

Kommunikation och resonemang i problemlösning

Helena Eriksson, Högskolan Dalarna; Jeffrey Gracie, Högskolan Dalarna; Marit Halldén, Högskolan Dalarna; Johan Åkerstedt, Högskolan Dalarna

Den här texten handlar om kommunikation och resonemang i problemlösning. Inledningsvis beskrivs kommunikation och resonemang var för sig för att sedan tillsammans illustreras med ett klassrumsexempel. I matematisk kommunikation och resonemang ingår alltid ett matematikinnehåll, därför presenteras även ett sätt att se på matematikinnehåll i texten. Avslutningsvis diskuteras lärarens roll i kommunikation och resonemang vid problemlösning.

Inledning

I arbete med matematik är det säkerligen många som har tänkt:

- Hur kan jag, med matematik, beskriva det jag upptäckte när jag fyllde i min tabell?
- Hur kan det mönster jag upptäckt beskrivas med matematik?
- Hur kan mina elever beskriva det mönster de upptäckt med matematiska symboler för att få andra att förstå mönstret?

Dessa frågor uttrycker ett behov av att kommunicera matematik både för egen del men även ett behov av att kunna hjälpa elever att kommunicera och föra resonemang inom matematik. Kommunikation och resonemang innebär bland annat att matematiska ord och begrepp används i samtal och diskussioner. Förståelse för matematisk kommunikation och matematiska resonemang är nödvändig både för den som undervisar i matematik och för den som ska utveckla förståelse för matematik.

Kommunikation

Nationalencyklopedins definition av kommunikation är överföring av information mellan människor, djur eller apparater (NE, 2021). Det som överförs kan vara exempelvis data, argument eller slutsatser. Kommunikation innebär alltså att något överförs mellan olika individer där detta något även inbegriper någon form av representation av den information som ska överföras.

Matematisk kommunikation handlar om att utbyta matematiska tankar genom att kommunicera i, om och med matematik. Kommunikation i problemlösning fungerar således som både mål och medel (Niss & Højgaard, 2011). Förmåga att kommunicera i

samband med att lösa problemuppgifter innebär både att framföra förslag på lösningar (mål) men också att framföra dessa förslag med begripliga matematiska ord och begrepp (medel). I kommunikationen handlar det om att representera matematikinnehåll på ett adekvat sätt samt att förstå andras matematiska representationer (Lampert & Cobb, 2003; Skott et al., 2010). Följande samtal är ett exempel på kommunikation kring ett specifikt mönster (Figur 1).

Figur 1

Mönstret som eleverna diskuterar



Elev 1: Se här.... [pekar på nedersta raden i den första delen av figuren] här är det 3 i botten.

Elev 2: [Pekar i den andra delen]. Här är det 3 överst [pekar i den tredje delen]
Här är det 4.

(Inspiration från Radford, 2010)

I samtalet ovan representeras mönsterutvecklingen både genom det noterade mönstret och genom att eleverna pekar i figuren när de kommunicerar. Kommunikationen sker med olika representationer där matematisk kommunikation inbegriper att välja lämplig representation, växla mellan olika representationer och att koppla samman olika representationer. Representationer som kan vara aktuella är exempelvis objekt, symboler, verbalt språk, bilder eller verkliga situationer (Lesh, 1981). Genom kommunikationen kan eleverna framföra argument i matematiska resonemang, samt lära sig använda matematisk terminologi på ett effektivt sätt (Lesh & Zawojewski, 2007; Niss & Højgaard, 2011). Kommunikationen kan då bidra till förståelse av matematik där problemuppgifter kan vara en bra ingång.

Resonemang

Till skillnad från en matematisk kommunikation har ett matematiskt resonemang krav på att tankegångar och tankeprocesser är sammanflätade av argument i syfte att producera påståenden och komma fram till slutsatser. Det betyder att matematiska resonemang kan vara en del i en matematisk kommunikation, men att en matematisk kommunikation inte nödvändigtvis innehåller matematiska resonemang.

I ett resonemang hålls olika argument samman av matematikinnehåll som representeras på olika vis (Lithner, 2008). Ett matematiskt argument uttrycker något som ska övertyga någon om något matematiskt (Skott et al., 2010). Förmågan att utveckla och följa matematiska resonemang inbegriper således att kunna dra logiska slutsatser om matematikinnehåll. Resonemang kan börja med en undersökning, en gissning med delvisa förklaringar eller till och med felaktigheter för att resonemanget slutligen ska komma fram till en slutsats. Matematiska resonemang kan leda vidare mot matematisk bevisföring. Men, ett matematiskt resonemang behöver inte innehålla formella bevis eller formella matematiska begrepp för att räknas som ett matematiskt resonemang. Även en informell förklaring som innehåller matematik kan utvecklas till ett matematiskt resonemang.

Förmågan att resonera i matematik används och utvecklas inte enbart i planerad matematikundervisning utan kan även utvecklas i kommunikation i andra sammanhang (Niss & Højgaard, 2011). Alla resonemang utgår sålunda inte från matematiska erfarenheter utan grundas vanligen i både matematiska och vardagliga erfarenheter. Jahnke (2016, s. 65) ger ett exempel på ett resonemang:

Lördag kväll: Alla barn ska duscha. ”Jag hatar att duscha”, säger lillasyster, ”Jag älskar att duscha” säger storsyster. ”Jag älskar också att duscha ” säger lillasyster. ”Man kan inte både hata och älska!!!”, säger storsyster. Jodå, på lördagar hatar jag och på söndag morgon älskar jag, kontrar lillasyster.

Elever kan alltså uttrycka resonemang i olika sammanhang men behöver också få träna strukturerat på att resonera i matematik. Matematiska resonemang har visat sig utveckla såväl språk som förståelse för olika matematikinnehåll. Följande exempel på matematiska resonemang där läraren utmanar elever i årskurs 5 att utveckla sina argument genom frågor finns beskrivet i Eriksson et.al. (2019). Under en matematiklektion arbetar en årskurs 5 med följande problemuppgift i form av ett påstående och tre algebriksa uttryck som möjliga svar (Eriksson et al., 2019, s. 93):

Karim, Robin och Petra promenerar till skolan. Petra har lika lång väg till skolan som Karim och Robin tillsammans.

$$a = b + c$$

$$f + e = m$$

$$t = k - s$$

En bit in i lektionen utvecklas nedanstående matematiska resonemang.

- Lärare: Om jag skulle skriva ett annat uttryck då. Om jag skulle skriva [skriver $a = d + d$]. Vad skulle det innebära i såna fall?
- Filippo: Karims och Robins väg är lika långa.
- Lärare: Hur kan du veta det?
- Filippo: Eftersom det är samma bokstav och då skulle det betyda att det är samma [hörs från klassen ”det tänker jag också”].
- Lärare: Vad säger Ezra?
- Ezra: Jag säger som Filippo, då är det ju exakt lika långa sträckor eftersom det är... vad heter det, samma bokstav [...]
- Lärare: Vad säger Sara?
- Sara: Asså ... att, typ Karims väg är hälft/eller att Petras väg är dubbelt så lång som Karims.

(Eriksson et al., 2019, s. 96–97)

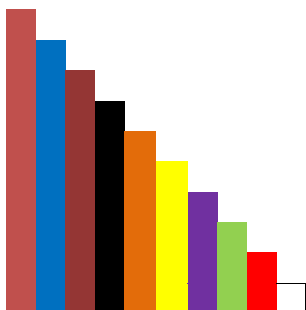
Utifrån lärarens skrivna uttryck $a = d + d$ i ovanstående exempel fick eleverna möjlighet att utveckla resonemang om och med algebraiska symboler samt resonemang gällande dubbelt och hälften.

Exempel på matematiskt resonemang och matematisk kommunikation

Ett annat exempel på matematisk kommunikation där ett matematiskt resonemang ingår är nedanstående matematiska kommunikation där elever och lärare arbetar med att jämföra olika längder av Cuisenairestavar (olikfärgade stavar av trä eller plast som kan användas för att utforska relationer mellan kvantiteter).

Figur 2

Bild på Cuisenairestavar



Uppgiften klassen arbetar med är att de ska jämföra en svart Cuisenairestav med ett antal röda stavar (Figur 3). På tavlan finns ett arbete där lösningen så småningom

kommer att bli att en svart stav består av 3 och en halv röd stav; $1 \text{ svart} = (3 + \frac{1}{2}) \text{ röd}$. Nedanstående matematiska resonemang utspelar sig i ett klassrum med elever i årskurs 5, men i princip samma resonemang utspelade sig också i klassrum med elever i årskurs 3 och 4 (Eriksson & Sumpter, 2021).

Figur 3

Jämförelsen som klassen arbetar med



- Läraren: Det var några som arbetade med den här jämförelsen, när en svart stav skulle jämföras med de röda stavarna. Hur gick det?
- Elev 1: Det gick inte alls.
Läraren pekar på mätningen.
- Läraren: Varför gick inte det? Är det någon som kommer ihåg? Vad är problemet?
- Elev 2: Det är lite för mycket, eller för lite..
- Läraren: Vad var problemet? Vad sa hon?
- Elev 3: Hon sa att man kan mäta den röda med den svarta.
- Läraren: Vad är då problemet? Läraren tar bort och sätter dit en röd måtenhet.

Den jämförelse som eleverna och läraren fortsätter att arbeta med presenteras i Figur 4.

Figur 4

Den förändrade jämförelsen



- Elev 2: Nu är det för lite av den röda..
Läraren är tyst.
- Elev 4: Det är tre och en halv. Det är tre stycken hela röda men sen bara en halv på slutet. Man lägger till en bit, något som inte är lika mycket som en hel.

I ovanstående resonemang framför eleverna argument som är sammanhållna av matematikinnehåll gällande jämförelser av olika kvantiteter. Elev 2 argumenterar att det är lite för mycket eller lite för lite, det vill säga $3 \text{ röda} < 1 \text{ svart} < 4 \text{ röda}$. Exemplet visar hur eleverna drar logiska slutsatser i de argument som ingår i resonemanget. På sista raden i klassrumssituationen ovan summerar en elev det resonemang som pågått ett tag med att de heltal som är aktuella för mätningen inte fungerar, alltså måste lösningen finnas mellan två hela tal. Summeringen är en logisk slutsats av det eleverna och läraren

resonerat om. I det fortsatta arbetet kommer eleverna tillsammans med läraren fram till att den lösning som elev 4 argumenterar för kan se ut såsom jämförelsen i Figur 6.

Figur 6

Jämförelsen så som den utvecklades under lärarens ledning



Vad kommuniceras: matematikinnehåll

Genom att arbeta med problemuppgifter ges elever möjlighet att utveckla sitt kunnande i relation till olika matematikinnehåll. Som redan beskrivits ingår matematikinnehåll i både matematisk kommunikation och matematiska resonemang. Matematikinnehåll kan innefatta **begrepp**, **procedurer**, **konventioner**, **formler** och **strategier** (Taflin, 2007). Då elever kommunicerar och resonerar kan läraren fånga upp och bygga vidare på det matematikinnehåll som synliggörs.

- Ett **begrepp** kan uttryckas språkligt utan symboler och bestå av en term, en definition och/eller en illustration, till exempel yta (termen) som kan definieras som en sammanhängande punktmängd i rummet (definitionen) och ses som en area (ytans storlek som kan visas och illustreras).
- En **procedur** är hur man konkret utför en uppgift till exempel utför beräkningar med de fyra räknesätten eller fyller i en tabell.
- **Konventioner** är gemensamma överenskommelser som gäller både språk och symboler. Exempel på konventioner är hur symboler används, till exempel tecknet $+$ för beräkning av en summa, att man ofta använder n när man avser det n :te talet i en talföljd, att man använder x som symbol för ett obekant tal eller för en variabel i en funktion. Andra exempel på konventioner är terminologi som t.ex. rektangel, heltal, division. Ytterligare exempel kan utgöras av exempelvis prioriteringsregler, det vill säga i vilken ordning matematiska operationer utförs.
- **Formler** är generella matematiska samband som uttrycks med siffror, bokstäver eller andra symboler. Ett exempel är formeln för beräkning av rektangelns omkrets: $2a + 2b$.
- **Strategier** är tillvägagångssätt för problemlösning; till exempel rita en bild, göra en tabell eller ett diagram, formulera ett samband, använda laborativa material, gissa och pröva, arbeta baklänges, samt lösa ett enklare problem.

Lärarens roll vid kommunikation och resonemang

Kommunikationen och de matematiska resonemangen både mellan elever och lärare och mellan elever är en viktig del av kunskapsprocessen. Om problemlösning ska leda till att

elever utvecklar matematisk kunskap måste läraren dels inför problemlösning förute vilka olika matematiskinhåll som eleverna kan komma att använda och dels under problemlösning överblicka vilket matematikinhåll eleverna verkligen använder sig av. Läraren har under arbetet med problemuppgifter ett utmärkt tillfälle att samtala med eleverna för att förvissa sig om att de förstår och hur de förstår olika delar av vad en specifik problemuppgift syftar till. I kommunikationen ges möjligheter för läraren att utvärdera elevernas arbete för att hitta möjligheter att stötta dem vidare i sin utveckling. Möjligheter som ges i kommunikationen i arbetet med problemuppgifter ställer krav på lärarens kunskaper i matematik och förståelse för elevernas tankar.

Samtal mellan lärare och elever måste utgå från elevers egna idéer och läraren behöver ha beredskap för att möta elevernas specifika matematiska idéer. När lärare hjälper elever att lösa problemuppgifter, kan samtalet tolkas och förstås på olika sätt. Lärarens insatser i en kommunikation kan till exempel beskrivas med begreppen **lotsning** och **stöttning** (Taflin, 2007).

Lotsning

Begreppet **lotsning** är inte specifikt matematikdidaktiskt. Detta begrepp används i en generell betydelse då eleverna inte själva behöver fundera utan läraren lägger orden i munnen på eleven och löser uppgifter åt eleven. Läraren kan exempelvis påbörja en mening där slutet på meningen förväntas fyllas i av eleverna, eller att läraren ger korta förenklade förklaringar på hur en specifik uppgift kan lösas.

Stöttning

Begreppet **stöttning** är inte heller specifikt för matematikdidaktik. Istället för att lägga orden i munnen på eleven eller ge förenklade färdiga lösningar använder läraren utmanade frågor, lyssna på elevernas olika lösningsförslag och hjälper dem att värdera olika lösningar. Läraren organiserar samtalet så att eleverna själva löser uppgiften istället för att presentera en färdig lösning. Läraren stöttar med redskap och tankestrukturer så att eleven senare på egen hand kan lösa liknande uppgifter. Läraren behöver då vara nyfiken och tillsammans med eleven utveckla lösningen.

Det följande exemplet utgörs av en dialog mellan en lärare och en elev när eleven ska lösa problemuppgiften ”Skalbaggar och spindlar”. I dialogen förekommer både lotsning och stöttning.

I ett skåp har läraren skalbaggar och spindlar i en låda. Totalt finns där 8 småkryp. Det går att räkna till 54 ben. Hur många av småkrypen är spindlar och hur många är skalbaggar? (Spindlar har åtta ben och skalbaggar har sex ben.)

Eleven sitter tyst och tänker en stund, ritar lite på ett papper. Eleven finner ganska snabbt det korrekta svaret, säger: Tre spindlar och fem skalbaggar! För att få fram elevens matematiska resonemang för läraren en dialog med eleven.

Läraren: Hur tänkte du när du kom fram till det svaret?

Eleven: Jag ritade.

Läraren: Rita och berätta! Vad tänkte du först?

Eleven: Att det var åtta stycken.

Läraren: Jaha. Rita hur du gjorde.

Eleven ritar åtta små ovaler.

Läraren: Vad tänkte du sedan?

Eleven: Att alla måste ha minst sex ben.

Läraren: Ja, för att skalbaggen har sex ben? Och spindeln då?

Eleven: För att alla var ju skalbaggar eller spindlar. Och skalbaggar har ju sex ben. Spindlar har åtta.

Läraren: Jag förstår, alla måste ha minst sex ben. Rita hur du gjorde!

Eleven ritar dit sex streck på varje oval.

Läraren: Har du fått med alla ben nu?

Eleven: Jag räknade alla benen. Det var 48.

Läraren: Hur räknade du då?

Eleven: Så här: 1,2,3,...,46,47,48 (pekar på ett streck i taget).

Läraren: Aha. Vad gjorde du sedan?

Eleven: Jag räknade hur många som var kvar.

Läraren: Hur menar du nu?

Eleven: Det fanns ju 54. Och jag hade ritat 48.

Läraren: Hur tänkte du då då?

Eleven: Minus.

Läraren: Minus hur då?

Eleven: 54 minus 48.

Läraren: Hur mycket blev det då?

Eleven: Sex.

Läraren: Hur kom du fram till det?

Eleven: Jag räknade på fingrarna, 49,50,51,52,53,54. Det blev sex fingrar.

Läraren: Jag förstår. Hur tänkte du sedan då?

Eleven: Jag delade ut de där sex benen två och två.

Läraren: Varför två och två?

Eleven: För att en spindel har två ben mer än en skalbagge

Läraren: Hur visste du det?

Eleven: Åtta är ju två mer än sex. Jag bara visste det.

Läraren: Aha. Visa hur du gjorde.

Eleven ritar till två streck på tre ovaler.

Läraren: Och hur tänkte du sedan?

Eleven: Att det blev tre spindlar. Och sedan räknade jag skalbaggarna, det var fem.

Läraren: Hur räknade du ut det?

Eleven: Så här (pekar): 1,2,3,4,5.

- Läraren: Så genom att tänka och rita så här kom du fram till att det var tre spindlar och fem skalbaggar i lådan?
- Eleven: Ja.
- Läraren: Spännande! Tänkte du något mer?
- Eleven: Ja, nu tänkte jag att jag kunde ha tagit åtta minus tre är fem, det vet jag. Jag hade inte behövt göra så här (pekar).
- Läraren: Nähä, det kunde du direkt utan att räkna en och en.
- Eleven: Ja.
- Läraren: Tänkte du något mer?
- Eleven: Nej.

I dialogen stöttar läraren eleven när den frågar ”Vad tänkte du först?” Läraren visar nyfikenhet för elevens tankar och har utifrån elevens svar möjlighet att utmana med följdfrågor eller diskussion om alternativ till denna första tanke. I samma mening ger läraren även förslag på hur eleven kan representera sin lösning för att underlätta kommunikationen om hur problemet kan lösas. Lärarens agerande i slutet av dialogen där läraren sammanfattar elevens arbete istället för att låta eleven själv göra det. ”Så genom att tänka och rita så här kom du fram till att det var tre spindlar och fem skalbaggar i lådan?” kan ses som ett exempel på lotsning. Läraren skulle här ha kunnat välja att stötta eleven vidare i utvecklingen genom att utmana eleven med en fråga likt ”Hur gjorde du alltså för att lösa uppgiften?” eller en fråga likt ”Hur skulle du rekommendera en klasskamrat att lösa uppgiften?”. Med den lotsning som läraren nu valde behöver eleven bara bekräfta med ett ja.

Lärare spelar således en viktig roll då elever ska bygga upp sin kunskap genom problemlösning. Enkla men relevanta frågor kan vara ett stöd för att elevers tankegångar ska utvidgas och fördjupas. Exempel på frågor kan vara (Skott et al., 2010):

- Hur gjorde du och varför?
- Hur tänkte du?
- Hur kan du visa det du nu säger?
- Hur kan du veta det?

I en kommunikation eller ett resonemang för att lösa en problemuppgift kan läraren behöva vara ordförande och lyssnare som med stort intresse vill ta del av elevernas inspel och argument för att hjälpa dem till fortsatt utveckling (Jaworski, 2000). Läraren bör organisera för kommunikation så att eleverna kan arbeta med problemuppgiften genom att de kan hjälpa varandra och ge varandra stöd och uppmuntran.

Sammanfattning

Den här texten har handlat om vad kommunikation och resonemang i arbetet med problemlösning i matematik kan vara samt lärarens roll i dessa båda sammanhang. Texten har också handlat om hur man kan se på ett matematikinnehåll som finns

inkluderat i kommunikation och resonemang. Lärarens roll vid problemlösning är att möjliggöra för eleverna att lära matematikinnehåll, kommunikation, och resonemang. I den formativa bedömningen är det centralt att läraren fokuserar både hur eleverna fått möjlighet att träna kommunikation och resonemang och möjlighet att utveckla matematikinnehåll genom kommunikation och resonemang.

Referenser

- Eriksson, H., & Sumpter, L. (2021). Algebraic and fractional thinking in collective mathematical reasoning. *Educational Studies in Mathematics*.
<https://doi.org/10.1007/s10649-021-10044-1>
- Eriksson, I., Wettergren, S., Fred, J., Nordin, A.-K., Nyman, M., & Tambour, T. (2019). Materialisering av algebraiska uttryck i helklassdiskussioner med lärandemodeller som medierande redskap i årskurs 1 och 5. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 24(3–4), 81–106.
- Jahnke, A. (2016). *Skolans och förskolans matematik. Kunskapssyn och praktik*. Studentlitteratur.
- Jaworski, B. (2000). Social constructivism, social practice theory and sociocultural theory: Relevance and rationalisations in mathematics education. Detail, reflection and synthesis. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 8(3), 73–110.
- Lesh, R. (1981). Applied Mathematical Problem Solving. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 235–264. <https://doi.org/10.1007/BF00305624>
- Lesh, R., & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. I F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (s. 763–799). National Council of Teachers of Mathematics and Information Age Publishing.
- Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 255–276. <https://doi.org/10.1007/s10649-007-9104-2>
- NE (17 september 2021). *National Encyclopedin*.
<https://www.ne.se/s%C3%B6k/?t=uppslagsverk&q=kommunikation>
- Niss, M., & Højgaard, T. (Red.) (2011). *Competencies and mathematical learning. Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. Roskilde University.
- Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12(1), 1–19. <https://doi.org/10.1080/14794800903569741>
- Skott, J., Jess, K., Hansen, H. C., & Lundin, S. (2010). *Matematik för lärare (1 uppl.)*. Gleerups.

Taflin, E. (2007). *Matematikproblem i skolan: för att skapa tillfällen till lärande*.
[Doktorsavhandling, Umeå universitet].