

## Digitala laborationer i matematikundervisningen

Ulrica Dahlberg, NCM

Att utnyttja möjligheterna med digitala verktyg i kombination med traditionella verktyg och konkret laborativt material kan vara ett mycket effektivt sätt att erbjuda sina elever goda förutsättningar för ett meningsfullt och allsidigt matematiskt lärande. Det tar tid att lära sig använda digitala verktyg på ett smidigt sätt och det tar tid att lära sig att se vilka möjligheter verktygen erbjuder för att berika och förbättra matematikundervisningen. Vi börjar med att titta på vad det visat sig att lärare behöver kunna för att deras elever ska lära sig matematik.

### Hur kan lärare lära elever matematik?

Många forskargrupper har försökt ta reda på detta i olika projekt och ur flera olika vinklingar genom att definiera didaktiska begrepp. En av dem är Lee Shulman som försökte ge svar genom att definiera begreppet PCK, Pedagogical Content Knowledge. Shulman (1986) menade att det inte räcker med kunskap om pedagogik och kunskap om ämnet, utan att det också finns speciell didaktisk ämneskunskap. Det finns även exempel på forskning där det undersökts vad som utmärker framgångsrika lärare, inte bara med avseende på hur de undervisar utan med avseende på vilken kunskap de har som gör att de undervisar på detta sätt. I storskalig forskning från Tyskland, i det så kallade COACTIV-projektet (Baumert et al., 2010), har man visat att en avgörande faktor för elevernas kunskapsutveckling är att undervisningen är kognitivt utmanande. Eleverna måste erbjudas uppgifter som är utmanande för dem. Sådana uppgifter kan till exempel innebära att:

- eleven behöver växla eller översätta mellan olika matematiska områden eller representationer
- uppgifterna eller redovisningen av dem kräver en hög nivå av matematiska resonemang
- uppgifterna inte bara innehåller beräkningar utan också förutsätter att matematiska begrepp används på ett kreativt sätt.

Forskarna kunde visa att lärarens PCK hade betydligt större effekt på både graden av kognitivt utmanande uppgifter och på elevernas kunskapsutveckling än rena ämneskunskaper eller generella pedagogiska kunskaper (Baumert et al., 2010).

I arbetet med uppgifter som kräver att elever går emellan olika matematiska områden och mellan olika representationer kan laborationer med konkret material och digitala verktyg vara en stor tillgång.

## Laborativt arbetssätt

För oss vuxna som redan behärskar ett matematiskt innehåll eller begrepp är det lätt att bli lite otåliga och skynda på eleverna för mycket. Samtidigt är det nödvändigt att se till att undervisningen inte fastnar på den konkreta nivån för att vid ett senare tillfälle ta ett stort steg direkt till den abstrakta nivån. I båda fallen kan det resultera i att det laborativa arbetet enbart har blivit ett tidsödande ”görande” som inte fyller någon verklig funktion för elevens lärande (Trygg, 2014).

Ett laborativt arbetssätt används för att undersöka och utforska matematiken. Arbetet blir inte laborativt för att det förekommer konkret eller laborativt material utan för att eleven ställs inför undersökande och utforskande frågor. Genom att arbeta laborativt ska eleven kunna göra upptäckter och få nya insikter. Den grundläggande frågan för allt laborativt arbete är ”Vad händer om...?”. Lärares utmaning är att formulera frågor så att eleverna känner att de kan utmanas av frågorna utan att ge upp.

En kunskapsöversikt som har gjorts om laborativt arbetssätt (Rystedt & Trygg, 2010) visade att laborativa material i sig inte ger eleverna matematiska insikter. Matematiken i materialet eller aktiviteten är ett värde som läraren måste tillföra och lyfta fram. Lärares roll är avgörande för vilken effekt den laborativa matematikundervisningen får för elevens lärande. Det har visat sig gälla även då det laborativa materialet består av digitala verktyg, något som vi återkommer till senare i texten.

Från samma kunskapsöversikt betonas också vikten av att elever ska dokumentera det laborativa arbetet, som annars lätt blir osynligt. Här kan dagens teknik verkligen underlätta oavsett om det är eleven själv eller läraren som skriver, eller om texten talas in. Olika former av dokumentation kan hjälpa elever att utveckla begrepp steg för steg, att se likheter och skillnader mellan olika representationer och figurer, att tydliggöra vad elever kan före och efter ett arbetsområde och att utveckla elevens vardagliga språk mot ett allt mer matematiskt språk.

## Digitalt laborativt arbetssätt

En risk när digitala verktyg introduceras i undervisningen är att man utgår från att själva verktyget ska skapa något intressant som medför att det också blir matematiskt intressant. En parallell kan dras till när konkret material används i matematikundervisningen och det fenomen som kallas ”hands on – minds off”. Eleverna manipulerar materialet utan att det leder till specifika matematiska erfarenheter.

Det har visat sig att lärare som är särskilt framgångsrika väljer andra varianter av uppgifter för eleverna att arbeta med i undervisningen med digitala verktyg (Thorvaldsen et al., 2012). Uppgifterna är inte traditionella proceduruppgifter utan är inriktade på att undersöka begrepp och fenomen. De digitala verktygen används då på ett annat sätt. Hur lärarna formar denna undervisning visar sig hänga samman med att de redan från början har en annan syn på vad som är viktigt i undervisningen.

I en forskningsöversikt som Skolforskningsinstitutet gjort (Wallin et al., 2017) visar en av studierna som genomförts på högstadiet att elever som undervisades med hjälp av programvaran Excel fick bättre förståelse för matematik i jämförelse med elever som fick ordinarie undervisning. En bidragande förklaring kan vara att den dynamiska aspekten av kalkylprogram medför att elever ges ökad möjlighet att skapa egna mentala modeller – något som kan antas vara viktigt för att kunna lösa problem även i nya sammanhang. I rapporten används begreppet digitala lärresurser, ett något vidare begrepp än digitala verktyg. Digitala resurser karaktäriseras i rapporten av att de specifikt anknyter till matematik, erbjuder en interaktivitet och används i syfte att förmedla ett ämnesinnehåll. Resurserna kategoriseras i uppgifter (lärresurser som levererar matematikuppgifter), objekt (till exempel geometriska former som kan representeras genom att utnyttja det digitala mediet), spel, verktyg och kurspaket. När ett digitalt verktyg är relativt väl integrerat i undervisningens teoretiska och praktiska inriktning som helhet lyckas läraren att med stöd av digitala lärresurser berika en redan rik matematikundervisning, bland annat med hjälp av metakognitiva stödfrågor i syfte att utveckla elevers problemlösningsförmåga. Ett annat exempel är när eleverna förväntas lära sig genom att i ett spelsammanhang undervisa en virtuell kompis. Då skapas en möjlighet för eleverna att förhålla sig till lärande på olika nivåer genom att de också ges den komplexa uppgiften att få undervisa. Det verkar alltså som att digitala verktyg kan användas för att utveckla olika matematiska förmågor, i synnerhet om de används i en i övrigt rik undervisningsmiljö. Men det går inte att dra slutsatsen att en lika effektiv undervisning inte skulle kunna utformas på andra sätt, utan digitala lärresurser.

Vidare visar översikten från Skolforskningsinstitutet att det är gynnsamt för elevers kunskapsutveckling om undervisningen med digitala lärresurser har ett avgränsat matematikinnehåll som kan tränas på ett fokuserat sätt. Speciellt bra är det när undervisningen med stöd av digitala lärresurser har fokus på så kallade tröskelbegrepp, det vill säga matematiska begrepp som det är av central betydelse att eleverna förstår för att kunna utvecklas vidare inom ett område. Exempel på tröskelbegrepp som berörs i underlaget är bråk och funktioner.

Det tycks vara positivt för elevers kunskapsutveckling om de digitala lärresurserna möjliggör att eleverna kan uppleva och urskilja matematiska begrepp och processer

visuellt och dynamiskt. Det kan exempelvis uppnås genom att använda digitala geometriska objekt för att ge elever rika och varierade upplevelser av geometriska egenskaper. En annan fördel som lyfts fram är om de digitala lärresurserna är konstruerade på ett sätt som uppmuntrar till samtal om matematiken.

## Olika typer av digitala verktyg

Idag finns det en uppsjö av digitala verktyg och utvecklingen går fort. Att välja vilka digitala programvaror man ska använda och hur de ska användas är en del av lärares didaktiska arbete (Drijvers et al, 2010). Användningen av digitala verktyg kan ha olika syften i undervisningen. Det finns till exempel verktyg för att visualisera, verktyg för att synliggöra elevlösningar eller responssystem som också kan fungera som så kallade ”exit tickets”. Även om alla dessa kan användas i matematikundervisning, har varje specifik digital programvara sin egen uppsättning möjligheter och begränsningar.

Responssystem och system för att synliggöra elevlösningar är inte specificerade för just matematikämnet. Verktyg för att visualisera matematik, som exempelvis det dynamiska geometriprogrammet Geogebra, kan vara något som eleven använder för att lösa matematikuppgifter eller utforska matematiska samband och begrepp.

Vi kan dela in de verktyg som passar i matematikundervisning på följande sätt:

- allmänna digitala verktyg
- digitala verktyg för undervisning
- digitala verktyg för matematikundervisning.

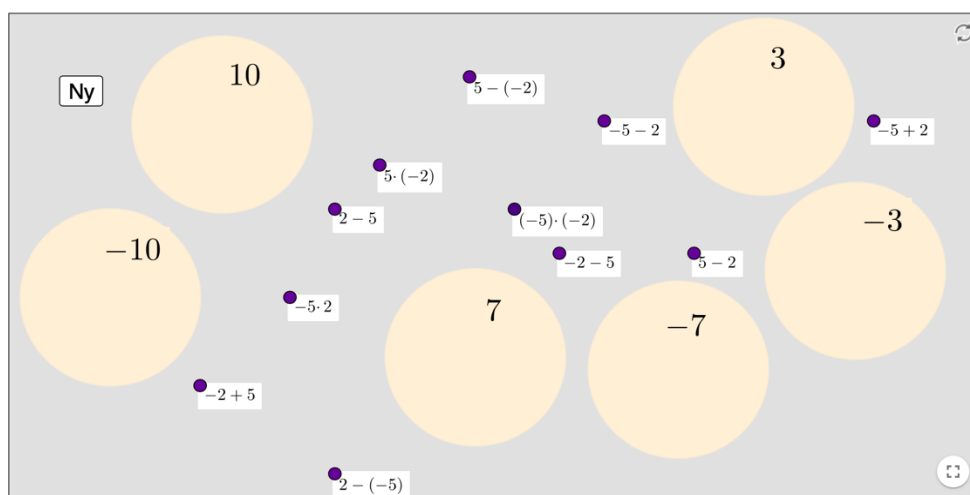
Allmänna digitala verktyg kan vara till exempel kalkylprogram såsom Excel eller Numbers som finns på de flesta datorer och surfplattor och som kan användas både i privatliv och yrkesliv, och som går att dra stor nytta av i matematikundervisningen. Genom att programmet snabbt och effektivt utför aritmetiska beräkningar kan eleverna koncentrera sig på själva problemlösandet.

Det finns många digitala verktyg för undervisning som också passar i matematikundervisningen, såsom olika spel och responssystem. Här finns bland annat Kahoot eller Socrative som är två exempel på responssystem som också kan användas till uppgifter med svarsalternativ, som underlag för att sedan diskutera frågor som ”Hur skulle man kunna ha tänkt om man svarar alternativ A?”. Här erbjuder det digitala verktyget möjligheten att anonymisera så att det inte framgår vem som svarat ”fel”, vilket öppnar upp för diskussioner som gör att missuppfattningar kan redas ut. Ett annat verktyg i denna kategori är dokumentkamera, där eleverna kan lägga sin lösning och visa för klassen. Många intressanta samtal och jämförelser mellan olika sätt att tänka blir därigenom lätta att genomföra.

Specifika program för just matematik och matematikundervisning är till exempel dynamiska geometriprogram såsom Geogebra eller Desmos, grafitare och andra räknare. Ett dynamiskt verktyg som både kan skapa grafiska visualiseringar av algebra och funktioner kan ge många insikter. För den ovana läraren finns ofta färdiga applikationer där elever och lärare endast med en knapptryckning kan flytta och förändra objekt. Figur 1 visar är en färdighetsträningsapplikation där eleven ska dra punkterna till rätt cirkel. En applikation som konstruerats i exempelvis Geogebra för ett specifikt undervisningssyfte är, till skillnad från en komplett version av programmet, enklare för eleven att använda, men kan samtidigt aldrig bli ett lika fullständigt verktyg som programmet i sin helhet.

**Figur 1**

En applikation i Geogebra där eleven ska dra uttrycken till den cirkel som ger rätt resultat av beräkningen.



## Utvärdering av verktyg

För att göra genomtänkta val av digitala programvaror i relation till olika påverkansfaktorer och syften, behöver läraren ämneskunskaper, pedagogiska kunskaper och kunskaper om digitala verktyg (Mishra & Koehler, 2006). Att kunna göra en genomtänkt bedömning av en digital programvara på förhand ökar möjligheten till en undervisning med kognitivt utmanande uppgifter.

När det gäller matematikinnehållet i till exempel appar som finns till surfplattor kan det vara bra att känna till att det inte finns någon reglering av vem som får tillverka och sälja appar för undervisning. Det finns inte heller någon granskning gällande innehållets

korrekthet eller lämplighet. Utbudet av appar är stort och det är inte alltid matematikinnehållet är korrekt eller anpassat till den målgrupp som beskrivs.

Digitala programvaror skiljer sig åt på betydligt fler sätt än enbart gällande matematikinnehållet. Som stöd för att kunna göra en bedömning är det bra att ha någon form av analysverktyg. Ett exempel på ett sådant är Ersättning – Förstärkning – Transformer (Hughes et al., 2006). Det analyserar hur verktyget ändrar matematikundervisningen snarare än att granska matematikinnehållet. De tre kategorierna beskriver hur innehållet i appen förhåller sig till hur man tidigare undervisat det specifika matematikinnehållet. Således kan en kategorisering utifrån ersättning, förstärkning och transformering bli olika i förhållande till olika lärare och deras matematikundervisning.

**Ersättning** innebär att appen ersätter något som tidigare gjorts utan app, där aktiviteten som sådan, med eller utan appen, inte skiljer sig nämnvärt. Ersättning medför ingen skillnad i form eller innehåll i matematiken eftersom det enbart är mediet som ändras. När en lärare byter matematikboken mot en ersättande app med samma typ av uppgifter har undervisningen egentligen förändrats mycket lite. Applikationen i Figur 1 är ett exempel på en ersättning där det digitala mediet ersätter liknande övningar på papper där eleven istället drar streck mellan uttryck och tal.

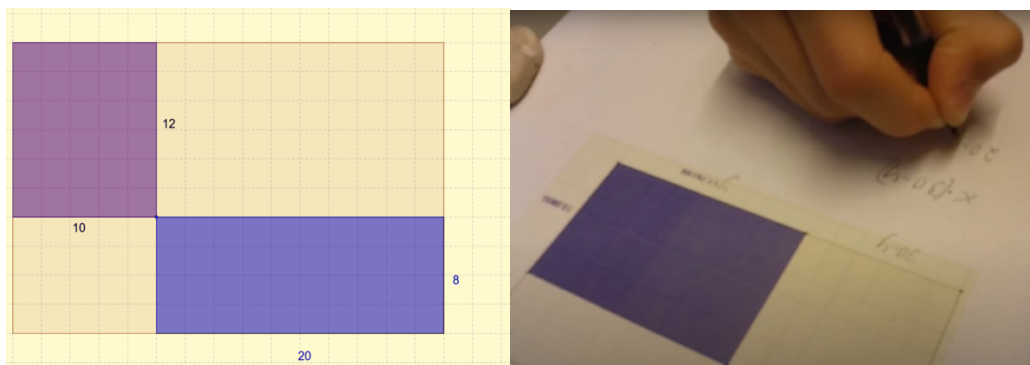
**Förstärkning** innebär att appen erbjuder en ökad möjlighet för lärande utan att för den skull förändra innehållet eller formen för den kunskap som eleven förväntas lära. Exempelvis skulle en applikation till en surfplatta eller ett digitalt läromedel som genererar matematikuppgifter på skärm (i stället för att ha dem i en bok) kunna fungera som ersättning eftersom det är samma innehåll som ska läras på samma sätt. Men att mediet har bytts skulle kunna påverka elevens motivation och därmed förstärka lärandet (De Witte & Rogge, 2014). Många appar har till exempel inbyggda belöningssystem där användaren samlar poäng eller färdas till allt högre nivåer i hierarkiska fantasivärldar. Ett annat exempel är appar där konkret laborationsmaterial har digitaliserats. Exempelvis digitala geobräden kan anses förstärka lärandet av matematik då ytor kan skapas, fyllas och jämföras på ett annat och mer flexibelt sätt än på ett traditionellt geobräde. Även om skillnaden mellan digitala och traditionella geobräden är marginell kan nya möjligheter erbjudas, men för att kunna utnyttja det digitala geobrädet bör eleverna ha erfarenhet av fysiska geobräden och gummisnoddar. De kan då enklare förstå hur areabegränsningarna kan göras på det digitala geobrädet. Exempelvis blir det tydligare på ett traditionellt geobräde på vilken sida av spiken som gummisnodden sätts och det öppnar därmed för fler möjligheter att konstruera mer komplicerade ytor. Helklassdiskussionen efter det laborativa arbetet kan bli av en annan karaktär då det blir enklare att diskutera och jämföra olika lösningar när alla kan se det projicerade geobrädet med hjälp av projektor.

**Transformer** innebär att det digitala verktyget erbjuder ökade och förändrade möjligheter för lärande av ett förändrat innehåll i relation till hur innehållet hade presenterats i en undervisning utan appen. Verktyg som kategoriseras som förstärkning eller transformering innebär att man, i olika grad, tar tillvara de möjligheter och den kapacitet som digitala verktyg erbjuder, till exempel samtida multipla representationer och kombinationer av bild, ljud och animationer. Samtidigt kräver dessa verktyg många gånger att läraren förändrar sin matematikundervisning för att verktyget ska få en meningsfull roll. Det räcker alltså inte med att införa verktyget i undervisningen. Den typ av aktiviteter man då kan genomföra är mycket annorlunda mot vad som vanligtvis görs på matematiklektioner, men kräver därför också att andra typer av uppgifter formuleras. Exempelvis Geogebra kan fungera som transformering av undervisning med helt andra frågeställningar om geometriska begrepp och figurer än att be elever använda verktyget för att beräkna areor. I Figur 2 visas en applikation som utnyttjar programmets dynamiska funktion och därmed gör det möjligt för eleven att undersöka många olika utfall på egen hand.

**Figur 2**

Elever undersöker när arean i två områden är lika och olika. Genom att flytta mittpunkten i bilden ändras areorna dynamiskt så att eleven kan undersöka olika utfall. Länk:

<https://www.geogebra.org/m/fSBtEWKZ>



## Digitala verktyg som fungerar för laborativt arbete

Digitala verktyg har i många fall visat sig ge eleverna engagemang och motivation samt skapa variation i undervisningen. Digitala verktyg kan även bidra till att elevernas känsla av delaktighet ökar i och med att arbetet ofta går ut på att differentiera, det vill säga eleverna arbetar med samma uppgift eller område men på olika nivåer eller med individuella inställningar. Men, för att detta ska ske då digitala verktyg involveras i matematikklassrummet kräver det att undervisningen har en laborativ karaktär. För att bli laborativ krävs det en väl genomtänkt plan med undersökande frågor som eleverna ska utforska. Ett undersökande perspektiv kräver både tid och engagemang. Det är stora

vinster med att tillsammans i kollegiet utforma en undersökande undervisning kring de olika verktygen. Med olika synsätt och reflektioner kan ni testa och omformulera olika frågor och laborationer tillsammans.

## Referenser

- De Witte, K., & Rogge, N. (2014). Does ICT matter for effectiveness and efficiency in mathematics education? *Computers & Education*, *75*, 173–184.  
<https://doi.org/10.1016/j.compedu.2014.02.012>
- Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., & Gravenmeijer, K. (2010). The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in mathematics*, *75*, 213–234. <https://doi.org/10.1007/s10649-010-9254-5>
- Hughes, J., Thomas, R., & Scharber, C. (2006). Assessing technology integration: the RAT – replacement, amplification and transformation – framework. I C. Crawford (Red), *Society for information technology and teacher education international* (s. 1616–1620). AACE.
- Mishra, P., & Koehler, M.J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: a framework for integrating technology in teacher knowledge. *Teachers College Record*, *108*(6), 1017–1054.
- Rystedt, E., & Trygg, L. (2010). *Laborativ matematikundervisning – vad vet vi?* NCM
- Torvaldsen, S., Vavik, L., & Salomon, G. (2012). The use of ICT tools in mathematics: a case-control study of best practice in 9th grade classrooms. *Scandinavian Journal of Educational Research*, *56*(2), 213–228. <https://doi.org/10.1080/00313831.2011.581684>
- Trygg, L. (2014). Undervisning med laborativa material. I K. Wallby, U. Dahlberg, O. Helenius, J. Häggström & A. Wallby (Red.), *Matematikundervisning i praktiken. Nämnaren tema 10* (s. 176–183). NCM
- Wallin, J., Hafsteinsdottir, E., Samuelsson, J., Bergman, E., Bergman, M. Fundell, S., Gulz, A., Helenius, O., & Jahnke, A. (2017). *Digitala lärresurser i matematikundervisningen, delrapport skola* [Systematisk översikt 2017:02]. Skolforskningsinstitutet.  
<https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1257371/FULLTEXT01.pdf>