

## Laborativa material i bråkundervisningen

Lena Nilsson, NCM

Tal i bråkform och bråkräkning är matematikinnehåll som lämpar sig väl att konkretisera och åskådliggöra med olika representationer och skilda material. I den här texten beskriver och jämför vi olika sätt att visualisera bråk. Vi lyfter fram egenskaper hos material och modeller och diskuterar i vilka situationer de är användbara.

### Pizzor och chokladkakor

I matematikundervisningen har tårtor länge använts som modell för att åskådliggöra tal i bråkform, men de har ersatts med pizzor under de senaste decennierna. Elever får inledningsvis möta enkla bråk som en halv och en fjärdedel genom ”pizzamodellen”, och efterhand delas pizzan i allt fler och mindre bitar och själva pizzan förenklas till en cirkel ritad på tavlan innan det slutligen finns förståelse för en rent symbolisk notation. Fördelen med pizzor och cirklar är att det är enkelt att se vad som är det hela; underförstått hela cirkeln om inget annat anges. En rektangel representerar inte en hel lika tydligt eftersom en ny rektangel skapas när en bit tas bort så att den ursprungliga helheten inte längre framträder. Däremot blir operationer av bråk med olika nämnare betydligt lättare att visualisera med en rektangel än en cirkel. När det passar sammanhanget bättre ersätts pizzan med chokladkakor som i sin tur ersätts med rektanglar. Verkliga chokladkakor är oftast tillverkade med rutmönster, vilket gör att de behöver väljas med omsorg så rutorna kommer till fördel.

#### Figur 1

Två chokladkakor med olika antal rutor



I den vänstra chokladkakan i Figur 1 går det att se tredjedelar på ena ledden och sjättedelar på den andra. Den högra chokladkakan består av  $4 \times 7$  rutor. Den kan användas för att resonera om sjundedelar, fjärdedelar och halvor. Om en rad bryts bort så att helheten blir  $4 \times 6$  rutor istället går det att visualisera sjättedelar, fjärdedelar, tredjedelar och halvor. För ännu större variation kan chokladkakan ritas utan rutor och

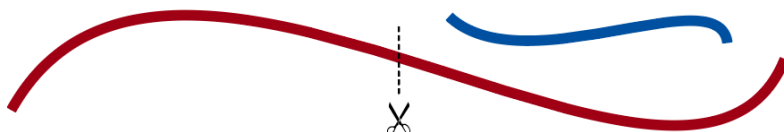
ersättas med en rektangel. Då har det konkreta materialet övergått till en mer abstrakt representation. Ett sätt att överbrygga från det ena till det andra är att utgå från en chokladask där bitarna ligger i fack ordnade i rader och kolumner, kanske 4 x 6 rutor. När man sedan lägger ett lock på asken kan man inte längre se de enskilda facken utan måste tänka sig dem.

## Del av helhet och del av antal

I både en konkret pizza och en generell cirkel benämns varje del som del av helhet. För att eleverna inte ska fastna i att en halv alltid ser ut som en halvcirkel och en fjärdedel ser ut som en kvartscirkel behöver de möta många andra helheter såsom snören, skålar med vatten, pappark i varierande storlekar och klumpar med modellera. Det kan ge dem erfarenhet av hur olika en hel och en halv kan vara och uppleva att ett halvt rött snöre faktiskt kan vara betydligt längre än ett helt blått snöre som i Figur 2.

**Figur 2**

Ett helt och ett halvt snöre



Tillfällen att diskutera hur man får lov att dela, vad som är det hela, vad som är lika eller olika uppenbarar sig när elever hanterar material och ser vad som händer. Caroline Nagy (2017) fann att bristen på förståelse för del av helhet fanns bland elever på alla stadier, även lärarstudenter. De möter genom hela sin skolgång snarlika bilder i sina läromedel utan att det sker någon progression eller att de blir utmanade. Hon menar att för att komma tillrätta med svårigheterna behöver eleverna möta en variation av laborativa material och bilder kopplade till vardagliga situationer. Eleverna behöver också sätta egna ord på sin förståelse så att lärare kan upptäcka brister.

En helhet som ett snöre eller ett pappersark kallas i en del engelskspråkiga läromedel, redan för de yngsta eleverna, för 'continuous' det vill säga **kontinuerlig** (Neagoy, 2017). Synonymer till kontinuerlig är exempelvis sammanhängande, oavbruten, utan avbrott. Dessa engelskspråkiga läromedel använder sedan ordet 'discrete' vid del av antal. Inom matematiken betyder ordet diskret att vara separat eller åtskild, som är något annat än den vardagliga betydelsen att vara förstynt (Kilhamn, 2020). Del av antal handlar alltså om **diskreta**, separata saker eller mängder som antal äpplen i en fruktlåda eller antal strumpor i tvättkorgen. Det som kan förvirra för svenskspråkiga elever är att del av antal ibland är detsamma som del av helhet. När det handlar om chokladbitar i en

kartong är det inte alltid helt givet om det är del av helhet (hela kartongen) eller del av antal (antalet bitar) som eleverna ska fokusera på.

I del av antal utgörs mängden av ett antal objekt, låt säga åtta knappar. När elever ska dela in knapparna i fjärdedelar blir det centrala att antalet knappar i varje bråkdel är lika många, i detta fall två knappar i varje fjärdedel. Hur knapparna ser ut har ingen betydelse. Vid delning av de två olika mängderna ligger fokus på skilda saker: vid del av helhet på att bråkdelarna blir lika stora och vid del av antal på att antalet objekt är lika många.

Ett sätt att tydliggöra skillnaden mellan del av helhet och del av antal är att kombinera dem. Det kan exempelvis göras med tårter dekorerade med jordgubbar och ljus, eller med material liknande barnleksaken i Figur 3.

**Figur 3**

En träpizza för barn att leka med



En pizzabit är en sjättedel av hela pizzan och en champinjon är en sjättedel av antalet champinjoner som har lagts på pizzan. Om det ligger 12 champinjoner på pizzan är 6 champinjoner hälften av antalet på pizzan. Genom olika frågeställningar kan skillnaden mellan antal och andel komma fram, liksom skillnaden mellan pizzan som en kontinuerlig helhet och antalet champinjoner som en diskret helhet.

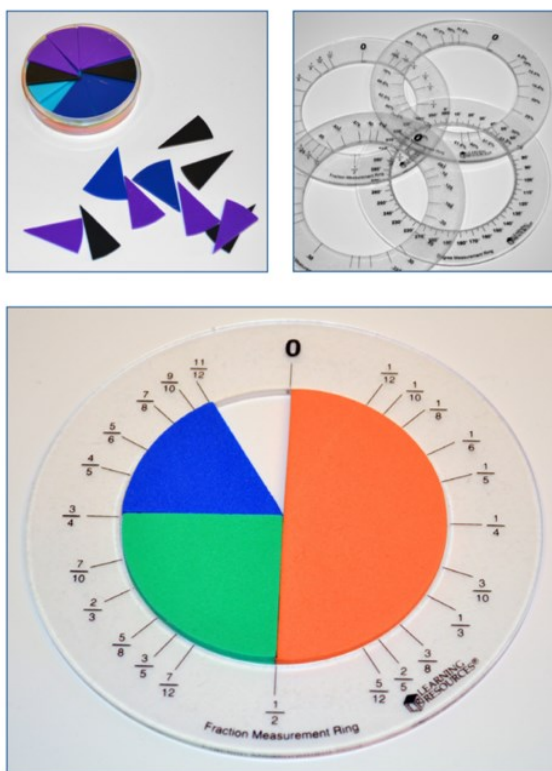
På en tredjedel av pizzan finns två champinjoner. Hur många champinjoner finns på hela pizzan?

## Vardagliga och pedagogiska material

När pizzor och chokladkakor används i undervisningen är det i regel som åskådningsmaterial i samtal om vardagsnära situationer och som tankemodell, mer sällan i verklig, fysisk och konkret form. För att eleverna ska få möjlighet att handgripligen undersöka tal i bråkform kan vardagliga ting, som snören, pappersark och barnleksaker, eller pedagogiska material som bråkburkar och bråktavlor användas. Bråkburkarna (Figur 4) består av en stapel med cirkelskivor där en är hel, nästa delad på mitten till två halvor och så vidare, vanligtvis till tiondelar eller tolfte delar. Till dessa burkar finns även tillhörande ringar med olika markeringar som decimaltal, tal i bråkform, procent, grader och klockan.

**Figur 4**

En bråkburk och tillhörande ringar



Bråktavlorna (Figur 5) är rektangulära där en rektangel har bestämts till en hel och sedan har tavlans övriga rektanglar delats i allt mindre delar. Elever kan göra egna, enklare bråktavlor i form av bläddror (Figur 6). När de båda grundformerna cirkel och rektangel används parallellt och genomtänkt i undervisningen får eleverna erfarenhet av att välja den representation som är enklast eller mest användbar i en aktuell situation.

**Figur 5**

En variant av bråktavla



**Figur 6**

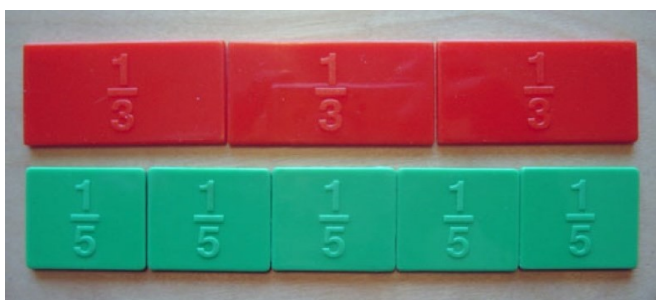
En så kallad bläddra som visar en hel (röd), två halvor (gula), fyra fjärdedelar (blå) och åtta åttondelar (gröna)



När laborativt material används behöver läraren tänka igenom vad materialet är avsett att visa eller vad eleverna ska upptäcka (Figur 7).

**Figur 7**

Vad är störst  $\frac{3}{3}$  eller  $\frac{5}{5}$ ?



Ibland överskattar läraren möjligheten att påvisa matematiska idéer med laborativt material, i detta fall med bråktavlor. För läraren är det självklart att materialet i Figur 7 visar att  $\frac{3}{3}$  är lika med  $\frac{5}{5}$  eftersom båda representerar 1, men elever kan vara osäkra och kämpa med att försöka lista ut vad läraren vill visa (Ball, 1992). En tänker: De röda bitarna visar att  $\frac{1}{3}$  är större än de gröna  $\frac{1}{5}$ , alltså är  $\frac{3}{3}$  störst. En annan tänker: Det finns bara tre röda bitar men fem gröna, alltså är  $\frac{5}{5}$  störst. För att undvika missuppfattningar behöver eleverna få visa och berätta hur de har hanterat materialet och vad de har upptäckt. Elevernas egen dokumentation spelar en viktig roll.

Både bråkburkar och bråktavlor är utmärkta vid jämförelser av storleken på tal i bråkform (del av helhet), men handlar det om del av antal kan markörer eller något annat plockmaterial som exempelvis knappar, dekorationsstenar, plastfigurer och multilink vara lämpligare som konkret material.

I en påse är  $\frac{1}{4}$  av kulorna röda,  $\frac{1}{3}$  av kulor är gröna och 5 kulor är blå.  
Hur många kulor finns i påsen?

I detta problem kan exempelvis markörer eller multilinkkuber i samma färg som textens kulor underlätta för elever att resonera sig fram eller för att kontrollera ett resultat.

## Från konkret till abstrakt

Mellan konkreta till abstrakta representationer finns, beroende på situationen, ett eller flera mellansteg där representationerna är ikoniska eller bildmässiga. På en halvkonkret nivå (Heddens, 1986) används föreställande bilder (Figur 8) och på en halvabstrakt nivå cirkclar som representationer av pizzorna.

**Figur 8**

Bilder av pizzor för arbete på halvkonkret nivå



I många fall är den åskådningsteknik som används i klassrummet det som avgör valet av vad läraren visar; utklippta bråkdelar som sätts på tavlan med magneter, färdigproducerade bråkdelar i magnetiskt material, konkret material som läggs under en dokumentkamera och projiceras, eller andra rent datatekniska lösningar.

## Tallinjen

Förmåga att använda tal i bråkform bygger på förståelse för samband mellan olika bråkuttryck och mellan olika representationer av bråk. Förtrogenhet med tal i bråkform öppnar för möjligheter att kunna generalisera aritmetiska operationer med hela tal till operationer med rationella tal.

Tallinjen är en komplex och generell modell av tal som elever utvecklar förståelse för allt eftersom de försätts i situationer där de har nytta av att använda den. Först används tallinjen för att utveckla talraden genom att heltal placeras på tallinjen. Senare blir tallinjen allt mer detaljerad för att åskådliggöra var alla tal kan placeras, såväl naturliga tal som rationella och reella tal. Efter hand används tallinjen för operationer, kanske främst additions- och subtraktionsberäkningar, och den tomma tallinjen blir slutligen en modell för tänkandet om både enskilda tal och allt mer avancerade operationer. Så småningom kommer tallinjer också att användas i exempelvis koordinatsystem och diagram. För eleverna kan det ta tid att utveckla full förståelse för tallinjen och det är viktigt att då och då ta reda på vilken uppfattning de har. Om en elev inte har tillräckligt väl utvecklad förståelse för tallinjen fungerar den kanske inte som en god representation av det aktuella matematikinnehållet.

En tidig aktivitet för att koppla samman tal i bråkform med tallinjen kan handla om att placera stambråken på en tallinje och resonera om det som blir synligt. Därefter kan eleverna erbjudas aktiviteter där bråkcirkeln respektive bråktavlan kopplas samman med tallinjer.

## Fler material

### Cuisenairestavar

Cuisenairestavar är ett relationsmaterial som kanske inte i första hand förknippas med tal i bråkform, men eftersom eleven själv kan bestämma vilket tal en stav ska representera går det utmärkt att använda för att undersöka tal i bråkform och vid bråkräkning (Malmer, 1990).

### Tangrampussel

Tangrampussel (Figur 9) förknippas inte heller i första hand med bråkundervisning. Många elever är duktiga på att lägga tangrampussel efter olika slags förlagor och när tangrampussel i olika färger används som ett relationsmaterial ges de möjlighet att resonera om tal i bråk- och procentform.

**Figur 9**

Tangrampussel lagt med fyra olika färger



Om hela tangramkvadraten är 1, hur stora är de olika bitarna?

Om istället den lilla kvadraten, här gul, är 1, hur stora är de olika bitarna?

Uttryck svaren i både bråk- och procentform.

## Tärningar

Tärningar finns med färdiga bråkuttryck och det finns helt omarkerade tärningar där man själv skriver de bråk som önskas. Vanliga sex- och tiosidiga tärningar, gärna i olika färger, kan också användas om man exempelvis bestämmer att den vita tärningen visar täljaren och den röda nämnaren.

## Kompletterande material, aktiviteter och spel

Kompletterande material såsom bråkkort, bråkplank och pizzabilder finns på [ncm.gu.se/matematikpapper](https://ncm.gu.se/matematikpapper). Samtidigt som elever arbetar med olika aktiviteter och material för att få förståelse för tal i bråkform behöver de även färdighetsträning, exempelvis i form av spel. Flera sådana spel finns på Strävorna ([ncm.gu.se/stravorna](https://ncm.gu.se/stravorna)).

## Referenser

Ball, D. L. (1992). Magical hopes: manipulatives and the reform of math education. *American Educator*, 16(2), 14–18, 46–47.

[https://www.aft.org/sites/default/files/periodicals/ae\\_summer1992\\_ball.pdf](https://www.aft.org/sites/default/files/periodicals/ae_summer1992_ball.pdf)

Heddens, J. (1986). Bridging the gap between the concrete and the abstract. *The Arithmetic Teacher*, 33(6), 14–17.

Kilhamn, C. (2020). Språkspalten. Diskreta tal är inte diskreta, *Nämnnaren* 2020:2.

Malmer, G. (1990). *Kreativ matematik*. Ekelunds förlag.

Nagy, C. (2017). *Fler bråk i matematikundervisningen. En aktionsforskningsstudie där lärare lär om progression*. [Licentiatuppsats, Göteborgs universitet].

<https://gupea.ub.gu.se/handle/2077/54705>

Neagoy, M. (2017). *Unpacking fractions. Classroom-tested strategies to build students' mathematical understanding*. NCTM.