Skolverket

Problemlösning med tal i bråkform

Ulrica Dahlberg, NCM

Den här texten ger exempel på problem som behandlar taluppfattning och då främst tal i bråkform. Många, men långt ifrån alla, matematikproblem innehåller också text. Textproblem kan uppfattas som svåra, speciellt om det är mycket information att hantera. Eleverna behöver därför få undervisning om hur texten ska läsas och hur de kan angripa problemet. Arbeta först gemensamt med texterna.

- Läs problemet tillsammans och hjälp eleverna att sätta sig in i det, exempelvis med stödjande frågor.
- Strukturera informationen i texten tillsammans med eleverna – vad är viktig information?
- Gå också igenom eventuella oklarheter beträffande ord och meningsbyggnad, till exempel subtila men viktiga skillnader i språk när det gäller ord som exempelvis tal – antal, fler – flest, antal – andel, tal – siffra – nummer.

Att förstå vad problemet handlar om är en förutsättning för att kunna lösa det. Men att förstå vad det handlar om och vad som efterfrågas är inte detsamma som att ”veta vad man ska göra”. Problemlösning handlar om att gå från att förstå situationen till att komma på hur man ska komma fram till svaret på den formulerade frågan.

I problemlösning spelar resonemang och argumentation en stor roll. Hjälp eleverna att göra resonemangen tydliga och visa gärna hur du själv resonerar som komplement. För att kunna utveckla sitt resonemang behöver en elev ges möjlighet att följa och förstå mer utvecklade resonemang. De problem som tas upp i den här texten passar bra att använda för sådana ”exempellösningar” och ger en viss överblick över vilka olika typer av problem som kan bidra till att elever utvecklar sin taluppfattning.

Problem som rör taluppfattning

Några av följande problem är hämtade från den internationella kängurutävlingen och är av det skälet formulerade som flervalsproblem. I många fall kan svarsalternativen tas bort, men då kan också problemet delvis ändra karaktär. När svarsalternativ finns med blir uteslutningsmetoden en given strategi och eleverna kan hamna i att testa ett svar i taget för att se om det stämmer. Bestäm i de fall alternativen inte behövs för själva lösningen om de ska vara med eller inte. Till varje problem finns förslag på hur det går att arbeta vidare med det.

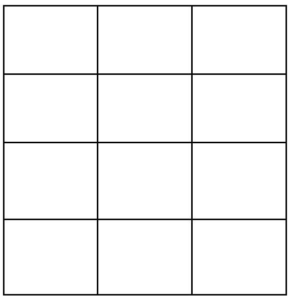
Bråk som del av helhet

När elever möter bråk brukar det först handla om bråk som del av helhet. Utmaningen är här att variera representationen av det hela. Laborativt material är bra att ha till hands för elever när de löser problem.

> Ahmed delar en pizza i fjärdedelar. Sen delar han varje fjärdedel i tredjedelar.
> Hur stor del av hela pizzan är varje sådan del?
>
> En tredjedel En fjärdedel En sjundedel En åttondel En tolftedel

Elever behöver möta tal i bråkform i många olika sammanhang. Pizzor och tårtor är tilltalande att använda som metaforer i undervisningen. Dela pizzorna i olika antal bitar och resonera om hur man skriver bråkuttryck på olika sätt.

Eleverna behöver också se och arbeta med andra exempel. Ibland är det en fördel att lämna de runda pizzorna och tårtorna och övergå till rektanglar, exempelvis chokladkakor. För att konkretisera multiplikationer som 1/3 · 1/4 kan chokladkakemodellen användas. Gör om pizzaproblemet med bild på en chokladkaka med fyra rader och tre bitar i varje rad (fyra rader och tre kolumner). Helheten är nu en rektangel. Resonera om varför sidorna delas i just fyra respektive tre delar och varför svaret uttrycks i tolftedelar.



I en bild av en cirkel är helheten underförstådd. I problem när kontexten utgår från en annan helhet handlar det om att bli vän med bråken, det vill säga titta på bråkuttrycken, förstå sambanden och finna kloka sätt att hantera de ingående talen. Att rita upp problemet är då ofta en stor hjälp.

> En bro går vinkelrätt över en flod. Floden är 120 meter bred. En fjärdedel av bron ligger på den vänstra flodstranden och en fjärdedel av bron på ligger den högra flodstranden. Hur lång är bron?
>
> 150 m 180 m 210 m 240 m 270 m

Helheten är ett okänt antal

Att gå från att hantera problem där helheten är självklar (till exempel en tårta eller en apelsin) till att helheten är ett antal (till exempel en befolkningsmängd) är för vissa elever ett mycket stort steg. Avgörande är att eleverna förstår vilken helhet som avses.

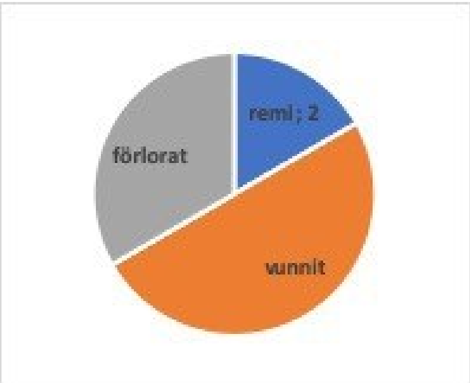
> I en schackturnering skulle Magnus spela 15 partier. En bit in i turneringen hade han vunnit hälften av de partier han spelat dittills, förlorat en tredjedel och spelat två partier som slutat oavgjort (det kallas remi i schack). Om Magnus vinner resten av sina partier, hur många har han då vunnit totalt?
>
> 6 7 8 9 10

När det står ”av de partier han spelat dittills” är helheten ett okänt antal som är mindre än 15. Låt eleverna förklara för varandra hur de tänker. Har de ord för att beskriva den okända helheten? Kan de rita den eller representera den på något annat sätt?

Ett sätt att koppla samman del av antal med del av helhet är att rita det här okända antalet som en area, och i den arean markera vad vi vet. I Figur 1 kan vi nu se att de partier som Magnus förlorat måste vara dubbelt så många som de oavgjorda. Två oavgjorda ger fyra förlorade och sex vunna. Sammantaget har han alltså spelat 12 partier och tre återstår. Uppmuntra eleverna att använda olika slags representationer och berätta för varandra hur dessa kan vara till hjälp när de löser ett problem.

Figur 1

Bild som illustrerar hur stor andel av resultat Magnus fick då han spelade schack



Helheten är en okänt mängd

Problem där helheten är okänd medför ofta att det är svårt att direkt sätta igång och räkna. Det gör att eleverna blir tvungna att resonera och försöka använda innebörden av bråk på något sätt. Lösandet underlättas ofta om man kan illustrera situationen med en bild som klargör hur problemet ser ut. Här är ett exempel:

> En flaska som är fylld till en femtedel väger 450 g. Samma flaska fylld till fyra femtedelar väger 600 g. Vad väger en tom flaska?

Problemet kan varieras genom att vikterna eller bråkdelarna ändras. Här är några andra liknande varianter:

> Sandra häller i $\frac{1}{2}$ liter vatten i en flaska. Då är flaskan fylld till två tredjedelar.
> Hur mycket vatten rymmer flaskan?
>
> En flaska är halvfull. Sandra häller i 2 dl. Då är flaskan fylld till tre fjärdedelar.
> Hur mycket rymmer flaskan?
>
> En flaska rymmer $\frac{1}{3}$ liter och den är fylld med vatten till $\frac{3}{4}$.
> Hur mycket vatten finns kvar efter att man har hällt ur 25 cl?
>
> En flaska är helt fylld med vatten. Första dagen häller Sandra ur hälften av vattnet. Andra dagen häller hon ut $\frac{1}{3}$ av det återstående vattnet och tredje dagen häller hom ut $\frac{1}{4}$av vad som är kvar.
> Hur stor del av det ursprungliga vattnet finns sedan kvar?
>
> I ett lager fullt med flaskor är $\frac{2}{3}$ fyllda med vatten och $\frac{1}{3}$ är tomma. Sandra tömmer ur vatten ur $\frac{1}{4}$ av de fulla flaskorna.
> Hur ser nu fördelningen mellan fulla och tomma flaskor ut?

Hälften och dubbelt

Att dubblera och ta hälften har elever i den här åldern oftast inga problem med. Däremot kan språkliga formuleringar med ”hälften så många” uppfattas som problematiska och svåra att hantera om helheten är okänd, som i följande exempel:

> Kalle har sparat hälften så mycket som Siv, tillsammans har de sparat ihop 474 kr.
> Hur mycket har Kalle sparat? Hur mycket har Siv sparat?

Låt eleverna själva formulera liknande problem, då ser de hur delarna förhåller sig till helheten. Variera också med andra delar, tredjedelar, fjärdedelar och så vidare, så att det blir tydligt hur relationen ser ut. Illustrera konkret och med tydliga bilder. Successiv dubblering användes i gamla algoritmer för multiplikation, till exempel i det som kallas egyptisk multiplikation och i den ryske bondens metod.

Beräkna 23 · 64

1 · 64 = 64
2 · 64 = 128
4 · 64 = 256
8 · 64 = 512
16 · 64 = 1024

eftersom 23 = 16 + 4 + 2 + 1,
så är 23 · 64 = 1024 + 256 + 128 + 64 = 1472

Låt eleverna använda denna metod för att utföra multiplikationer. Börja på 1 och dubblera successivt: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 … Den talföljden kommer eleverna att möta många gånger. Låt eleverna skriva talen som produkter av 2, och diskutera hur skrivsättet skulle kunna förenklas. Det kan vara ett lämpligt sammanhang för att introducera potensskrivning: 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6 … Inte för att eleverna nu måste kunna det, utan för att de i ett sammanhang som de är engagerad i ser användningen. Nästa gång de ser det skrivsättet kanske de känner igen det. Det är bra att få möta procedurer, konventioner och begrepp innan man måste kunna dem.

Börja på 1 och halvera successivt: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ ... Jämför dubbleringen och halveringen. Vad skulle vi få om vi adderade alla dessa delar: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ ...?

Hälften av en hundradel är lika med…

0,005 0,002 0,05 0,02 0,5

Flexibla kunskaper och strategier att tänka informellt med tal i vårt positionssystem blir allt viktigare genom den ökande användningen i samhälle och utbildning. Vad är hälften av en tiondel? Hälften av en tusendel? Hälften av en fjärdedel? Att förstå dessa språkliga uttryck och kunna representera dem på olika sätt är en hjälp för att kunna förstå symboliska uttryck som $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1000}$ och $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$. Resonera om kopplingen mellan representationerna och om sambandet mellan att multiplicera med en halv och att dividera med två.

Proportioner

Att förstå begreppet bråk innebär som ovan att ha koll på dubbelt och tre gånger så mycket, men också att få en känsla för proportioner. Ett exempel är:

> Bertil blandar en salladsdressing av olja, vinäger och vatten. Det är dubbelt så mycket olja som vinäger i dressingen och det är tre gånger så mycket olja som vatten. Vilket av följande är sant?
>
> A Det är mer vinäger än olja.
>
> B Det är mer olja än vinäger och vatten tillsammans.
>
> C Det är mer vinäger än olja och vatten tillsammans.
>
> D Det är mer vatten än vinäger och olja tillsammans.
>
> E Det är minst vinäger.

Diskutera vad uttrycken ”dubbelt så mycket som” och ”tre gånger så mycket som” innebär. Hur ska det uttryckas med symboler? Om vi har x dl vinäger och dubbelt så mycket olja kan vi skriva: mängden olja = $2x$. Det är alltså inte oljemängden som ska dubbleras. Detta är en nyckel för att förstå hur man skriver algebraiska uttryck. Gör många exempel gemensamt och låt eleverna formulera både muntligt och med symboler och genom att rita figurer. I den här typen av problem handlar det också om att se på relationen och hur många delar den totala mängden har. Om vi har dubbelt så mycket olja som vinäger är relationen 2:1 vilket innebär att det är totalt tre delar det handlar om: av tre delar är två olja och en vinäger. Problemet passar bra för att visa olika lösningsmetoder.

En **algebraisk** lösning av problemet skulle kunna utgå från mängden vatten som vi kallar x. Vi får då att mängden olja är $3x$ och mängden vinäger är $1{,}5x$. Med hjälp av dessa uttryck kan vi undersöka de olika svarsalternativen.

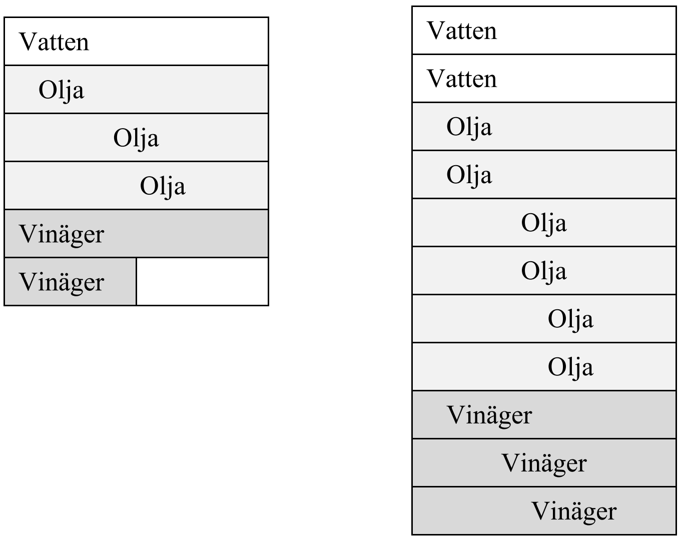
Ett språkligt **resonemang** som löser problemet skulle kunna utgå från att mängden olja ska vara både dubbelt och tre gånger så stor som något. Vi väljer ett tal som enkelt kan delas i både 2 och 3, till exempel 12. Låt oss anta att mängden olja är 12. Då får vi att mängden vinäger är 6 (hälften) och mängden vatten är 4 (en tredjedel). Utifrån dessa tal kan vi undersöka alternativen. Vi kan ersätta 12, 6 och 4 med vilka andra taltrippler som helst som har samma inbördes relation.

Ett annat resonemang utgår från relationerna som tal i bråkform: A är falskt eftersom vi vet att det är dubbelt så mycket olja som vinäger. D är falskt eftersom vi vet att det är tre gånger så mycket olja som vatten. E är falskt eftersom vi vet att det är mer vinäger än vatten. Mängden olja är dubbelt så stor som mängden vinäger, men tre gånger mängden vatten. Alltså är det minst vatten. Återstår att undersöka alternativen B och C. Är det mer olja än vatten och vinäger tillsammans eller är det mer vinäger än olja och vatten tillsammans? Alternativ B: Mängden vatten är 1/3 och mängden vinäger är 1/2 av mängden olja: 1/3 + 1/2 = 5/6. Det är alltså sant att det är mer olja än vinäger och vatten tillsammans. Alternativ C: Vi vet att det är dubbelt så mycket olja som vinäger. För att mängden olja och vatten ska bli större än mängden vinäger måste mängden vatten vara minst lika stor som mängden vinäger. Vi vet att det är mindre vatten (1/3 av mängden olja) än vinäger (1/2 av mängden olja), så C är alltså falskt.

En **lösning som utgår från en bild** kan ibland vara den allra enklaste. Vi ritar en enkel bild där vi fördelar ingredienserna. I första vändan kanske en elev testar med en del vatten och tre delar olja. Eftersom det ska vara dubbelt så mycket olja som vinäger kan det då var lättare att utgå från två delar vatten och sex delar olja, se Figur 2.

Figur 2

Två olika bilder av ingredienserna i rätt proportioner



Referens

Kängurutävlingen, http://ncm.gu.se/kanguru