

Resonemang med bråk och proportioner

Ola Helenius, NCM

Tiger got to hunt, bird got to fly;
Man got to sit and wonder, "Why, why, why?"
Tiger got to sleep, bird got to land;
Man got to tell himself he understand.
(Vonnegut, 1963)

Som Vonnegut antyder så är det djupt mänskligt att undra "varför?" och i bästa fall kan vi hitta svar på frågan så att vi upplever att vi förstår. Driften, eller normen, att förklara är extra stark i matematiken. Vi vill inte bara veta hur man gör utan också varför vi ska göra så och varför det fungerar. När matematik utvecklas, både som vetenskap och som kunskap hos individen, då är det inte bara viljan att kunna använda matematik till nya saker – att kunna lösa nya problem – som är drivkraften. Att kunna förklara det man redan kan är en lika viktig drivkraft. När man förklarar något matematiskt så använder man ofta egenskaper hos matematiska begrepp tillsammans med matematiska termer och annan matematisk symbolik.

- Varför är brunnar oftast runda?
- För att locken inte ska kunna trilla ned i brunnen.
- Men varför trillar de inte ned?
- För att en cirkel har konstant vidd.

I det här exemplet används cirkeln och det faktum att en cirkel är lika bred hur vi än mäter den (medan till exempel en kvadrat är bredare längs diagonalen) för att ge en förklaring om en önskvärd egenskap hos brunnar. I följande exempel används begreppet primtal för att förklara en fråga om plattor.

- Sex plattor kan läggas i rektangulär form på två sätt, som en rad med 1×6 eller som 2×3 . Varför kan man bara lägga sju plattor på ett sätt, som 1×7 ?
- För att 7 är ett primtal.

Rent tekniskt kan man hävda att ingenting förklarades i det andra exemplet. Vi har bara gett ett namn på de antal som har egenskapen att de inte kan läggas i andra rektangulära former än "långa rader". Men även att hitta likheter, bilda grupper, kategorisera och benämna hjälper oss att förstå.

Den matematiska förmåga som mest hör ihop med varför-frågan och viljan att förklara, är förmågan att resonera. Genom undervisning i matematik ska elever ges förutsättningar att utveckla ett antal förmågor som har med utövandet av matematik att göra. Ordet resonemang i sig beskriver egentligen inte så mycket av vad som avses. Man kan notera att det engelska verbet 'to reason' naturligtvis relaterar till substantivet 'reason' som kan betyda skäl, anledning, grund eller orsak, så ett kompletterande svenskt ord att ha i tankarna är argument och att argumentera. Det svenska substantivet 'reson' existerar men är inte vanligt i dagligt tal förutom i uttrycken rim och reson och att ta reson. Betydelsen motsvarar dock det engelska ordet 'reason'. Här kommer vi huvudsakligen att hålla oss till uttrycket föra och följa matematiska resonemang.

Resonemang med bråk

Att kunna föra och följa resonemang är antagligen det mänskliga kognitiva verktyg som i högsta grad möjliggjort utvecklingen av matematik. Den mest grundläggande aspekten av resonemangsförmågan är att förstå att all matematik är "skapad" med hjälp av matematiska resonemang och att den därför också kan "återupptäckas" genom att man resonerar sig fram. Antag till exempel att någon har glömt bort hur man beräknar $\frac{4}{\frac{1}{2}}$ eller kanske aldrig har dividerat med tal mindre än 1. Det finns då ett antal olika sätt att resonera sig fram till svaret med utgångspunkt från sådant man faktiskt kommer ihåg. Kanske minns personen att ett sätt att förstå en division, till exempel $\frac{6}{2}$ är att tänka på divisionen som "hur många 2:or det får plats i sex" (innehållsdivision). Då betyder $\frac{4}{\frac{1}{2}}$ "hur många halvor det får plats i fyra" och det är inte så svårt att komma fram till att det är 8.

Om man endast tänker på division i termer av uppdelning, som att $\frac{6}{2}$ motsvarar att dela upp sex saker i två grupper (delningsdivision), går det inte att ge $\frac{4}{\frac{1}{2}}$ konkret mening. Det går inte att dela upp fyra saker i en halv grupp. Men om man litar på att det finns någon slags mening i uttrycket och sedan vet att resultatet av en division är oförändrad om man multiplicerar både divisorn och dividenden (eller täljaren och nämnaren – termer som egentligen refererar till bråkuttryck och inte till divisionsuttryck) med samma tal, då kan man utföra detta med talet 2 och få att: $\frac{4}{\frac{1}{2}} = \frac{8}{1} = 8$.

De båda resonemangen är av olika karaktär. De förklarar på olika sätt varför svaret blir 8. Det första bygger på att själva divisionsbegreppet betraktas på ett sätt som är lämpligt för uppgiften. Det andra är ett slags algoritmiskt resonemang. Man kan argumentera för att det första resonemanget gör det uppenbart att svaret blir 8. I det andra fallet blir svaret 8 en konsekvens av att både täljare och nämnare multipliceras med 2, men det är inte uppenbart varför svaret blir 8.

Resonemang med hjälp av bilder

I formella matematiska framställningar förvissar man sig om att alla begrepp har entydiga definitioner, och man formulerar begrepps olika egenskaper i satser som man bevisar. Detta är ett mycket strikt och specifikt sätt att resonera. I skolmatematiken är det inte så enkelt, för nästan alla begrepp tar sin utgångspunkt i vardagliga företeelser eller i ikoniska bilder. En ikonisk bild har likheter med det den avbildar, till skillnad från en symbol som kan vara helt skild från det avbildade. En streckgubbe är en ikonisk bild av en människa medan ett streck skulle kunna användas som symbol för en person.

Att begreppen i skolmatematiken tar sin utgångspunkt i vardagliga företeelser, ikoniska bilder eller konkret material som man kan ha framför sig, peka på och manipulera med händerna, gör det enklare att resonera eftersom man kan använda sin vardagliga intuition. Men de kan också försvåra eftersom vardagliga situationer och ikoniska bilder inte erbjuder tillräckligt hög precision för att beskriva vad man egentligen menar, och sällan eller aldrig beskriver de generella matematiska begreppen (Vergnaud, 1982; Ahl & Helenius, 2021). Som när division blir namnet på det man gör när man delar upp saker i grupper eller när bråket $\frac{2}{3}$ blir beteckningen på en figur delad i tre lika delar med två av delarna markerade. Att till exempel introducera division som att dela upp ett antal saker i lika grupper gör att det inte går att dividera med andra tal än heltal och markerar att division gör något mindre. Det är en helt korrekt slutsats att division har dessa egenskaper, om division har introducerats som likadelning. Men dessa egenskaper kommer så småningom att vara missuppfattningar om hur division fungerar, för senare kommer vi att dividera med tal mindre än 1 och då kommer divisioner att göra kvoten större, som att division med $\frac{1}{2}$ är detsamma som en fördubbling, som vi såg i exemplet $\frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$. Detta exempel illustrerar ett skolmatematiskt dilemma: de enkla och oftast nödvändiga sätten att introducera matematiska begrepp leder till resonemang som först är rätt, men senare istället blir fel (Ahl & Helenius, 2020).

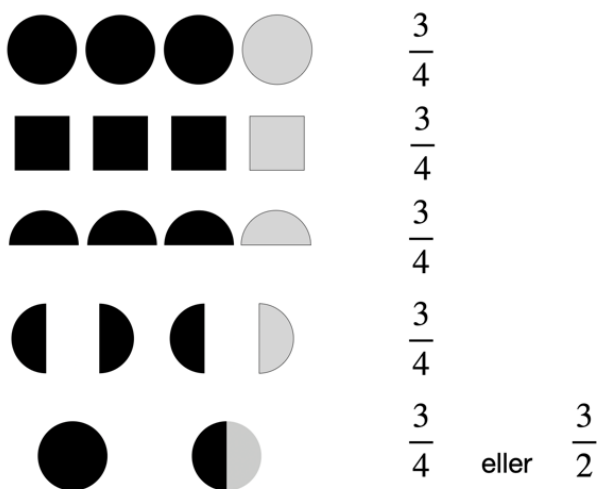
Ett liknande dilemman kan man finna när man resonerar sig fram till betydelsen av bråk genom att utgå från bilder på del av antal eller del av helhet. För det första kommer båda sätten att resonera att begränsa delarna till att vara mindre än helheten, det vill säga man stöter bara på bråk som är mindre eller lika med ett. Och när man vill utvidga dessa modeller till bråk som är större än ett uppkommer vissa oklarheter.

I Figur 1 illustrerar de tre första bildraderna uppenbart $\frac{3}{4}$. Tre av fyra föremål är markerade och det är exakt det vi betecknar med symbolen $\frac{3}{4}$ i enlighet med del av antalletolkningen. Den fjärde bildraden bör då rimligen också betecknas $\frac{3}{4}$ eftersom det är samma halvcirklar som i bildraden ovan, de har bara roterats lite. Men även den sista bildraden bör då vara $\frac{3}{4}$, för halvcirkelarna i raden ovanför är bara lite flyttade.

Samtidigt syns på den sista bildraden den typiska ikoniska representationen av 1 och $\frac{1}{2}$, det vill säga $\frac{3}{2}$, när den tolkas som del av helhet. Med den tolkningen är det en hel och en halv, alternativt tre halva som man ser.

Figur 1

Sista bildraden visar $\frac{3}{4}$ eller $\frac{3}{2}$ beroende på hur man vill tolka bilden



Så länge vi håller oss till bråk mindre eller lika med 1 finns det var sitt entydigt samband mellan del-helhetsfigurer och bråkrepresentationen respektive del-antalsfigurer och bråkrepresentationen. Men när vi vill utvidga till bråk större än ett hamnar dessa två samband i konflikt med varandra och man måste i varje fall specificera vad man menar är helheten, eller enheten som jag föredrar att säga: den figur som motsvarar 1. Även den tredje och fjärde raden kan tolkas som tre halva om den underförstådda helheten är en hel cirkel. Det är ganska vanligt i skolböcker och skolexempel att pizzor och tårtor används av just den anledningen att helheten är intuitivt underförstådd som en hel cirkel. Att inte tydligt klargöra vad helheten är skapar utrymme för osäkerhet om vilken tolkning som avses.

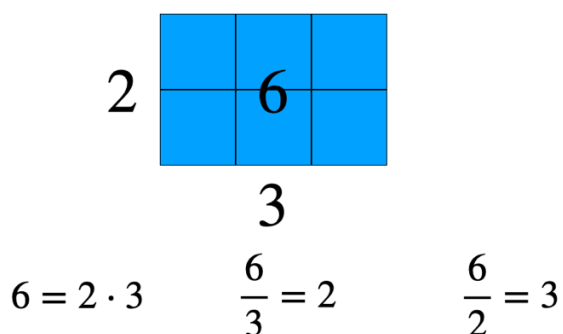
Resonemang med hjälp av symbolspråk

Ju mer avancerade resonemang man vill kunna utföra, och ju högre precision man vill ha i sina resonemang, desto viktigare blir det att kunna utföra dem med hjälp av matematiskt symbolspråk. Det är naturligt och ofrånkomligt att till en början låta reglerna för matematiska symbolsystem, som exempelvis bråksystemet, förankras i konkreta situationer och ikoniska bilder, för det är väldigt svårt att annars ge symbolerna någon mening. Men för att eleverna ska kunna gå framåt måste de också få vänja sig vid att resonera med hjälp av matematiska symboler (Ahl & Helenius, 2021; Vergnaud,

1998). Oavsett hur man har introducerat multiplikation för eleverna, är det en bra idé att illustrera multiplikation med hjälp av rektanglar (Mulligan & Mitchelmore, 1997; Park & Nunes, 2001). $6 = 2 \cdot 3$ kan då illustreras av rektangeln i Figur 2.

Figur 2

Rektangel som åskådliggör både multiplikation och division



I rektangeln kan vi också se två divisioner: det ryms 3 kolumner om 2 i sexan eller 2 rader om 3 (innehållsdivision). Alternativt kan vi se att om sexan delas i 3 grupper (kolumnerna) så blir det 2 i varje och om sexan delas i 2 grupper (raderna) så blir det 3 i varje grupp (delningsdivision). Samma rektangel som illustrerar $6 = 2 \cdot 3$ illustrerar alltså även $\frac{6}{2} = 3$ och $\frac{6}{3} = 2$. Eftersom vi inte har använt oss av några speciella egenskaper hos de ingående talen (förutom att inget av dem är noll) kan vi upprepa resonemanget med vilken multiplikation som helst. Varje multiplikation hänger på detta sätt ihop med två divisioner. Det här är ett resonemang som visserligen utgår från hur multiplikation och division kan uppfattas som konkreta situationer och i ikoniska bilder, men den slutsats vi drar är av ett helt annat slag eftersom den beskriver ett generellt samband mellan multiplikation och division. Det här kan vi använda.

Även ganska små barn är vanligen överens om att $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$, eftersom två halvor är en hel. Om vi tillämpar vårt nyvunna generella samband på denna multiplikation får vi att:

$$\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Det här är intressant ur ett perspektiv på progression av resonemang för vi har just kommit fram till en aritmetisk likhet som är förankrad i ett generellt aritmetiskt samband, och inte i en bild eller i någon konkret situation. En annan konsekvens är att:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Detta kan se trivialt ut, men det står faktiskt att ett delat på två är lika med en halv, det vill säga att vi har resonerat oss fram till ett slags bevis för hur bråk och division hänger ihop (och varför det är rimligt att vi betecknar dessa olika saker med samma symbolsystem). Återigen har vi inte visat det här med bilder utan vi har utnyttjat det generella samband vi först fick fram, se Figur 2.

Progression i matematiska resonemang handlar alltså inte bara om att resonera om allt mer avancerade matematiska begrepp eller metoder. Det finns också annan viktig progression som har att göra med på vilka grunder man baserar sina resonemang (Mason, 2018; Stylianides, 2007). Ofta sägs det att matematikundervisning bör utgå från det konkreta och gå till det abstrakta. Men det förklaras sällan vad det innebär att gå till det abstrakta. En tolkning av vad det kan betyda är den som jag har försökt att illustrera ovan.

Bråk och proportionella resonemang

Vi har så här långt beskrivit att bråksymbolsystemet, det vill säga uttryck av typen a/b kan användas för att beteckna innehållsdivision och delningsdivision, samt del av antalsförhållanden och del av helhetsförhållanden. Varför används samma symbol till dessa till synes olika saker? Det är för att de matematiskt uppför sig likadant och för att vi därför ha stor nytta av att resonera om dessa olika saker med hjälp av ett och samma symbolsystem, nämligen bråksystemet. Det finns faktiskt ännu fler saker som vi betecknar med samma symbol. Ett generellt sätt att förstå uttrycket a/b är som förhållandet mellan a och b , eller mer exakt uttryckt, det tal som man ska multiplicera b med för att få a . Man kan alltså säga att bråkformen ger oss ett sätt att generalisera resonemang av typen ”den är dubbelt så stor” eller ”den är en tredjedel så stor” och alla andra möjliga angivelser av multiplikativa storleksförhållanden. Vi kan sälla olika frågor som alltså kan sägas vara samma fråga:

Vad är förhållandet mellan a och b ?

I multiplikativ mening, hur mycket större är a än b ?

Vad behöver jag multiplicera b med för att få a ?

Vilken skalfaktor transformerar b till a ?

Om vi är bekanta med bråksystemet kan vi ange ett och samma svar på alla frågorna helt utan ansträngning: a/b .

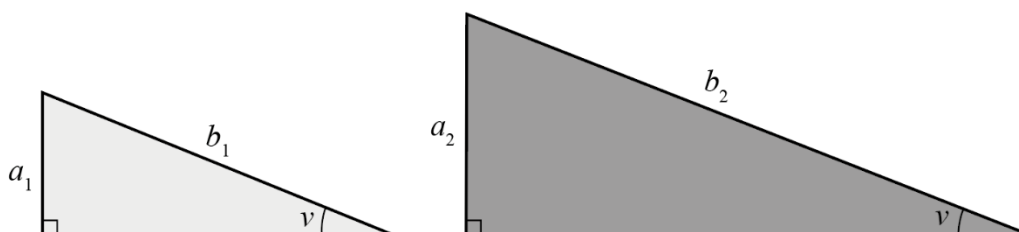
Det finns ett relaterat begrepp som behöver en utvidgad behandling: **proportionaliteter**. Strikt taget är inte proportion ett rent matematiskt fenomen. I den matematikdidaktiska litteraturen råder viss förvirring om hur man ska beskriva proportionalitet (Thompson & Saldanha, 2003). Ett sätt att beskriva en proportion är som en likhet mellan två förhållanden $a/b = c/d$ eller i funktionsformen att $y = rx$. I

den här meningen är det strikt matematiskt. Men vad är det som i någon viss situation gör att vi kan konstatera att $a/b = c/d$?

Det beror alltid på att vi betraktar en situation där det går att extrahera en uppsättning (ofta oändligt många) förhållanden men där någon restriktion i situationen gör att alla dessa förhållanden måste vara lika. Jag ska ta några exempel. De två rätvinkliga trianglarna i Figur 3 har samma vinkel v i ena hörnet.

Figur 3

Trianglar med samma vinklar



Enligt en sats från geometrin kommer de då att vara likformiga. Därmed kommer förhållandet mellan sidornas längder att vara lika och speciellt kommer $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$.

Detta är exakt ett sådant villkor som skapar en proportionalitet. Det finns en oändlig uppsättning trianglar av detta slag, det vill säga olika stora men rätvinkliga och med en vinkel v . Kvoten, eller förhållandet mellan hypotenusan och sidan som är motstående mot vinkeln v kommer alltid att vara densamma. Proportionen är densamma. Det är detta som gör att vi kan definiera en funktion sinus, $\sin(v)$, just som kvoten mellan sidorna, helt oberoende av hur stor triangeln är.

Ett annat exempel är kilopriser. Om vi handlar en vara per kilogram och inte har någon mängdrabatt eller liknande så kostar varje kilogram lika mycket. Detta villkor gör att oberoende av hur mycket vi handlar kommer alltså kvoten kostnad/köpt mängd i kilogram vara densamma. Kostnaden är proportionell mot mängden. På samma sätt kommer sträckan (s) vi rör oss vara proportionell mot tiden (t) som vi har rört oss om hastigheten är konstant. Men bara då, för konstant hastighet är precis det villkor som gör att s/t är konstant. En mycket stor mängd praktiska situationer är proportionella och kan hanteras med proportionella resonemang. Det är bland annat den rikliga förekomsten av problem som kan hanteras med proportionella resonemang som gör resonemang med bråk, och speciellt förmågan att resonera med hjälp av relationer i bråksystemet, så viktiga.

Referenser

Ahl, L. M. & Helenius, O. (2020). Polysemy and the role of representations for progress in concept knowledge. *MADIF12: the twelfth research seminar of the Swedish Society for Research in Mathematics Education*, Växjö, January 14–15, 2020.

Ahl, L. M., & Helenius, O. (2021). A framework for analyzing progress in concept knowledge in mathematics textbooks. I G. A. Nortvedt, N. A. Buchholtz, J. Fauskanger, F. Hreinsdóttir, M. Häikiöniemi, B. E. Jessen, J. Kurvits, Y. Liljekvist, M. Misfeldt, M. Naalsund, H. K. Nilsen, G. Pálsdóttir, P. Portaankorva-Koivisto, J. Radišić, & A. Wernberg (Red.), *Bringing Nordic mathematics education into the future. Proceedings of Norma 20. The ninth Nordic Conference on Mathematics Education Oslo, 2021* (s. 1–8). SMDF.

Mason, J. (2018). How early is too early for thinking algebraically? I C. Kieran (Red.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5-to 12-year-olds* (s. 329–350). Springer.

Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(3), 309–330. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.28.3.0309>

Park, J.-H., & Nunes, T. (2001). The development of the concept of multiplication. *Cognitive Development*, 16(3), 763–773. [https://doi.org/10.1016/S0885-2014\(01\)00058-2](https://doi.org/10.1016/S0885-2014(01)00058-2)

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 289–321. <https://doi.org/10.2307/30034869>

Thompson, P. W., & Saldanha, L. A. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. I J. Kilpatrick, G. Martin, & D. Schifter (Red.), *Research Companion to the Principles and Standards for School Mathematics*, (s. 95–113). NCTM

Vergnaud, G. (1982). Cognitive and developmental psychology and research in mathematics education: some theoretical and methodological issues. *For the Learning of Mathematics*, 3(2), 31–41.

Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 167–181. [https://doi.org/10.1016/S0364-0213\(99\)80057-3](https://doi.org/10.1016/S0364-0213(99)80057-3)

Vonnegut, K. (1963). *Cat's cradle*. Holt, Rinehart and Winston.