna text beskrivs problemlösning och de ramar som påverkar undervisningstillfällena som inkluderar problemlösning. Exempel på sådana ramar är normer i klassrummet samt lärares och elevers syn på matematikundervisning. I texten beskrivs också olika typer av matematikuppgifter och vad som kännetecknar en problemuppgift.

Problemlösning

Problemlösning är något vi ägnar oss åt i många sammanhang och det har länge setts som en central del i lärande och undervisning i matematik. Elever som kommer till mellanstadiet har löst problem både innan de började skolan (Palmér & van Bommel, 2019), och i undervisningen under lågstadiet. Oavsett vilka erfarenheter eleverna har kan läraren genom att medvetet planera för undervisning med problemlösning ge elever möjlighet att utveckla sin förmåga att lösa problem. Genom problemlösning ges elever också möjlighet att använda de kunskaper som de tidigare har utvecklat samt utveckla nya kunskaper i matematik. Problemlösning inbjuder dessutom till att elever engageras i matematiskt och kreativt tänkande. Det betyder att ”att köra fast” är en viktig del av arbete med problemlösning och att elever när de arbetar med problemuppgifter behöver lämna förutbestämda lösningsstrategier och använda sig av kreativitet och nya insikter för att hitta vägar till lösningar (Liljedahl et al., 2016). Förutom möjlighet att utveckla problemlösningsförmågan, sina kunskaper i matematik och sin kreativitet får elever genom problemlösning möjlighet att utveckla andra förmågor som till exempel kommunikations- och resonemangsförmåga. Genom problemlösning kan också elevers samarbetsförmåga utvecklas. Elever behöver inte först ha utvecklat specifika förmågor eller kunskaper i matematik eller ha erfarenheter av att samarbeta i grupp för att delta i undervisningstillfällena som inkluderar problemlösning (Palmér & van Bommel, 2019).

Problemlösning i styrdokument

Problemlösning är en viktig del av matematikundervisningen, vilket också syns i de svenska styrdokumentena.

I grundskolans kursplan för matematik (Skolverket, 2019) anges att elever ska möta problemlösning som ett innehåll och som en förmåga vilket innebär att problemlösning

är både ett mål och ett medel för matematikundervisning. Som centralt innehåll för årskurs 4–6 innebär problemlösning strategier för matematisk problemlösning i vardagliga situationer och matematisk formulering av frågeställningar utifrån vardagliga situationer. Som förmåga innebär problemlösning att utveckla förmågan att formulera och lösa problemuppgifter samt värdera valda strategier och metoder. Problemlösning kan också bidra till att uppfylla andra delar av ämnets syfte som till exempel att undervisningen i matematik ska ge elever möjlighet att uppleva estetiska värden i möten med matematik samt att kommunicera med olika uttrycksformer (Skolverket, 2019).

Perspektiv på problemlösning

Det finns olika sätt att se på problemlösning. Enligt Wyndhamn et al. (2000) har det över tid skett en utveckling av synen på problemlösning i matematikundervisningen.

Utvecklingen har gått från matematikundervisning **för** problemlösning där eleverna ska lära sig matematik för att kunna lösa problemuppgifter, till matematikundervisning **om** problemlösning där eleverna ska lära sig strategier och modeller som kan användas vid problemlösning. På senare tid även till matematikundervisning **genom** problemlösning där eleverna genom att arbeta med väl valda problemuppgifter lär sig matematik.

Ett annat sätt att beskriva syftet med problemlösning i matematikundervisningen är att skilja på undervisning där problemlösning är ett **mål** i sig och undervisning där problemlösning utgör ett **medel** för att lära ett matematikinnehåll (English & Gainsburg, 2016). I undervisning där problemlösning är ett mål kan läraren till exempel visa och låta eleverna arbeta med olika strategier för problemlösning. Då väljs problemuppgifter som gör det möjligt att synliggöra olika strategier för lösning. När problemlösning är ett medel i syfte att eleverna ska lära sig ett specifikt innehåll väljs problemuppgift utifrån tänkt matematikinnehåll. Naturligtvis kan de båda syftena – problemlösning som mål och medel – kombineras i samma problemuppgift. Den kombinerade synen på problemlösning är i linje med läroplanens skrivningar gällande problemlösning som **mål** och **medel**.

Uppgifter i matematikundervisning

I matematikundervisning används olika typer av uppgifter och vilken typ av uppgift eleverna möter i undervisningen är en av de faktorer som avgör vilket lärande som blir möjligt. Ett sätt att dela in matematikuppgifter är att skilja mellan **rutinuppgifter** och **problemuppgifter**.

Rutinuppgifter är uppgifter där eleverna är välbekanta med sättet de ska lösas på. Läraren har presenterat hur man brukar göra, hur man kan tänka, säga, ställa upp, räkna ut, skriva, rita, använda symboler och så vidare. Om de ställs inför liknande uppgifter

framöver är tanken den att de ska känna igen uppgiftstypen och kunna välja och använda en förväntad metod. Rutinuppgifter kan vara av olika svårighetsgrad och kan till exempel innehålla ett enstaka steg, flera steg eller flera räknesätt.

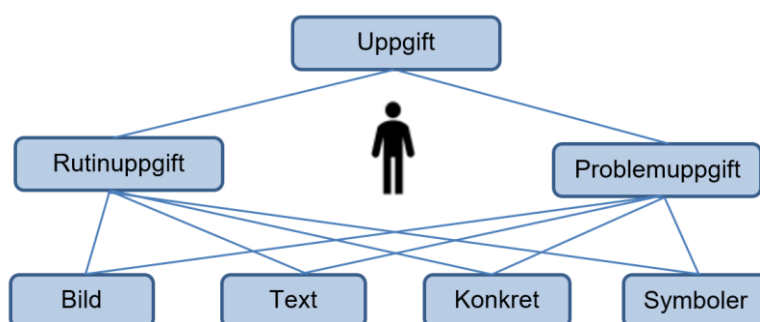
De uppgifter som används vid problemlösning benämns i denna modul som **problemuppgifter**. För att eleverna ska ges möjlighet att utveckla kunskaper om både ett specifikt matematiskt innehåll och sin problemlösningsförmåga ställs krav på de uppgifter som eleverna ställs inför (English & Gainsburg, 2016). Problemuppgifter beskrivs ofta som uppgifter där en elev eller en grupp av elever inte direkt vet hur de ska lösa uppgiften. För att kunna lösa uppgiften behöver eleverna göra någon form av undersökning eller prövning, vilket innebär att eleverna kan lösa uppgiften på olika sätt. En uppgift är i sig varken en problemuppgift eller en rutinuppgift – det som för en elev är en problemuppgift kan för en annan elev vara en rutinuppgift.

Problemuppgifter kan presenteras på olika sätt, till exempel med bilder, med löpande text och med matematiska symboler. Det finns problemuppgifter som är praktiska, som att be eleverna möblera klassrummet så att det blir lätt att röra sig mellan bänkarna eller att be elever ta reda på hur långt det är runt skolan utan att använda formella mätverktyg. Även ”rena matematikuppgifter” (Blum & Niss, 1991) som till exempel $\frac{1}{2} = 3 \cdot 8$ kan vara en problemuppgift som för vissa elever kräver en undersökning medan uppgiften för andra elever är en rutinuppgift.

Det är inte hur uppgiften presenteras som avgör om det är en problemuppgift eller en rutinuppgift. Istället behöver läraren inför arbete med problemlösning granska innehållet i uppgiften i relation till de egna eleverna och deras förutsättningar.

Figur 1

Uppgiftstyper och sätt att presentera dem



En uppgift kan antingen kategoriseras som en rutin- eller problemuppgift (Figur 1) och kategoriseringen sker utifrån den elev som ska möta uppgiften. I Figur 1 syns också hur såväl rutin- som problemuppgifter kan presenteras för elever genom bild, text, symbol

eller laborativt material. Det finns även ”tillämpade uppgifter” (Blum & Niss, 1991) där matematiken är satt i ett sammanhang. Uppgifterna kan antingen vara vardagsnära och handla om praktiska problem som ligger nära elevernas vardag eller påhittade för att lyfta fram specifika matematiska idéer, som uppgiften ”Tornet” som finns i denna del.

En typ av problemuppgifter som ofta används vid problemlösning är det som benämns ”rika problem”. Ett rikt problem ska enligt Hagland et al. (2005, s. 28–30):

- introducera viktiga matematiska idéer eller strategier
- vara lätt att förstå och alla elever ska kunna arbeta med det
- upplevas som en utmaning, kräva ansträngning och tillåtas ta tid
- kunna lösas på flera olika sätt
- kunna ligga till grund för en matematisk diskussion
- fungera som en brobyggare mellan olika matematikinnehåll
- leda till att nya intressanta problemformuleringar.

Oavsett om elever arbetar med det Hagland et al. (2005) benämner ”rika problem” eller inte bör en del i arbetet med problemlösning vara att eleverna själva får formulera problemuppgifter. Det kan handla om att ”formulera ett liknande problem” där eleverna kan visa hur de förstått det matematiska innehållet i uppgiften och hur de överför det till en ny problemuppgift. Det kan även handla om att eleverna formulerar fristående problemuppgifter (Hagland et al., 2005).

Perspektiv på matematikundervisning

Undervisning kan kategoriseras och beskrivas på olika sätt. Skemp (2006) kategoriserar till exempel undervisning i matematik som antingen instrumentell eller relationell. I den instrumentella undervisningen stöds elevernas arbete av minnesfunktioner och enkla metaforer. I den relationella undervisningen utgörs grunden för elevers arbete av matematiska resonemang och argument.

Ett annat exempel är van Oers (2001) som ger tre olika beskrivningar av vad undervisning i matematik kan vara att:

- läraren förmedlar olika numeriska räkneexempel som eleverna använder för färdighetsträning
- läraren presenterar problemuppgifter för eleverna som de genom olika givna strategier ska lösa
- eleverna och läraren identifierar tillsammans en problemuppgift, hittar modeller för att lösa uppgiften och löser sedan uppgiften gemensamt.

Olika syn på matematik och matematikundervisning enligt ovan kan få konsekvenser för hur matematikundervisning planeras och genomförs och för de normer som formas i matematikklassrummet.

Normer i matematikklassrummet

I alla klassrum förekommer normer som skapas av det sociala samspelet mellan lärare och elever. Vissa normer är generella och genomsyrar all undervisning medan andra normer är specifikt knutna till olika ämnen. De normer som är specifika för matematikklassrummet benämns sociomatematiska normer (Yackel & Cobb, 1996). De sociomatematiska normerna är sällan uttalade utan uppstår i den sociala och kulturella kontext som varje matematikklassrum utgör där de både påverkar och påverkas av matematikundervisningens utformning och hur lärare och elever agerar (Yackel & Cobb, 1996). I vissa matematikklassrum har läraren en genomgång, ställer frågor och eleverna räcker upp handen när de vill svara på frågorna. Elever i sådana klassrum kan anses ”duktiga” om de kan svara på lärarens frågor. I andra matematikklassrum bygger undervisningen på samarbete och diskussioner. I sådana klassrum kan elever anses vara ”duktiga” om de är aktiva och deltar i samtalet. Ett annat exempel på hur sociomatematiska normer ges uttryck i klassrum är hur laborativa material i vissa klassrum ligger framme och användas naturligt i undervisningen medan de i andra klassrum enbart plockas fram vid vissa särskilda tillfällen.

Det finns med andra ord olika föreställningar hos både lärare och elever om hur matematikundervisning ”ska gå till” vilket påverkar de beslut som lärare fattar när de planerar sin undervisning (Grundén, 2020). Undervisningstillfällen som inkluderar problemlösning kan utmana såväl elevers som lärares föreställningar om matematik och matematikundervisning. Att elever till exempel inte direkt vet hur de ska ta sig an en problemuppgift innebär att arbetet måste få ta tid (Hagland et al., 2005), vilket eleverna kan vara ovana vid. Elever som är vana vid att matematikuppgifter går snabbt att lösa kan uppfatta att de ’inte kan’ lösa problemuppgiften och risken finns att de ger upp fort. En annan sociomatematisk norm som finns i vissa klasser och som kan behöva utmanas är att matematikundervisning enbart innebär eget arbete i en matematikbok. Vid arbete med problemlösning är istället samarbete och diskussioner i helklass viktiga (Stein et al., 2008). Asami-Johansson (2015) beskriver hur gissandet – som normalt kanske inte förknippas med matematikundervisning – är ett viktigt inslag i början av japansk problemlösningsorienterad lektionsstruktur. Detta kan också ses som ett exempel på hur problemlösning bryter mot de etablerade sociomatematiska normerna. För att öppna upp för en undervisning som delvis bryter mot vissa sociomatematiska normer kan det vara av vikt att med både kollegor och elever diskutera och reflektera över vilka normer som finns i matematikundervisningen och vilka konsekvenser dessa kan få för elevernas lärande. Det är därmed viktigt att tillsammans med eleverna diskutera olika syn på matematik, matematikundervisning och problemlösning.

Sammanfattning

Problemlösning som mål och medel i matematikundervisningen kan ge elever i årskurs 4–6 möjlighet lära olika matematikinnehåll samt att utveckla förmågan att lösa problemuppgifter. För att lärande ska bli möjligt krävs att eleverna möter uppgifter som för dem är problemuppgifter, det vill säga uppgifter som de inte direkt vet hur de ska lösa. Det betyder att läraren behöver god kännedom om sin elevgrupp för att inför problemlösning kunna välja uppgifter som är problemuppgifter för den egna gruppen.

Referenser

- Asami-Johansson, Y. (2015). *Designing mathematics lessons using Japanese problem solving oriented lesson structure: A Swedish case study*. [Licentiatavhandling, Linköpings universitet]. <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:864120/FULLTEXT01.pdf>
- Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects. State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 37–68. <https://doi.org/10.1007/BF00302716>
- English, L., & Gainsburg, J. (2016). Problem solving in a 21st-century mathematics curriculum. I L. D. English, & D. Kirshner (Red.), *Handbook of international research in mathematics education* (3. uppl., s. 313–335). Routledge.
- Grundén, H. (2020). *Mathematics teaching through the lens of planning – actors, structures, and power*. [Doktorsavhandling, Linnéuniversitetet]. <http://lnu.diva-portal.org/smash/record.jsf?pid=diva2%3A1461050&dswid=-5373>
- Hagland, K., Hedrén, R., & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem: inspiration till variation*. (1. uppl.). Liber.
- Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U., & Bruder, R. (2016). *Problem solving in mathematics education*. Springer International Publishing.
- Palmér, H., & van Bommel, J. (2019). *Problemlösning som utgångspunkt: matematikundervisning i förskoleklass*. (Andra upplagan). Liber.
- Skemp, R. (2006). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 12(2), 88–95. <https://www.jstor.org/stable/41182357>
- Skolverket (2019). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet: reviderad 2019*. Skolverket.

SOU (1992:94). *Bildning och kunskap. Särtryck ur läroplanskommitténs betänkande skola för bildning*. Skolverket.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313–340.
<https://doi.org/10.1080/10986060802229675>

van Oers, B. (2001). Educational forms of initiation in mathematical culture. *Educational Studies in Mathematics*, 46, 59–85. <https://doi.org/10.1023/A:1014031507535>

Wyndhamn, J., Riesbeck, E., & Schoultz, J. (2000). *Problemlösning som metafor och praktik: studier av styrdokument och klassrumsverksamhet i matematik- och teknikundervisningen*. Linköpings universitet.

Yackel, T., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458–477.
<https://www.jstor.org/stable/749877>