Bråk ur ett lärandeperspektiv

Cecilia Kilhamn, NCM

Den här texten kommer att belysa några aspekter av bråk som är kritiska ur ett lärandeperspektiv. Det handlar om att förstå att talområdet utvidgas med rationella tal som behöver utforskas, om att bli medveten om vad bråkorden betyder och om användningen av representationer och modeller.

Undervisning om bråk, från del av helhet till rationella tal, syftar mot en god taluppfattning – men vad innebär det? I en ofta citerad forskningsöversikt beskriver Susan Lamon (2007) vad forskare menar med taluppfattning kring rationella tal:

> Elever som har utvecklat taluppfattning kring rationella tal har en intuitiv känsla för de rationella talens relativa storlek och en förmåga att göra uppskattningar. De kan resonera kvalitativt och multiplikativt för att lösa proportionalitetsproblem och översätta flexibelt mellan olika representationer för att skapa mening och för att fatta sunda beslut och göra rimliga bedömningar. (s. 636, min översättning).

Detta är högt ställda mål som går långt utöver att visuellt kunna identifiera storleken på delar av en cirkel. Undervisning om bråk och rationella tal måste därför innehålla en progression förbi de enkla bilder av bråk som del av helhet och del av antal, till förståelse och erfarenhet av bråk som tal.

I en studie av bråkundervisning i svensk skola fann Caroline Nagy (2019) att läromedlen sällan innehåller någon nämnvärd progression. Eleverna erbjuds inte att utvidga sin förståelse av bråk och rationella tal utanför synen på bråk som del av helhet eller del av antal. Även om undervisning för de yngre eleverna tar avstamp i bilder av pizzor och chokladkakor, så kallade ikoniska representationer, behöver både situationerna och representationerna bli fler och rikare. Exempelvis är det lättare att göra storleksjämförelser av bråk på en tallinje än i ritade pizzor. Avbilning i olika storlekar kan vara en ingång till att förstå innebörden i ekvivalenta, det vill säga likvärdiga, bråk och proportionella resonemang eftersom ett bråk beskriver ett förhållande mellan täljare och nämnare. Även Linda Marie Ahl och Ola Helenius (2021) visar att läromedel saknar progression eftersom samma ikoniska representationer återkommer i alla årskurser i grundskolan istället för att resonemangen successivt blir alltmer symboliska.

Talområdets utvidgning

Tal beskrivs ibland i termer av olika talmängder. De mest intuitiva talen är antalen, som i matematiska sammanhang kallas för de naturliga talen och betecknas $\mathbb{N}$. Det finns belägg för att människor och även vissa djur kan uppfatta antal helt spontant (Dehaene, 1997). När elever kommer till skolan har de i allmänhet en god intuitiv förståelse för naturliga tal, och ofta även för att dessa kan kombineras på olika sätt genom att adderas, subtraheras, divideras eller multipliceras. Troligen har de också redan i förskoleåldern stött på situationer där det inte går att dela lika, till exempel kan inte 3 barn dela lika på 2 bollar. Vad gör barnen då? En god övning som introduktion till arbete med bråk är att låta eleverna arbeta med delningsproblem.

> 5 barn ska dela på 3 chokladkakor så att alla får lika mycket.

Om elever på egen hand får rita och resonera om hur de ska dela chokladkakorna kommer de troligen att hitta på sätt att bryta isär dem så att fördelningen blir rättvis. De upplever ett behov av delar som är mindre än en hel och uppfinner på så sätt bråken (Lamon, 2008). Ett helt ny, oändligt stor mängd tal öppnas upp och det gäller nu att låta eleverna fundera på hur de nya talen fungerar, på vilket sätt de skiljer sig från naturliga tal och vad som är lika mellan talmängderna. Den nya talmängden kallas för rationella tal och brukar betecknas $\mathbb{Q}$ efter den engelska ordet quotient, som betyder kvot. Att talen kallas rationella hänger troligen ihop med latinets ratio, som anspelar på att världen ansågs vara förnuftig där storheter har ett rationellt förhållande till varandra (Kiselman & Mouwitz, 2008).

Definitioner

Ett rationellt tal definieras som *ett tal som går att skriva* på formen $\frac{a}{b}$ där a och b är naturliga tal och $b \neq 0$. Ett bråk definieras som *ett uttryck* på formen $\frac{a}{b}$ som beskriver förhållandet mellan a och b, där $b \neq 0$. Det kan tyckas som om dessa två definitioner är lika, men det finns vissa skillnader eftersom alla bråk inte är rationella tal och alla rationella tal inte är bråk.

Om täljare och nämnare inte är naturliga tal men kvoten går att skriva som en kvot mellan naturliga tal är det ändå ett rationellt tal. Exempelvis kan $\frac{0,5}{6,7}$ skrivas som $\frac{5}{67}$ och $\frac{3/4}{1/2}$ skrivas som och $\frac{6}{4}$. Talet 3,5 går att skriva som bråk och är därför rationellt, men här är det inte skrivet i bråkform och är därför inte ett bråk. Ett exempel på ett bråk som inte är ett rationellt tal är $\frac{\sqrt{3}}{2}$. I algebra kommer eleverna att möta uttryck skrivna i bråkform, exempelvis: $\frac{a/b}{a}$ och $\frac{x^2+1}{2x^3-4x}$. Det fina är att när eleverna lär sig räkna med bråk som är rationella tal så lär de sig samtidigt hantera algebraiska uttryck skrivna i bråkform eftersom räknereglerna fungerar på samma sätt. Ibland är det fördelaktigt att betrakta bråket som ett tal för att kunna utföra beräkningar med det eller för att jämföra två bråk på tallinjen. Andra gånger är det relevant att inte betrakta bråket som ett tal, om exempelvis själva förhållandet (till exempel $\frac{1}{3}$ som 1 till 3) eller andelen ($\frac{1}{3}$ av något) är i fokus, eller om divisionen kan utföras. I algebraisk modellering och ekvationslösning är det en stor fördel att kunna växla mellan att se ett bråk som ett tal, ett förhållande eller en division.

Bråkordens betydelse

En aspekt av att förstå ett begrepp är att få rätt associationer till de termer som används i samband med begreppet. Var kommer orden ifrån och varför heter det som det gör?

Ordet bråka är släkt med två olika tyska ord, dels brechen som betyder att bryta sönder, dels braken i betydelsen buller och brak. Att det heter bråk på svenska och fraction på engelska och franska indikerar att det är ett tal som på något sätt brutits sönder i bitar. Även utanför matematiken innebär bråk att något går sönder. En vanlig betydelse är att två personer bråkar, vilket kan tolkas som att de bryter sönder ett samförstånd.

Ordet täljare har samma rot som det tyska verbet erzählen som betyder berätta. Täljaren förtäljer hur många bråkdelar det rör sig om. Ordet nämnare motsvarar verbet nennen som betyder benämna. Nämnaren benämner bråket, det vill säga ger bråket dess namn. De olika betydelserna blir tydliga om exempelvis ett bråk som $\frac{3}{4}$ betraktas som 3 stycken fjärdedelar: $\frac{3}{4} = 3 \cdot \frac{1}{4}$. Ordet kvot är något tvetydigt eftersom det brukar definieras som resultatet av en division samtidigt som det är ett förhållande mellan två tal. Om $\frac{a}{b} = c$ och $b \neq 0$, säger vi att c är kvoten mellan a och b eller förhållandet mellan a och b.

Representationer och modeller

Att bråken uppstår ur delningssituationer är ganska givet. Nästa steg i utvecklingen av representationer är att rita ikoniska bilder, det vill säga en stiliserad avbildning av en situation som inte behöver vara verklighetstrogen, till exempel att illustrera en delning av chokladkakor genom att rita rektanglar. Att gå från verkliga situationer till ikoniska representationer är mycket viktigt för meningsskapandet och ses som en brygga över till helt symboliska representationer. I litteraturen förespråkas användningen av linjer, rektanglar och rutnät för att illustrera bråk och som modell för att räkna med bråk (Twomey Fosnot & Dolk, 2019; Petit m.fl., 2015). Tallinjen kan sägas utgöra ett mellanting mellan en ikonisk och en symbolisk representation eftersom såväl antal, som mätvärden och rena tal kan symboliseras som sträckor och punkter på tallinjen. Tallinjen överför därmed många olika situationer till en och samma generella modell.

Tallinjen och enhetssträckan

Efter att ha arbetat i detalj med en lesson study om bråk i årskurs 6 och 7 konstaterade en grupp lärare att det var hög tid att överge lärobokens pizzamodell och istället arbeta med tallinjen. De skriver:

> Styrkan med tallinjen är att tal kan representeras med både sträckor och punkter. Tallinjen kan fungera som en visuell representation av bråket, både som tal och som del av helhet. Av vår studie drar vi slutsatsen att om eleverna ska utveckla förmågan att storleksordna tal i bråkform behöver de få möjlighet att gå från konkreta exempel till abstrakt matematik. […] Tallinjen är inte bara visuell utan också konkret i den mening att man kan rita den, stega upp avstånd, mäta och så vidare. Det är en representationsform som tydligare leder till det abstrakta bråktänkandet. (Drageryd m.fl., 2012, s. 68).

På Berkeley University i Kalifornien har ett stort forskningsprojekt resulterat i utvecklingen av ett omfattande material om hur tallinjen kan användas i bråkundervisning (Saxe, 2013). Där poängteras några egenskaper hos tallinjen som gör den så användbar som tankeredskap och som lärare och elever bör utforska tillsammans. De viktigaste av dessa som berör arbetet med bråk är:

- Talen på tallinjen är ordnade från 0 och uppåt, åt höger på tallinjen.
- 0 är ett tal på tallinjen.
- Tallinjen har ett enhetsintervall som är konstant. Enhetsintervallet är avståndet mellan 0 och 1, och sträckan 1 är lika lång överallt på tallinjen. Alla tal jämförs med enhetsintervallet. Sträckan 1 är alltid den underförstådda helheten.
- Större intervall på tallinjen byggs upp av flera enhetsintervall, exempelvis består talet 5 av fem enheter.
- Enhetsintervallet kan delas upp i jämnstora delintervall. Antal delintervall som ryms i enhetsintervallet motsvarar nämnaren i ett bråk.
- Varje tal på tallinjen kan ha olika namn beroende på hur stora delintervall som skapats, exempelvis är $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{8}$ och $\frac{75}{100}$ olika representationer av samma tal och motsvarar samma punkt i relation till referenspunkten 1, eller samma avstånd i relation till enhetsintervallet 1.
- Referenspunkterna 0, ½ och 1 är speciellt viktiga vid storleksordning av bråk.

Det bör också påpekas att oavsett hur stor eller liten tallinjen ritas eller om den bara är mental, så är avståndet 1 alltid lika med enhetsintervallet. Det är enkelt att visa genom att använda ett digitalt verktyg där tallinjen kan förstoras och förminskas helt skalenligt, eller göra en tallinje av ett resårband som kan dras ut med bibehållna proportioner. Enhetsintervallet ändrar då verklig storlek men behåller sin roll som längdenhet.

Referenser

Ahl, L. M., & Helenius, O. (2021). Ett ramverk för progression. *Nämnaren 2021*:2, 39–44.

Dehaene, S. (1997). *The number sense*: *How the mind creates mathematics*. Oxford University Press.

Drageryd, K., Erdtman, M., Persson, U., & Kilhamn, C. (2012). Tallinjen – en bro mellan konkreta modeller och abstrakt matematik. *Nämnaren 2012*:3, 63–68.

Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2019). *Unga matematiker i arbete. Bråk, decimaltal och procent*. Studentlitteratur.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: toward a theoretical framework for research. I F. K. Lester (Red), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 629–668). Information Age.

Kilhamn, C. (2021). Språkspalten. Kom låt oss bråka. *Nämnaren 2021*:1, 34–38.

Nagy, C. (2019). Progression i undervisning av bråk. *Nämnaren 2019*:3, 21–25.

Kiselman, C., & Mouwitz L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. NCM, Göteborgs universitet.

Petit, M. M., Laird, R. E., Marsden, E. L., & Ebby, C. B. (2015). *A focus on fractions: bringing research to the classroom*. Routledge.

Saxe, G. (2013). *Learning mathematics through representations. Integers and fractions on the number line*. University of California.