

Representationer i matematik

Cecilia Kilhamn och Lena Nilsson, NCM

Vad är en hund? Alla som vuxit upp i ett samhälle där det finns hundar vet vad en hund är, men kan ändå ha svårt att förklara eller definiera begreppet. Istället ger vi exempel. Vi lär oss begreppet hund genom att möta, se, känna, klappa och höra många olika hundar. Erfarenheterna gör att vi efter ett tag kan skilja mellan hundar och andra objekt, och till och med mellan hundar och andra liknande djur såsom varg eller katt. Vi associerar till hundar när vi ser bilder av hundar som är mer eller mindre naturtrogna, såsom seriefiguren Snobben eller konstgjorda gosdjurshundar. Utifrån våra erfarenheter av högst konkreta och levande hundar skapar vi en förståelse för det abstrakta begreppet hund. Ordet hund, liksom avbildningar av och symboler för hundar, är alla representationer av begreppet hund. Snobben är inte en hund, han är en representation av en hund.

Matematik handlar om objekt och begrepp som alla är abstrakta till sin natur. I motsats till hundarna kan vi aldrig se och ta på matematiska objekt. Ta exempelvis en cirkel. I matematiken utgörs en cirkel av alla punkter som ligger på exakt samma avstånd från en viss punkt i planet. En punkt har ingen utbredning och därför kan dessa punkter aldrig existera på ett konkret sätt. Dessutom är de oändligt många. Istället skapar vi oss erfarenhet av det abstrakta begreppet cirkel genom att titta på olika representationer av cirklar, som:

- en rund tallrik
- känslan av att åka karusell
- en löskiva
- en roterande rörelse med handen
- en ring ritad med passare
- ett antal punkter på en bildskärm som alla har samma avstånd till en mittpunkt
- ordet cirkel
- ekvationen $x^2 + y^2 = r^2$.

De olika representationerna framhäver olika aspekter av cirkeln. Ibland framträder rundheten, ibland radien och det konstanta avståndet till mittpunkten, ibland cirkelns rand och ibland cirkelskivans area. Genom att få erfarenhet av många olika

representationer av samma objekt skapas en förståelse och en mental bild av det abstrakta objektet.

Matematiska representationer

Ordet representation förklaras i Nationalencyklopedin på följande sätt:

Representationer ersätter något och står i stället för något annat. Själva ordet representation kommer av det latinska 'repraesenta'tio' som betyder "åskådliggörande framställning eller exempel". En viktig egenskap hos en representation är att den gör det representerade indirekt närvarande för användaren.

En representation är alltså något som med avsikt används eller utformas för att i tanke, handling eller kommunikation ersätta det man syftar på. Det kan vara fråga om att ett abstrakt begrepp representeras av något konkret och påtagligt. Begreppet finns då indirekt närvarande på något sätt via sin representation.



Vägmärket för "förbud mot infart med fordon" (en röd cirkel med en gul rektangel) representerar enkelriktad färdväg och får själva förbudet att närvara.

De första matematiska representationer elever möter i skolan är oftast siffror som används för att representera tal. Siffrorna står där istället för själva talen som man inte kan se, men som man förväntas associera till. Tecknet 3 är en symbol för **talet tre**. Talet tre kan också representeras av tre hundar, tre pinnar eller den romerska siffran III. När vi skriver 38 kan vi se de båda siffrorna tillsammans som en symbol eller siffrorna var för sig som två symboler vars placering blir mycket viktig. Om vi istället placerar siffran 8 som en exponent med 3 som bas, 3^8 , får vi en symbol för ett helt annat tal. Tecknet π är en representation av **talet pi**, som bara med ett ungefärligt värde kan representeras med siffror, exempelvis 3,14.

Många beskrivningar av matematiska representationer baseras på den amerikanska psykologen Jerome Bruners (1915–2016) arbete. Han identifierade tre nivåer av representationer där den symboliska nivån är den mest abstrakta (Bruner, 1966; Bruner & Kenney 1965):

- realistisk – fysiska handlingar, upplevelser och konkreta objekt
- ikonisk – avbildningar som är mer eller mindre bildlika
- symbolisk – språk och tecken.

Indelningar av representationsnivå uppges av många gå **från konkret till abstrakt**, ibland med flera mellannivåer såsom halvkonkret och halvabstrakt (Heddens, 1986).

Olika sätt att kategorisera representationer är fortfarande under utveckling, inte minst med tanke på nya interaktiva medier där bild, handling och språk interagerar (Moyer-Packenham et al., 2008). I det sammanhanget används begreppet **modaliteter**, såsom konkret, språkligt, bildligt, digitalt eller mentalt. Ibland särskiljs även yttre och inre mentala representationer (Goldin & Shteingold, 2001).

Ytterligare ett sätt att beskriva representationer är i termer av olika **register**, där varje register innehåller en uppsättning representationer som är nära relaterade till varandra. Ett symboliskt register innehåller siffror, matematiska symboler och bokstäver; ett grafiskt register innehåller grafer och diagram; ett ikoniskt register innehåller skisser, bilder och mönster; ett språkligt register innehåller ord och påståenden. Raymond Duval (2006) menar att det enda sättet vi kan få tillgång till matematikens värld är genom att se samband mellan olika representationer och lära oss att översätta mellan dem. Ibland är dessa översättningar kongruenta, det vill säga varje del av representationen översätts direkt från ett register till ett annat. Men ofta är översättningarna inte kongruenta, då uppstår utmaningar som kan ge svårigheter men som också ger en djupare förståelse när de övervinns.

I en kongruent översättning mellan språkligt och symboliskt register översätts varje del av det språkliga uttrycket till en matematisk symbol som placeras i samma ordning.

Fem och sju är lika med tretton $\Leftrightarrow 5 + 7 = 13$

Ett exempel på en icke-kongruent översättning mellan språkligt och symboliskt register visar hur ganska små skillnader kan göra stor skillnad för elevers möjlighet att förstå:

Produkten av fem och sju är trettiofem $\Leftrightarrow 5 \cdot 7 = 35$

I exemplet finns ordet **produkten** inte översatt till symboler, orden **fem**, **sju** och **trettiofem** finns översatta till siffror, men ordet **och** har blivit ett multiplikationstecken istället för ett additionstecken som i det förra exemplet. I själva verket är det de två orden **produkten_och_** som tillsammans översätts till ett multiplikationstecken.

Även inom samma register görs en typ av översättningar från en representation till en annan. Duval (2006) kallar dessa för transformationer. När vi växlar mellan olika representationer av samma tal transformeras talets form samtidigt som det bibehåller sitt matematiska värde. Räkning med rationella tal innehåller nästan alltid transformationer. Här är ett exempel på fyra olika symboliska representationer av samma tal:

$$\frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} = 1,5$$

Representationer kan dessutom ha dubbla roller, vi kan exempelvis låta konkreta föremål representera matematiska begrepp och vice versa. En rektangel på ett papper

kan få representera fotbollsplanen på skolgården, men fotbollsplanen kan i ett annat sammanhang få agera representant för en (abstrakt) rektangel. Plockmaterial i form av klossar, knappar, pinnar eller spelmarkörer kan fungera som en konkret representation för abstrakta tal, till exempel när de används för att visa relationen mellan jämna och udda tal. De kan även användas för att modellera verkliga situationer, som när markörer representerar föremål eller personer som ska räknas.

Begreppet **konkretisering** innebär en översättning från en symbolisk representation till en representation på en lägre abstraktionsnivå. Den symboliska representationen av additionen $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ översätts till en ikonisk representation i bilder av färglagda cirkeldelar, eller till en realistisk representation i form av en halv och en fjärdedels pizza. I **laborativ** matematikundervisning går växlingen mellan representationer oftast åt andra hållet: från det konkreta eller ikoniska till det abstrakta. Undervisningen startar i realistiska representationer som översätts till alltmer abstrakta representationer där målet är att bli kompetent i att använda de symboliska representationerna som speciellt tillhör matematiken (Kilhamn, 2018).

I undervisning om tal i bråkform möter eleven ofta en mängd olika representationer. Många är realistiska eller ikoniska och framhäver olika aspekter av talet medan andra är mer abstrakta. Ju mer realistisk en representation är desto mer begränsad är den. Två pizzabitar kan exempelvis adderas men knappast multipliceras. För att klara av att räkna med tal i bråkform och så småningom med bråkuttryck och formler i algebra och naturvetenskapliga tillämpningar behöver eleverna vara förtrogna med talens abstrakta representationer.

Uttrycksformer

Ibland används begreppet uttrycksform för att benämna det som vi ovan kallar representationsformer eller register. Gustafsson med flera (2011) menar att begreppen uttrycksform och representation ofta används synonymt, men att uttrycksformen mer hör samman med i vilka former och med vilka medier representationer uttrycks. De ger exempel på hur en bildlig representation kan uttryckas med hjälp av en graf på papper, med grafitande räknare, på interaktiv skrivtavla et cetera.

Lärande i matematik kan beskrivas som en kumulativ process där man stegvis får tillgång till allt fler och mer avancerade representationer och förstår hur de hänger samman och hur de kan användas. Att kunna uttrycka sig på flera sätt är ett tecken på god begreppsförmåga. Den som kan använda flera olika sätt att beskriva samma begrepp har en rikare begreppsbild och därmed en mer funktionell begreppskunskap. För att få stöd i sin begreppsutveckling behöver eleverna ges möjlighet att möta ett och samma matematiska begrepp i flera olika representationer med hjälp av flera olika

uttrycksformer. När elever aktivt engageras i att uppfatta sambanden mellan olika representationer stärks den matematiska förståelsen. Begreppet blir därigenom mer tillgängligt för reflektion och eleverna kan lättare strukturera sitt tänkande.

Specifika matematiska uttrycksformer

Vissa symboliska representationsformer är speciellt utvecklade för matematiken och kan därför kallas för matematiska uttrycksformer. Dessa används inom matematiken men också i matematikens tillämpningar i andra ämnen. Matematiska representationsformer som tillhör grundskolans matematik är:

- siffror och positionssystemet
- aritmetiska symbolsystem – hur vi skriver beräkningar
- algebraiska symbolsystem – hur vi skriver algebraiska uttryck och ekvationer
- tabeller
- tallinjer och koordinatsystem
- grafer och diagram.

Att välja representationer

Elever behöver utveckla sin förmåga att översätta och välja mellan olika representationer. Det innebär att ha förståelse för representationernas inbördes förhållande, att ha kännedom om deras styrkor och svagheter samt att kunna välja lämplig uttrycksform beroende på situation och syfte.

Det är inte givet att eleven på egen hand kan översätta mellan olika uttrycksformer som till exempel mellan laborativa aktiviteter och matematiska symboler. När konkret material används för att representera matematiska objekt är det en förutsättning att eleverna ser det som en **modell av** matematik för att det ska kunna fungera som en **modell för** vidare abstrakt tänkande. Den ungerske matematikern Zoltan Dienes (1916–2014) utvecklade ett konkret material där tal i tiobassystemet representeras av centikuber som kombineras i stavar om 10, plattor om 100 och block om 1 000. Dienes (1969) beskrev den abstrakta förståelse som kan utvecklas genom laborativt arbete med detta material. Problemet med materialet är att eleverna inte automatiskt ser matematiken i det, materialet är inte en modell av tal för dem utan enbart kuber, stavar och plattor. Forskning har visat att det kan vara svårt för eleverna att förstå sambandet mellan abstrakta och konkreta representationer, och en ännu större utmaning när även digitala representationer av de konkreta föremålen används (Lesh et al., 1987). Därför vilar ett stort ansvar på läraren att först försäkra sig om att en vald representation fungerar som modell av den matematik som ska representeras innan den används som modell för abstrakt tänkandet.

Genom att se på vilka sätt som eleven representerar ett aktuellt begrepp kan läraren få värdefull inblick i elevens tänkande. Detta ger stöd för läraren att bygga broar mellan elevens informella och matematikens formella representationer.

Referenser

- Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Harvard University Press.
- Bruner, J. S., & Kenney, H. J. (1965). Representation and mathematics learning. *Monographs of the Society for Research in Child Development*, 30(1), 50–59.
- Dienes, Z. P. (1969). *Building up mathematics*. Hutchinson Educational.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, 61(1), 103–131.
<https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- Goldin, G. & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. I A. A. Cuoco & F. R. Curcio (red.), *The roles of representations in school mathematics* (1–23). National Council of Teachers of Mathematics.
- Gustafsson, I-M., Jakobsson, M., Jönsson, P., Lingefjärd, T., Nilsson, I. Svingby, G., & Zippetr, M. (2011). Matematiska uttrycksformer och representationer. *Nämnamn* 2011(3), 36–45.
- Heddens, J. (1986). Bridging the gap between the concrete and the abstract. *The Arithmetic Teacher*, 33(6), 14–17.
- Kilhamn, C. (2018). Laborativ matematikundervisning. I O. Helenius & M. Johansson (red) *Att blir lärare i matematik*. (s. 85–107). Liber.
- Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Dienes revisited: multiple embodiments in computer environments. I I. Wirsup & R. Streit (red), *Developments in school mathematics education around the world*, (s. 647–680). National Council of Teachers of Mathematics.
- Moyer-Packenham, P. S., Salkind, G., & Bolyard, J. J. (2008). Virtual manipulatives used by K–8 teachers for mathematical instruction: considering mathematical, cognitive, and pedagogical fidelity. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, 8(3), 202–218.