

Matematikspråket

Anette de Ron, Stockholms universitet, Sara Ramsfeldt, Stockholms universitet, Laura Caligari, Stockholms universitet

I styrdokumentet lyfts matematik fram som ett kommunikativt ämne. Matematisk kommunikation innebär att utbyta information om matematiska idéer och tankegångar med andra. Ämnesspecifika ord, begrepp, symboler, bilder och fraser behövs för att kunna kommunicera matematiskt. Matematikens språkliga och kommunikativa funktioner är en gemensam nämnare för de tre grundprinciperna för ett språkutvecklande arbetssätt.

Syftet med undervisningen i matematik kan sammanfattas i fem långsiktiga mål. Eleverna ska bland annat få förutsättningar att utveckla sin förmåga att **använda och beskriva** matematiska begrepp och samband mellan begrepp, att **formulera** och lösa problem, att **föra och följa matematiska resonemang** samt att **använda matematikens uttrycksformer** för att **samtala** om och **redogöra** för frågeställningar, beräkningar och slutsatser. Det är tydligt att språklig förmåga är av stor betydelse när eleverna lär sig matematik. I praktiken är ett språkutvecklande arbetssätt i matematik en förutsättning för att eleverna ska kunna utvecklas mot de långsiktiga målen.

Hur fungerar matematikspråket?

Redan tidiga civilisationer utvecklade matematiskt kunnande för att lösa praktiska problem och för att kommunicera om detta med andra. Det kunde till exempel handla om bokföring, astronomi, jordbruk eller konstruktion. Människan har också tidigt haft ett behov av att kommunicera kvantiteter eller former och har då skapat ord för att kunna göra detta. En drivkraft bakom utveckling av matematiken har varit människans behov av att använda den för nya ändamål. Matematiken har också utvecklats i växelspel mellan uppfinningar och upptäckter. Ett exempel på uppfinning är passaren, vilken har gjort utforskandet av och nya upptäckter om cirklar möjliga. Ett exempel på det omvända är till exempel människans behov av att göra snabba beräkningar. Det har drivit fram en utveckling av olika sorters räknemaskiner.

Matematiken kan sägas vara konstruerad, och kommuniceras med hjälp av matematiska resonemang. Utifrån sådant man redan vet, eller med hjälp av andra, kanske man kan resonera sig fram till en lösning på ett matematiskt problem som först verkar omöjligt att lösa. Det är därför logiskt att ett av de långsiktiga målen berör matematiska resonemang.

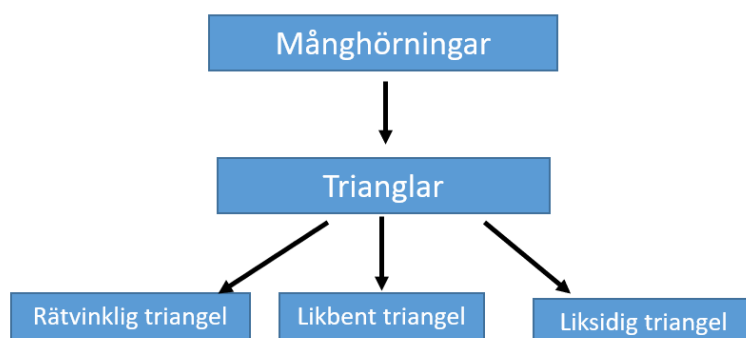
Om elever som inte behärskar ekvationslösning ställs inför likheten $10 - 2 \cdot x = 1 + 3$ kan de kanske ändå komma fram till värdet av det obekanta talet. Det kan de göra genom att resonera utifrån sådant de redan vet om de matematiska symbolernas betydelse och prioriteringsreglerna. Ett matematiskt bevis kan ses som en form av matematiskt resonemang. I ett sådant resonemang utgår varje steg från tidigare bevisade påståenden. En av svårigheterna med matematiska resonemang är att veta vad som kan anses som redan bevisat. En annan svårighet är att veta vad som behöver redovisas eller inte.

Att lära sig matematik är också att lära sig ett ämnesspråk. De matematiska orden och användandet av matematiska symboler bygger till stor del på **abstraktioner** och **generaliseringar**. Symbolen för talet 3 säger till exempel ingenting om man inte är införstådd med den abstrakta idén att symbolen representerar ett visst antal eller en viss plats i en ordning. Ett exempel som både bygger på generaliseringar och abstraktioner är formeln för omkretsen av en rektangel, $O = 2 \cdot b + 2 \cdot h$. Formeln är i sig en generell beskrivning för omkretsen av regelbundna fyrhörningar. Men formeln omfattar samtidigt många abstraktioner. Varje symbol har en speciell betydelse.

Matematikens terminologi kan vara **hierarkiskt ordnad** (Figur 1). Vissa begrepp kan vara övergripande och innefatta andra mer och mer specifika begrepp. Ett exempel på det är begreppet triangel. Begreppet berättar hur trianglar skiljer sig från månghörningar i allmänhet. Begreppet månghörningar är i sin tur en avgränsning från andra geometriska objekt. När man använder begreppet triangel är det inte en speciell sorts triangel man menar utan alla trianglar. En sådan generalisering är praktisk när man till exempel resonerar om hur man beräknar arean av trianglar. När man däremot ska identifiera och jämföra olika trianglars egenskaper används mer precisa begrepp som rätvinklig, likbent och liksidig triangel. Valet av begrepp bör alltså göras utifrån vilken precision som är lämplig i en viss situation eller i ett visst sammanhang.

Figur 1

Schematisk bild över vad det kan innebära att matematikens terminologi är hierarkisk ordnad



Matematikspråkets olika delar

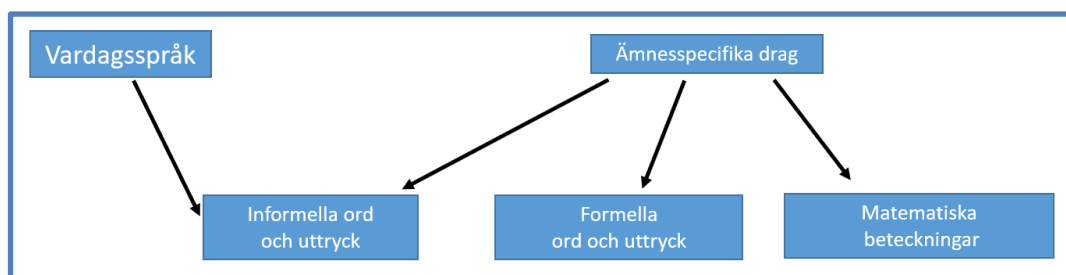
De tre grundprinciperna för ett språkutvecklande arbetssätt kan kortfattat skrivas så här:

1. Att undervisa med stöd i sammanhang
2. Att främja aktiv språkanvändning
3. Att ge språklig stöttning

Den första innebär att göra det matematiska innehållet begripligt med stöd i sammanhang. För att kunna abstrahera, resonera och bygga upp mer komplexa matematikkunskaper krävs att eleven förstår och kan använda matematikspråket. Det omfattar de speciella ord, begrepp, symboler, bilder och fraser som ger betydelse och precision i matematiken. Abstrakt innehåll i matematiken kan göras begripligt genom att det kopplas till ett vardagligt sammanhang. Om eleven är bekant med sammanhanget så hjälper det eleven att förstå matematiken. Att lära sig matematikspråket handlar även om att lära sig vilka vardagliga situationer som kan beskrivas matematiskt.

Figur 2

Delar ur språkkarta



Kommentar. Framtagen av Kindenberg och Ramsfeldt.

De olika delarna av matematikspråket: informella ord och uttryck, formella ord och uttryck och matematiska beteckningar kan betraktas som olika ordförråd eller register i matematikspråket.

Mycket i matematiken kan beskrivas med hjälp av informella ord, vilka ofta sammanfaller med det vardagliga språket. Exempel på informella ord är fler, färre, mer, mindre, kant och räkna ut. I matematikspråket används också formella ord vilka inte så ofta förekommer i det vardagliga språket. Exempel på sådana ord är differens, bas och algebra. En situation där två barn delar på frukter går att beskriva med informella ord från det vardagliga språket: ”Aisha och Lisa har sex äpplen. De vill dela på äpplena så att de får lika många var. De får då tre äpplen var.”. Med formella ord från

matematikspråket skulle det istället kunna formuleras: ”Sex dividerat med två ger kvoten tre.”. Eller uttryckt med matematiska symboler: $6 / 2 = 3$ ”.

Med informella ord från det vardagliga språket går det också att beskriva en form med fyra lika långa sidor och räta vinklar som en fyrkant. Ordet fyrkant kan ersättas med det formella ordet kvadrat eftersom detta är det matematiska ordet för just en sådan fyrhörning. De formella matematikorden hjälper oss att beskriva, i detta fall, kvantiteter (antal äpplen) och geometriska former (en form med fyra lika långa sidor) med hög noggrannhet.

Det finns ord som har olika betydelser i det vardagliga språket jämfört med matematikspråket. Eleven kan känna till orden i sin vardagliga betydelse, men kanske inte kan betydelsen av orden i sina matematiska sammanhang. Här är några exempel på ord som har dels en vardaglig dels en matematisk betydelse.

Ord som används i matematiken	Vardaglig betydelse
Axel	Kroppsdelen axel, namnet Axel, bilens axel, jordaxeln
Bråk	Konflikt
Förhållande	Mänsklig relation
Rymma	Fly från något
Teckna	Rita

Matematikspråket skiljer sig från vardagligt språk och från språk i andra ämnen genom sina specifika ord, begrepp, symboler och representationsformer. En utmaning för läraren är att synliggöra och skapa förbindelser mellan det vardagliga språket och matematikspråket så att eleverna kan använda ett lämpligt språk i olika sammanhang. Undervisningen behöver ge eleverna möjlighet att erövra matematikspråket. Det är både naturligt och nödvändigt att använda alla de tre delarna av matematikspråket i undervisningen. Ett sätt att arbeta med informella ord, formella ord och symboler parallellt kan vara att översätta matematiska uttryck till en vardagshändelse, och tvärtom.

För elever med svenska som andraspråk kan det också vara ett sätt att närma sig det svenska språket. Att använda olika delar av matematikspråket skapar goda förutsättningar för alla elever att få en djupare förståelse för matematikens ord och begrepp. I samband med ett sådant arbete berörs de tre grundprinciperna för ett språkutvecklande arbetssätt: principen om att undervisa med stöd i sammanhang, principen att främja aktiv språkanvändning och principen om att ge språklig stöttning genom att ge eleverna verktyg att ta sig an kognitivt utmanande matematisk information.

Signalord

En förklaring till att elever gör misstag när de löser textuppgifter i matematik kan vara att de inte förstår själva innebörden i texten (Norén & Caligari, 2021). Det kan leda till att de har svårt att välja rätt räkneoperation. Elever fokuserar ibland mer på att ha ett svar på en uppgift än att ha en lämplig Lösningsstrategi. De utför då godtyckliga beräkningar med de tal de hittar. En studie av Bergqvist et al. (2012) visade att elever kunde uppleva det som lättare att läsa matematiktexter utan symboler, än med symboler. De menar att det kan bero på att elevernas fokus flyttas från innehållet i sin helhet till symbolerna. Eleverna läser då texten på ett mer mekaniskt eller ytligt plan än om de fokuserar på innehållet. Elever som läser textuppgifter på detta sätt letar i texten efter symboler eller nyckelord som de hoppas ska ge en ledtråd till vilken räkneoperation som ska användas (Sterner & Lundberg, 2002).

I matematikdidaktik kallar man ibland nyckelorden för **signalord**. Med detta menas ord som signalerar en viss räkneoperation. Ofta förekommer signalorden i samband med jämförelser av något slag. Ord som mer, längre, vinner, tyngre, ökar och tjänar förknippar elever ofta med addition, medan ord som yngre, kortare, billigare och lättare förknippas med subtraktion. Elever som snabbt vill komma igång med uppgiften överanvänder ofta strategin att leta efter signalord. Hittar de ordet ”vinner” så drar de kanske slutsatsen att de ska använda sig av addition när de löser uppgiften.

Det är inte alltid som signalorden används på det sätt många elever är vana vid. Då krävs det en mer noggrann reflektion för att signalordet ska tolkas och modelleras matematiskt korrekt. (Malmer, 2002; Myndigheten för skolutveckling, 2008). I följande uppgifter ger inte signalorden de ledtrådar man kan förvänta sig.

- ”Ali spelar kula och vinner 12 kulor. Han har då 30 kulor. Hur många kulor hade han från början?”

Ordet **vinner**, som många elever förknippar med addition, riskerar att vilseleda eleverna om de inte analyserar det som beskrivs utan bara kombinerar tal och signalord godtyckligt.

- ”Louise är 9 år. Hon är 5 år yngre än Kim. Hur gammal är Kim?”

Här är det ordet **yngre** som riskerar att leda in eleverna på subtraktion istället för addition.

- ”Ett spel kostar 40 kronor mer i affär A än i affär B. Hur mycket kostar spelet i affär B om det kostar 570 kronor i affär A?”

Uttrycket **mer än** signalerar ofta att det är räknesättet addition som ska användas.

De tre exemplen ovan visar att signalorden kan försvåra den matematiska kommunikationen. Signalord kan användas för att uttrycka samma matematiska förhållande på olika sätt. De kan också användas för att beskriva olika matematiska förhållanden på ett likartat sätt. Det är därför viktigt att eleverna får träna på att reflektera över vilka konsekvenser beskrivningen kan få för de matematiska förhållandena.

När läraren tillsammans med eleverna diskuterar och analyserar signalordens betydelse tillämpar man den tredje grundprincipen för språkutvecklande arbetssätt - principen om att ge språklig stöttning. Matematisk problemlösning får inte reduceras till att eleverna söker efter signalord och tal.

I stället för att enbart uppmärksamma signalord bör fokus ligga på att förstå uppgiftens kontext och innebörden av den beskrivna situationen. Mayer och Hegarty (2012) beskriver vilka strategier collegestudenter använde sig av för att förstå textuppgifter i matematik. De såg att studenter som löste problem på ett framgångsrikt sätt skapade en meningsfull representation av situationen som problemet beskrev. Detta till skillnad från studenter som inte var så framgångsrika, vilka i allt för hög utsträckning fokuserade på signalord och symboler.

Detta visar på vikten av att arbeta med aktiv språkanvändning i matematikundervisningen. Olika strategier för problemlösning kan underlätta för eleverna att förstå den situation som en uppgift beskriver. Exempel på strategier är att använda laborativt material, rita en bild, göra en tabell, dela upp problemet i delproblem eller arbeta baklänges.

Att utveckla matematikspråk

Läraren bör planera matematikundervisningen så att eleverna får möjlighet att utveckla och använda informella ord, formella ord och symboler. Planeringen bör utgå från de tre grundprinciperna för språkutvecklande arbetssätt.

Ett sätt att arbeta med flera delar av matematikspråket är att växla mellan matematiska uttryck, bilder och vardagliga beskrivningar.

Att tolka och teckna matematiska uttryck är central kunskap i matematik. Det handlar både om numeriska och algebraiska uttryck. Eleverna i förskoleklass ska lära sig egenskaper hos naturliga tal. I årskurs 1–3 ska eleverna utveckla kunskap om likheter och likhetstecknets betydelse samt hur obekanta tal kan betecknas med en symbol. I åk 4–6 ska eleverna kunna hantera variabler i enkla algebraiska uttryck och ekvationer.

- Exempel för förskoleklass: $5 = 2 + \blacksquare$
- Exempel för åk 1-3: $2 + \blacksquare = 5 + 3$
- Exempel för åk 4-6: $2x + 20$

Det matematiska uttrycket kan vara givet, och eleverna får i uppgift att beskriva det med formella och informella ord. Eleverna får också ge exempel på vardagliga situationer som uttrycket kan beskriva. På så sätt placeras matematiken i ett sammanhang, eleverna får använda språket aktivt och en långsiktig språklig stöttning pågår. De matematiska exemplen ovan är bara förslag som kan anpassas efter den aktuella elevgruppen.

Eleverna kan arbeta tillsammans eller enskilt, muntligt eller skriftligt beroende på elevernas ålder. Men hur undervisningen organiseras beror också på hur man som lärare tänker sig att elevernas matematiska tankesätt och kommunikation bäst kan utvecklas.

Förutom att tolka det matematiska språket så ska eleverna också kunna använda det. Ett sätt kan vara att vända på arbetsgången och låta eleverna utgå från en vardaglig situation och beskriva den med hjälp av matematiska uttryck.

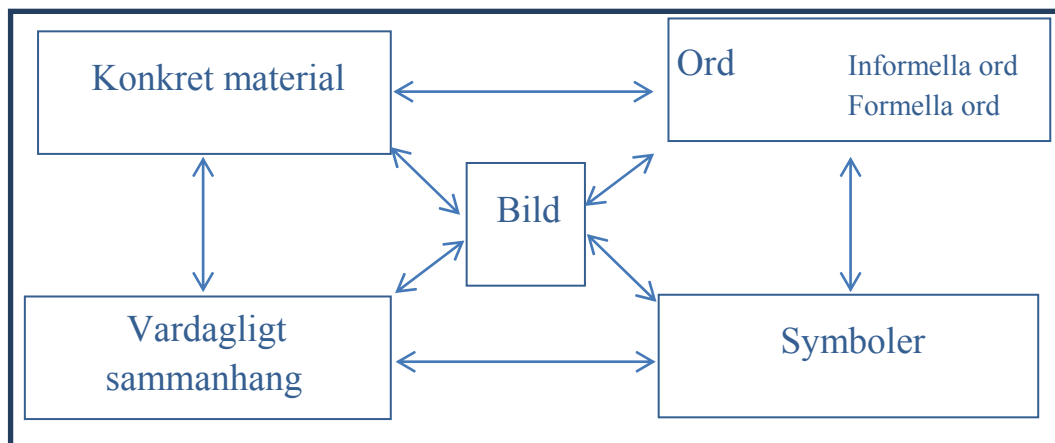
- Exempel för förskoleklass:
Lisa har fem kulor. Hon får tre kulor till av Ali. Hur många kulor har Lisa sedan?
- Exempel för åk 1–3:
Tre barn får 96 kronor för att skotta snö. Hur mycket får var och en?
- Exempel för åk 4–6:
Alvin får 10 kronor av morfar varje gång han hjälper till att diska. Han ger 2 kronor till sin lillebror för att torka disken. Hur mycket har Alvin fått när han och lillebror har hjälpt morfar 5, 10 respektive 15 gånger?

Som stöd för eleverna när de växlar mellan de olika delarna av matematikspråket kan man använda sig av bilder. Bilderna kan visa vardagliga situationer att utgå ifrån, som eleverna sedan ska sätta ord på och uttrycka matematiskt. Bilderna får gärna vara rika på matematiska inslag som till exempel en bild från en butik, en skogsutflykt eller från skolgården. Det kan ge mer inspiration till eleverna. Att låta eleverna illustrera matematiska uttryck eller beskrivningar förstärker också deras språkutveckling.

Ett verktyg för att arbeta med översättningar är en **tanketavla**. Tanketavlan ger en bild av sambanden mellan olika representationer. Idén bakom tanketavlan bygger på Richard Leshs (1987) klassiska schematiska bild över representationer och deras kopplingar till varandra. Figur 2 är en omarbetad variant på en uppdelning av de fem representationer som Lesh beskrev.

Figur 3

Variant på tanketavla

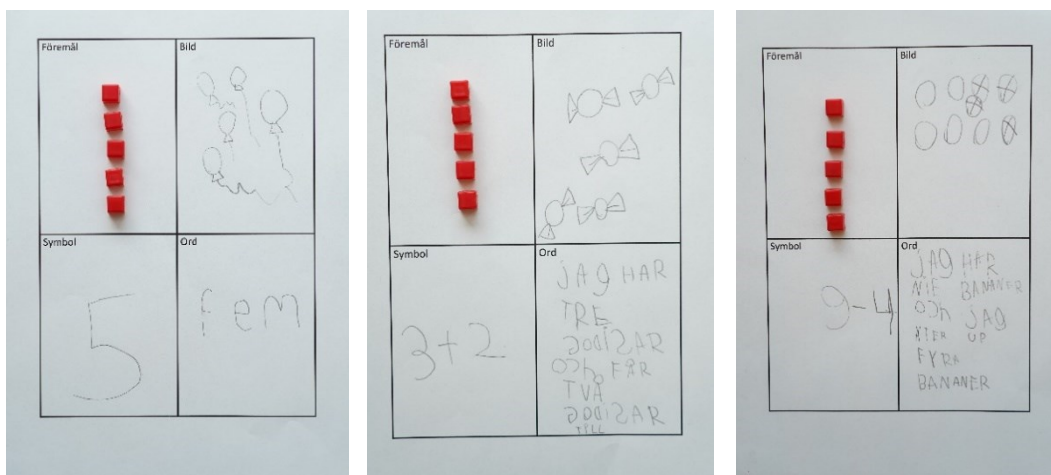


Kommentar. Fritt efter Lesh (1987).

Texten **Tanketavlan** finns som ett separat dokument i denna del av modulen. Där finns beskrivningar av hur undervisning med tanketavlor kan genomföras. Tanketavlan kan användas för gemensamt arbete med hela klassen, för grupparbete eller individuellt. Vad som står i de olika rutorna i tanketavlan skiljer sig åt mellan olika modeller. Det kan också varieras beroende på till exempel vilken elevgrupp man undervisar, och inom vilket matematiskt område. Figur 4 och 5 visar exempel på resultat av arbete med tanketavlor. Det matematiska innehållet som bearbetas är egenskaper hos ental, beräkningar med addition och subtraktion samt positionssystemet upp till och med hundratal.

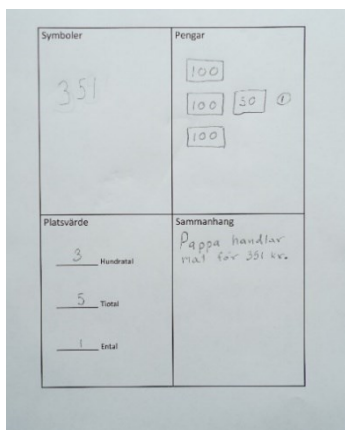
Figur 4

Tre exempel på arbete med tanketavlor i matematik i förskoleklass – addition och subtraktion



Figur 5

Exempel på arbete med tanketavlor i matematik i åk 1-3 – talområdet 100-999



Avslutning

Språkets betydelse för elevernas kunskapsutveckling i matematik belyses på många ställen i kursplanen. Språk och kommunikation ses också av många forskare som en viktig del i matematikundervisningen. Att lära sig matematik är också att lära sig matematikspråket.

Istället för att undvika svåra ord och uttryck kan läraren ge eleverna möjlighet att utveckla sin språkliga förmåga genom att låta dem möta det nya tillsammans med redan bekanta ord och uttryck. Lärarens utmaning är att skapa förbindelser mellan det

vardagliga språket och matematikspråket. Undervisningen ska bidra till att eleverna utvecklar förmågan att kommunicera matematiskt och förstå och använda matematikens ord, begrepp och symboler. Därför behöver läraren planera undervisningen så att det finns gott om tillfällen för eleverna att göra detta. För att eleverna ska utveckla en förtrogenhet med matematikens uttrycksformer och hur dessa kan användas för att kommunicera om matematik i vardagliga och matematiska sammanhang, så behöver både språkliga och innehållsliga mål stå i fokus.

Referenser

Bergqvist, E., Dyrvold, A., & Österholm, M. (2012). Relating vocabulary in mathematical tasks to aspects of reading and solving. I C. Bergsten, E. Jablonka & M. Raman (Red.), *Evaluation and comparison of mathematical achievement: Dimensions and perspectives. MADIF 8, The Eighth Mathematics Education Research Seminar, Umeå, January 24–25, 2012* (s. 61–70). Linköping.

Lesh, R. (1987). The evolution of problem representations in the presence of powerful conceptual amplifiers. I C. Janvier, (Red.), *Problems of representation in teaching and learning mathematics* (s. 197–206). Lawrence Earlbaum Associates.

Malmer, G. (2002). *Bra matematik för alla: nödvändig för elever med inlärningsvårigheter*. (2. uppl.) Studentlitteratur.

Mayer, R. E., & Hegarty, M. (2012). The process of understanding mathematical problems. I R. J. Sternberg & T. Ben-Zeev (Red.), *The nature of mathematical thinking* (s. 45–70). Routledge.

Myndigheten för skolutveckling (2008). *Mer än matematik: om språkliga dimensioner i matematikuppgifter*. Myndigheten för skolutveckling.

Norén, E., & Caligari, L. (2021). Practices in multilingual mathematics classrooms: word problems. I L. Björklund Boistrup, J. Häggström, Y. Liljeqvist, O. Olande (Red.), *Sustainable mathematics education in a digitalized world. MADIF 12, The twelfth Research Seminar in Mathematics Education by SMDF* (s. 61–70). Linnéuniversitetet.

Sterner, G., & Lundberg, I. (2002). *Läs- och skrivsvårigheter och lärande i matematik*. Nationellt centrum för matematikutbildning, Göteborgs universitet.