

Positionssystemet och enheter

Lena Nilsson, NCM

För att kvantifiera storheter som längd, area, volym, tid, hastighet et cetera använder vi mätetal och enheter. Förståelse för positionssystemet och talens olika plastvärden är en förutsättning för nästan all modern mätning. Genom att mäta med skalor där enheterna är multiplar av tio kan vi enkelt byta enhet genom att byta siffrans plats i systemet och multiplicera och dividera med potenser av tio.

Vanliga måttenheter

Mätning gör att det går att skala om mått. Vi lever i en tredimensionell värld, men eftersom en dimension är enklast att hantera omvandlar vi ofta två- och tredimensionella mått till längdskalor. Exempelvis är hushållsmått och regnmätare konstruerade så att vi kan läsa av tredimensionella volymer på en längdskala. Som grund för dessa längdskalor finns tallinjen. När den delas i tiondelar går det att markera, se och jämföra de mått som enligt det internationella måttenhetssystemet SI (BIPM, 2019) bygger på en tiobas. Utöver längd, area och volym visualiseras även andra storheter ofta på en skala indelad i decimala enheter, exempelvis frekvens, temperatur och massa. Även här utgör tallinjen en grund för förståelsen.

Ett av de vanligaste misstagen när det gäller beräkningar med två- och tredimensionella mått är att elever tänker i en dimension. Om de exempelvis ska göra en förstoring av en tvådimensionell bild så att den blir dubbelt så stor är det lätt hänt att de dubblar alla längdmått och får en bild där arean är fyra gånger så stor. På motsvarande sätt kan diagram bli missvisande då elever exempelvis låter människors längd representeras av ”en gubbe” som skalas upp eller ner proportionerligt när det egentligen bara är längden som ska ökas eller minskas. Ett konkret sätt att påvisa, eller låta elever undersöka, de förhållanden som finns mellan längd-, area- och volymskalor är att vika kuber i olika storlekar. Om alla sträckor halveras kommer area och volymmåtten att bli tydliga, se Figur 1.

Figur 1

Kuber vikta av papper i storlek A4 och A6



Kommentar. Hämtat från Nämnaren 2019:1.

Mycket av den mätning som tidigare var analog har nu blivit digital och det behöver undervisningen ta hänsyn till. Digitala vågar, klockor och kartor är vanliga och exempelvis appar för att mäta längd blir allt mer lätthanterliga. En utmaning i matematikundervisningen är att planera innehåll där elever ska använda och kunna avläsa de digitala verktygen korrekt. Om hushållsvågen visar 1435, hur ska det tolkas? När gps-klockan visar 5.08, hur lång var löprundan? Den blå pricken på kartan i mobilen visar aktuell position, men hur ska skalan hanteras eftersom den hela tiden förändras vid förstoring och förminskning med två fingrar på skärmen? En insikt är att elever måste bli vana vid att ta reda på i vilken enhet mätetalet visas till skillnad från analoga verktyg där det ofta framgår tydligare vilka enheter det handlar om och skalor är synliga. På digitala hushållsvågar finns ofta ett litet diskret g i fönstret och på gps-klockan är enheten i detta fall inte tid utan kilometer, med decimalerna uttryckta som 8 dekameter, alltså 5 km och 80 m. Det blir tydligt att förståelse för positionssystemet är betydelsefullt, särskilt på decimalsidan. Samtidigt kan problemlösning där enheter är framträdande vara ett sätt att öka förståelsen för positionssystemet. På den digitala kartan är det först meter, sen övergår skalan till kilometer. Om start och mål är kända platser går det oftast relativt enkelt att utläsa både hur långt det är och ungefär hur lång tid det tar att förflytta sig mellan platserna med olika fortskaffningsmedel. Men när man vill veta hur långt det är runt en sjö eller hur mycket kortare genvägen genom skogen är, hur gör man då?

Med tanke på den digitala utvecklingen behöver undervisningen aktualisera de traditionella didaktiska frågorna vad, varför och hur. Vad behöver eleverna kunna i framtiden när digitala verktyg ger mycket exakta mätvärden? Varför behöver elever ha förståelse för mätandets idé när de digitala verktygen ”gör jobbet”? Hur kan eleverna bli säkra på hur de ska tolka de mätvärden som de digitala verktygen visar?

Enhetsomvandlingar

Enhetsomvandlingar är svåra om elever enbart försöker använda minnesregler och göra omvandlingar genom att manipulera med olika antal nollor och placering av decimalkommat. Bland de skolplanscher som var vanliga i svensk folkskola från 1890-talet fram till 1970-talet fanns det mallar som skulle hjälpa eleverna att skapa struktur och ge förståelse för vanliga enheter och deras koppling till positionssystemet. Denna beprövade metod är värd att utveckla för att även ge dagens elever en stabil grund för enhetsomvandling byggd på förståelse.

Ett förslag på en mall med vardagliga enheter presenteras i Bilaga 1. Syftet är att ge struktur vid enhetsomvandlingar. Som utgångspunkt och raster över hela mallen ligger positionssystemet. Mallen kan användas på olika sätt, exempelvis kan en tom mall (Bilaga 2) fyllas i under en längre tid i samband med att olika storheter och enheter repeteras eller behandlas i undervisningen. Mallen kan fyllas i i vilken ordning som helst med utantag för den översta raden som beskriver positionssystemet och därför fylls i först. Notera och diskutera speciellt decimalkommats placering och roll och hur stora och små tal ska utläsas. Ett laborativt och undersökande arbete med respektive storhet och tillhörande enheter utvecklar elevers förmåga att senare kunna uppskatta och göra rimlighetsbedömningar. Jämför med en van kock som vet hur mycket en deciliter vatten är utan att mäta upp eller elitlängdhopparen som känner hoppets längd i kroppen.

När mallen är ifylld kan den användas vid färdighetsträning. Ordna aktiviteter där eleverna använder olika mätredskap för att mäta eller bestämma längd, area, volym och massa. Mallen kan också fylla en funktion som stöd i det vardagliga lektionsarbetet.

Mallen i Bilaga 2 är tänkt som kopieringsunderlag, men ett alternativ är att gemensamt i klassen göra en stor plansch att sätta på väggen. Olika digitala varianter kan vara att föredra i andra sammanhang. I takt med att talområdet utvidgas kan fler rutor läggas till så att även större och mindre tal kommer med.

Elevernas frågor i centrum

Det finns mycket som utifrån mallen kan tas upp till diskussion när eleverna uppmuntras att vara nyfikna, ifrågasättande och att försöka hitta anknytningar till sin vardag. Här är exempel på några frågor som elever i årskurs 7–9 kanske funderar på.

- Vilka enheter finns?

Från och med 1960 definieras sex grundenheter i SI: meter, kilogram, sekund, ampere, kelvin och candela. 1970 lades en sjunde grundenhet till: mol. Genom att multiplicera och dividera grundenheterna bildas härledda enheter och för att bilda större och mindre enheter används prefix. Eftersom några av grundenheterna har större användnings-

område inom naturvetenskap kan en motsvarande mall med fördel tas fram i ämnessamverkan mellan matematik och no-ämnena.

- Varför har mil ett eget namn?

Många länder har inget eget namn för mil. Tiotusental finns med i mallen främst för att få med 10 kilometer, det vill säga ”en svensk mil”, vilken även används i Norge och till viss del i Finland. Det är matematiskt enklare att uttrycka, greppa och uppskatta större längder med lägre tal. Jämför med att det är lättare att uppskatta 15 meter än 1 500 centimeter, eller 37 mil istället för 370 kilometer. Detta är också en orsak till att enhetsbyten blir nödvändiga vid beräkningar med skala. På en orienteringskarta kan skalan vara 1:10 000 och att då tänka att exempelvis 3,5 centimeter på kartan motsvarar 35 000 centimeter i verkligheten är svårt att greppa. Att istället först omvandla 10 000 centimeter till 100 meter gör det lättare eftersom varje centimeter då motsvarar 100 meter, och avståndet 350 meter känns mer greppbart. Avstånden på en världskarta i skalan 1:30 000 000 blir ännu mer ogreppbara om de inte omvandlas till mer lätthanterliga enheter. Troligtvis kommer matematikundervisningen behöva ta upp sådana resonemang oftare i takt med att elever blir allt mer vana vid att hantera kartor i mobilen utan fasta skalor än papperskartor med fast skala. En annan fördel med att använda mil istället för kilometer är att de verbala uttrycken är mycket kortare: ”ett hundra kilometer” har sju stavelser medan ”tio mil” bara har tre.

- Varför är det bara tre decimaler?

Den andra begränsningen i mallen är till tusendelen eftersom den används till vardags i bland annat millimeter, milligram och som tre decimaler på exempelvis förpackningar i charkdisken där ett paket köttfärs kan vara märkt 1,328 kilogram.

- Varför står det gram och inte kilo på ettans plats i raden för massa?

Mitt under varandra i mallen finns ental, meter, kvadratmeter, liter och gram. De flesta skulle nog önska att det stod ”kilo”, det vill säga kilogram, istället för gram där eftersom kilogram är grundenheten. Ursprungligen definierades gram som massan av 1 cm³ vatten vid 4 °C, men för att få acceptans hos allmänheten har ett avsteg gjorts och nu är gram definierat som en tusendel av massan av den internationella kilogramprototypen. Enligt SI är kilogram grundenhet, men för att tydliggöra strukturen i tabellen och passa den gängse prefixhantering får gram stå kvar i samma kolumn som meter och liter.

- Vad betyder deka?

Deka är prefixet för tio, medan deci betyder tiondel. De enligt SI beslutade namnen på prefix hör till de ord som behöver läras in. I mallen tas de multipla prefixen deka, hekto och kilo upp samt prefixen deci, centi och milli som baseras på divisioner. Men orden

ska inte bara läras in, de ska även kunna användas för att underlätta vid enhetsomvandlingar. Låt eleverna bli vana vid, och se nyttan av att tänka ”en **kilometer** betyder ett **tusen** meter, ett **hektogram** betyder ett **hundra** gram, en **centiliter** är en **hundredels** liter” och så vidare. Diskutera även vad ”ett kilo äpplen” egentligen betyder. Hektar är ett ord som kanske inte används av så många elever, men vet de att ett ar är 10 gånger 10 meter, måste ett **hektar** vara hundra gånger så stort: $10 \cdot 10 \cdot 100 = 10\,000 \text{ m}^2$. I exempelvis österrikiska recept används enheten dag, vilket står för **dekagram**, det vill säga **tio** gram. För några generationer sedan köptes kol och koks i **hektoliter**, alltså **hundredel** litersmått. Hur kan ett sådant mått ha sett ut? Idag kan det fortfarande hända att hästfoder säljs i hektoliter, men oftast säljs det i kilogram. Låt eleverna fortsätta att undersöka andra enheter. Vilka används av äldre släktingar? Fram till slutet av 1900-talet bad äldre svenskar att få köpa ”ett mått grädde”, kkp som är förkortning för kaffekopp fanns länge kvar i kakrecept, vi säger fortfarande att vi använder en tumstock även om den inte har tum markerade och då egentligen heter meterstock och många räknar kalorier istället för kilojoule. Vilka influenser finns från andra kulturer? Det finns ett fåtal länder, bland annat USA, som ännu inte officiellt infört SI, men en hel del länder använder SI och traditionella måttsystem parallellt.

- Varför är det tomma rutor i några av raderna?

Area och volym är supplementenheter till meter. En area är tvådimensionell och därför skriver vi kvadratmeter som m^2 , det vill säga det finns både längd och bredd på ytan. Att $1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2 = 1\,000\,000 \text{ mm}^2$ kan behöva lyftas som förklaring till varför det är två nollor som läggs till eller tas bort vid enhetsomvandling från en areaenhet till nästa, och inte enbart en nolla som vid enhetsbyten vid längd. Låt eleverna undersöka hur en kvadrat med arean 10 m^2 eller 1000 m^2 kan se ut. Eftersom $\sqrt{10} \approx 3,16$ och $\sqrt{1000} \approx 31,6$ kan det ge förståelse till varför det saknas specifika namn på dessa areor. En missuppfattning som kan förekomma är att elever tror att en kvadratmeter alltid måste se ut som en kvadrat. Diskutera då exempelvis att en matta som är en halv meter bred och två meter lång har arean en kvadratmeter.

Volym har två rader i mallen. Den ena behandlar litermått och den andra kubikmått. Det skulle vara enkelt om en centiliter var detsamma som en kubikcentimeter, cm^3 . Så är det inte och i tabellen går det att se varför. Litermått omvandlas med den endimensionella längdskalan medan kubikmått är tredimensionella med längd, bredd och höjd. Det går tio centiliter på en deciliter men tusen kubikcentimeter på en kubikdecimeter. Precis som vid omvandlingar vid skalor är det lämpligt att diskutera med vilken enhet man bör mäta vid volymberäkningar. Vill man veta storleken på ett akvarium är det enklast att mäta i decimeter och få ut svaret i kubikdecimeter då en sådan är lika med en liter.

Referenser

BIPM (2019). *The international system of units (SI)*. Bureau International des Poids et Mesures. <https://www.bipm.org/en/measurement-units>

NCM (2019). Sagt och gjort. Längd- area- och volymskala. *Nämnares på Nätet 2019:1*
http://ncm.gu.se/wp-content/uploads/2019/10/sagtogjort_NpN209.pdf

Bilaga 1

Översikt över vardagliga enheter där positionssystemet framträder.

tio-tusental	tusental	hundra-tal	tio-tal	ental	tiondel	hundra-del	tusen-del
10000	1000	100	10	1	0,1	0,01	0,001

heltal ← → decimaler
Längd

10000	1000	100	10	1	0,1	0,01	0,001
10 km	kilo-meter	(hekto-meter)	(deka-meter)	meter	deci-meter	centi-meter	milli-meter
1 mil	km	-	-	m	dm	cm	mm

deci = tiondel centi = hundradel milli = tusendel

Area

10000	1000	100	10	1	0,1	0,01	0,001
100m·100m (hundra ar)	-	10 · 10 m	-	kvadrat-meter	-	kvadrat-decimeter	-
hektar	-	ar	-	m ²	-	dm ²	-

1 m² = 100 dm² 1 dm² = 100 cm² 1 cm² = 100 mm²

Volym

10000	1000	100	10	1	0,1	0,01	0,001
-	(kiloliter)	(hektoliter)	(dekaliter)	L	dl	cl	ml
	-	-	-				
	m ³			dm ³			cm ³

Massa

1000 kg = 1 ton

10000	1000	100	10	1	0,1	0,01	0,001
10 kg	kilo-gram	hekto-gram	(deka-gram)		deci-gram	centi-gram	milli-gram
	kg	hg	-	g	dg	cg	mg

kilo = tusen hekto = hundra deka = tio

Bilaga 2

Tom mall

Positionssystemet och enheter

--	--	--	--	--	--	--	--

Längd

--	--	--	--	--	--	--	--

Area

--	--	--	--	--	--	--	--

Volym

Massa

--	--	--	--	--	--	--	--