Skolverket

Taluppfattning och tals användning, åk 4–6

Välkommen till en modul som beskriver och problematiserar undervisning om taluppfattning i årskurs 4–6 med fokus på tal i bråkform. Syftet med modulen är att ge en djupare förståelse av elever utveckling av taluppfattning och nya insikter i hur undervisningen kan planeras, genomföras och följas upp.

Målet är att ni efter genomgången modul har fått en ökad innehållslig och didaktisk kompetens, och därigenom känner er stärkta i er roll som matematiklärare.

Varje del har ett uttalat didaktiskt perspektiv som exempelvis att bli medveten om elevers uppfattningar, att leda talkörer som inledning till matematiska samtal eller att skapa förutsättningar för matematiska resonemang. Undervisning diskuteras i relation till laborativt arbetssätt, social normer och problemlösning.

I denna revidering har det matematiska innehållet lyfts fram mer än tidigare. Taluppfattning och tals användning handlar om tal och räkneoperationer, vilket brukar benämnas aritmetik. I motsvarande modul för F–3 behandlas heltal, här behandlas samma matematiska innehåll i ett utvidgat talområde. I varje del i modulen finns en text som går lite djupare in på någon aspekt av aritmetiken som exempelvis olikheter, additiva och multiplikativa strukturer och koppling mellan bråk och decimaltal.

I varje del finns förslag på aktiviteter. Det finns en progression mellan de tre talmodulerna vilket innebär att i varje del behandlas ett likartat innehåll som i motsvarande del i F–3 och 7–9. Det möjliggör kollegiala samtal över stadierna om samma matematiska och didaktiska innehåll.

Modulen består av följande delar:

1. Heltal och bråk
2. Talsystem och talkörer
3. Likhet – olikhet
4. Additiva strukturer
5. Representationer av tal
6. Multiplikativa strukturer
7. Problemlösning med bråk
8. Resonemang med bråk

Modulen är reviderad av NCM, Göteborgs universitet.

Del 2. Talsystem och talkörer

Denna del handlar om kopplingen mellan tal i bråk- och decimalform. Det didaktiska innehållet fokuserar på talkörer och räknerundor som underlag för matematiska samtal i klassrummet. I aktiviteten genomförs en talkör som tränar huvudräkning och som används som underlag för samtal om talföljder.

Syftet med den här delen är att skapa reflektion kring gamla och nya sätt att arbeta med tal för att stärka förståelsen av tal och talsystem.

Del 2: Moment A – individuell förberedelse

Läs

De båda texterna ”Bråk som tal och tal i decimalform” och ”Talkörer och räknerundor” tar upp olika aspekter av rationella tal och strukturer i talföljder. Titta igenom ”Talkör – en huvudräkningsaktivitet”.

Reflektera

Jämför innehållet i texterna med de läromedel som du brukar använda.

- Är det något som skiljer sig åt? Vad i så fall?

Fundera över fördelar med att använda talkörer och räknerundor.

- Vilka erfarenheter har du och dina elever av det?
- Är de normer som råder i ditt klassrum förenliga med ett sådant arbetssätt? Vad skulle eventuellt behöva förändras?

Material

PDF **Bråk som tal och tal i decimalform**
Wiggo Kilborn

PDF **Talkörer och räknerundor**
Cecilia Kilhamn

PDF **Talkör – en huvudräkningsaktivitet**
Cecilia Kilhamn

Bråk som tal och tal i decimalform

Wiggo Kilborn

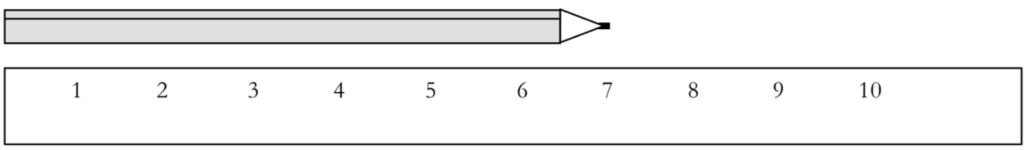
Som grund för följande text förutsätts att klassen har arbetat med två av bråkets ”ansikten” nämligen del av en hel och del av ett antal. Det är något helt annat än bråket som ett tal. Som exempel bör ett bråk som $\frac{2}{3}$ i sammanhanget $\frac{2}{3}$ av 12 inte betraktas som ett tal utan som en andel. Det tal som avses är ju 8. Observera att $\frac{2}{3}$ i sammanhanget $\frac{2}{3}$ av 15 = 10 svarar mot ett större tal än $\frac{2}{3}$ av 12. Den här skillnaden mellan tal och andel blir inte minst viktig i samband med begreppet procent. När elever lär sig att (andelen) 20 % är lika med talet 0,2 så kan det leda till stor förvirring eftersom 20 % av 10 = 2 och 20 % av 100 = 20, vilket är något helt annat än 0,2 (Karlsson & Kilborn, 2015). Detta har, liksom ”bråkets olika ansikten” retts ut av framstående didaktiska forskare i boken ”Number concepts and operations in the middle grades” (Hiebert & Behr, 1988).

Bråk som tal

Ett bråk kan således tolkas på flera sätt, inte bara som en andel utan även som ett tal. Det här kan konkretiseras genom jämförelse med längdmätning. Om man delar en decimeter i tio lika stora delar så får man $\frac{1}{10}$ decimeter, alltså en centimeter. När man ska mäta en pennas längd med hjälp av en linjal avläser man att pennan i Figur 1 är 7 centimeter lång. Innebörden av detta är att pennan är lika lång som 7 enheter av storleken 1 centimeter. Detta kan även uttryckas som att pennan är $7 \cdot \frac{1}{10}$ decimeter lång.

Figur 1

Att mäta en pennas längd

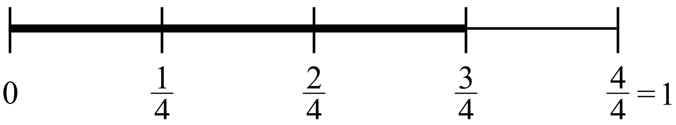


Längdmätning kan på det här sättet användas som metafor för bråk som tal. Elever som behärskar idén för hur man mäter en sträcka i centimeter, kan på motsvarande sätt dela sträckan [0, 1] på tallinjen i fyra lika stora delar (Figur 2). Vi får då fyra fjärdedelar av sträckan. I ändpunkten av den tredje fjärdedelen, finner man punkten $\frac{3}{4}$ av intervallet

[0, 1]. Precis som på linjalen beskriver punkten (talet) $\frac{3}{4}$ att 3 fjärdedelar av sträckan [0, 1] ligger till vänster om punkten.

Figur 2

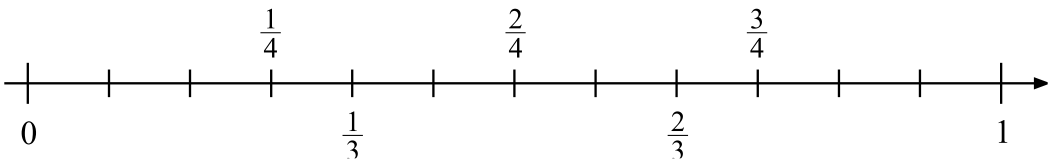
Dela en sträcka i fyra delar



Eftersom varje tal i bråkform mellan 0 och 1 kan beskrivas på det här sättet på tallinjen, kan vi knyta samman begreppen bråk som en del av en helhet med bråk som tal, och på tallinjen se att $\frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5}$ och att $\frac{2}{3} > \frac{2}{4} > \frac{2}{5}$. Genom att istället dela in sträckan [0, 1] i 12 delar kan vi också, direkt på tallinjen avgöra att $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$ (Figur 3).

Figur 3

Att avgöra storlek på bråk på tallinjen



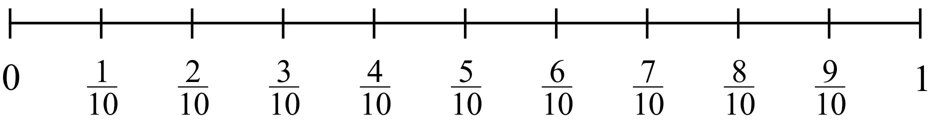
Då ett naturligt tal och ett tal i bråkform kan adderas, exempelvis $3 + \frac{1}{4}$ och $7 + \frac{3}{4}$, följer att alla positiva tal i bråkform har en plats på tallinjen. Detta kan senare generaliseras till att även gälla de negativa rationella talen.

Tal i decimalform

Enkla tal i decimalform kan introduceras på samma sätt som beskrivits ovan, i det här fallet genom att vi delar en sträcka, till exempel sträckan [0, 1] på tallinjen i tio lika stora delar (Figur 4).

Figur 4

Dela en sträcka i tio delar



Eftersom sträckan har delats i tio delar kallas den första delningspunkten för en tiondel. En tiondel av sträckan finns till vänster om den punkten. Den sjunde punkten kallas på motsvarande sätt för 7 tiondelar eftersom den delar upp sträckan mellan 0 och 1 så att 7 tiondelar ligger till vänster om den punkten. Detta är återigen precis som när vi mäter med en linjal. Till vänster om markeringen 7 på linjalen i Figur 4 finner vi sträckan 7 centimeter, alltså 7 längdenheter. Vi kan efter detta införa beteckningen 0,7 för 7 tiondelar, men bör vara noga med att läsa detta som ”sju tiondelar” och inte som ”noll komma sju”. Man undviker därmed att elever gör det fatala felet att $\frac{1}{4}$ av 0,16 = 0,4. Eftersom 16/4 = 4 ligger det nära till hands att noll komma 16 dividerat med 4 är noll komma fyra (Karlsson, 2015). Detta belyser språkets och terminologins viktiga roll i matematikundervisningen.

Om man istället delar in sträckan [0, 1] i hundra delar kommer den tjugofemte delningspunkten att vara 0,25, vilket bör utläsas 25 hundradelar. Om man istället hade delat intervallet [2, 3] i hundra delar så hade den tjugofemte markeringen svarat mot 2,25, alltså 2 hela och 25 hundradelar.

Bråk skrivna som tal i decimalform

Vissa tal i bråkform kan skrivas som ändliga decimalutvecklingar, nämligen de tal vars nämnare bara innehåller faktorerna 2 och/eller 5. Talet $\frac{1}{2}$ kan skrivas som 0,5 och talet $\frac{2}{5}$ som 0,4. Detta kan i sin tur kopplas till kvoten av divisionerna 1/2 och 2/5. Var samtidigt noga med att skilja mellan bråket (talet) och divisionen 2/5, där bråket är kvoten till divisionen. Bråket är ett tal medan divisionen är en operation.

I det här sammanhanget bör positionssystemet för tal i decimalform behandlas. Alla rationella tal (tal i bråkform) kan uttryckas i decimalform och har en plats på tallinjen. När vi utläser tal i decimalform är det viktigt att vi gör det på ett sätt som speglar talets innebörd. Tal som 3,25 bör läsas 3 hela och 25 hundradelar. De bör även kunna tecknas som $3\frac{25}{100}$ eller ännu hellre som $3 + \frac{25}{100}$. Elever bör även lära sig att skriva 3 + 0,25 som 3 + 0,2 + 0,05 och som $3 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100}$ för att se kontinuiteten i vårt positionssystem med basen 10. Det är viktigt att alla elever behärskar dessa olika uttryckssätt. Det visar sig nämligen att många elever, ännu i årskurs 7–9, tror att 0,10 > 0,9 beroende på att de läser talen som noll komma tio och noll komma nio, och de vet att 10 > 9.

Eleverna bör även få lära sig att de rationella talen ligger obegränsat tätt på tallinjen. Mellan två rationella tal finns det alltid oändligt många andra rationella tal. Mellan talen 0,25 och 0,26 finns till exempel 0,255; 0,2555; 0,25555; 0,255555 och så vidare. Resultat på utvärderingar som utförts med hjälp av Diamantdiagnoserna visar att många elever tror att det inte finns något tal mellan 0,4 och 0,5 på tallinjen (Löwing & Kilborn, 2009). En terminologisk kommentar i det här sammanhanget är att det tecken som skiljer heltalsdelen i 2,75 från bråkdelen kallas for decimaltecken (Kiselman & Mouwitz, 2008). Lägg märke till att decimaltecknet i en rad andra länder, liksom på miniräknare och i viss programvara är en punkt, inte ett ”decimalkomma”. I engelskspråkig litteratur används kommatecknet för att avskilja tusental. Talet 4 500 skrivs således 4,500. Man bör göra eleverna uppmärksamma på detta, inte minst med tanke på undervisningen i andra ämnen.

För att avgöra vilket av två tal i decimalform som är störst – till exempel 3,547 och 3,539 – börjar vi med att jämföra entalen. De är lika stora. Därefter jämför vi tiondelarna. De är också lika stora. I nästa steg jämför vi hundradelarna. Eftersom 4 hundradelar är större än 3 hundradelar så är talet 3,547 störst, oberoende av tusendelen.

Tal i decimalform och positionssystemet

När vi beskriver ett naturligt tal som 3987 menar vi $3\cdot 1000 + 9\cdot 100 + 8\cdot 10 + 7$, vilket är principen för vårt talsystem, som är ett positionssystem med basen 10. Analogt med detta har ett tal som 7,534 innebörden $7 + \frac{5}{10} + \frac{3}{100} + \frac{4}{1000}$.

Ännu tydligare blir detta om vi använder potensform och skriver 3987,534 som $3\cdot 10^3 + 9\cdot 10^2 + 8\cdot 10 + 7 + 5\cdot 10^{-1} + 3\cdot 10^{-2} + 4\cdot 10^{-3}$.

För att i grunden förstå de stora fördelarna med vårt talsystem kan det vara lämpligt att jämföra det med andra talsystem och anknyta till matematikens historia. Eftersom elever oftast lär sig talens namn procedurellt så funderar de sällan över hur talsystemet faktiskt är uppbyggt. Genom att jämföra vårt talsystem med det romerska talsystemet kan de upptäcka poängen med ett positionssystem.

De romerska siffrorna är I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500 och M = 1 000. I det romerska talsystemet kan man inte skriva 555 som VVV eftersom det skulle betyda 5 + 5 + 5. På motsvarande sätt betyder talet CLX 100 + 50 + 10. En romersk siffras värde är alltid detsamma oberoende av siffrans plats i talet.

På latin heter 29 ”trettio minus ett”. I stället för att skriva 29 som XXVIIII blev det därför naturligt att skriva 29 som XXIX. Det innebär, att när ett mindre tal står före ett större tal, så ska det ske en subtraktion. IX betyder alltså 10 – 1 och XXIX betyder 10 + 10 + 10 – 1. Det här skapade stora problem när man skulle operera med romerska siffror. Låt gärna eleverna pröva detta genom att utföra additioner som MCCIX + LXXIV och multiplikationer som IX · XXIV.

När de hinduarabiska siffrorna och ett talsystem med basen 10 introducerades i Europa i början av 1200-talet innebar det en revolution för räknekonsten. Genom att siffrornas värde beror på dess position i talet kunde man bygga upp mycket effektiva algoritmer för de fyra räknesätten. Låt eleverna uppleva detta genom att på nytt utföra operationerna 1209 + 74 respektive 9 · 24. I samband med detta kan de även ges möjligheter att reflektera över räknelagarnas betydelse för att algoritmerna ska fungera.

Referenser

Hiebert, J., & Behr, M. (Red.). (1988). *Number concepts and operations in the middle grades.* The National Council of Teachers of Mathematics.

Karlsson, N. (2015). *Matematik i lärarutbildningen: studenters kunskaper i och uppfattningar om matematik. En forskningsrapport från MIL- och SKUM-projekten.* Södertörns högskola.

Karlsson, N., & Kilborn, W. (2015). *Matematikdidaktik i praktiken.* Gleerups.

Kilborn, W. (2014). *Tal i bråkform – en röd tråd*. NCM, Göteborgs universitet.

Kiselman, C., & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan.* NCM, Göteborgs universitet.

Löwing, M., & Kilborn, W. (2009). *Att våga se – och kunna ta ansvar. En utvärdering av elevers kunskaper i matematik i Uppsala kommun.* Uppsala kommun.

Matematik – Grundskola åk 4–6
Modul: Taluppfattning och tals användning
Del 2: Talsystem och talkörer

Talkörer och räknerundor

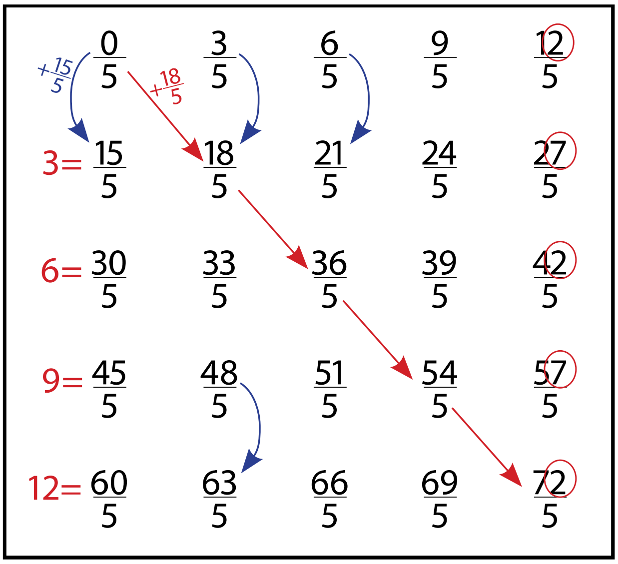
Cecilia Kilhamn, NCM

> Eleverna i sexan sitter vända mot tavlan och räknar tillsammans i talkör. De startar på 0 och räknar upp med $\frac{3}{5}$. Läraren håller jämn takt och skriver upp talen allteftersom de sägs så att fem kolumner skapas. När de kommit till $\frac{72}{5}$ avslutas räkningen och läraren säger: ”Titta på talen. Vad kan du se? Vad finns där för mönster?”

Situationen är hämtad från en artikel som beskriver hur läraren Ms Tuh arbetar med talkörer (McMillan & Sagun, 2020). Ms Tuh har gjort det till en rutin att börja matematiklektionen med en talkör där eleverna får möjlighet att öva sig i huvudräkning genom att säga och lyssna in en talföljd som hänger ihop enligt ett logiskt mönster, se Figur 1. En räknerutin stärker elevens självförtroende genom att skapa igenkänning och utvecklar elevens huvudräkningsförmåga. En gemensam talkör är dessutom inkluderande genom att alla är med och aktiva hela tiden, och även den som känner sig lite osäker kan delta (Franke m.fl., 2018; Shumway, 2011).

Figur 1

Addition av 3/5. Så här kan det se ut på tavlan när Ms Tuh fångar upp och diskuterar de mönster och samband eleverna upptäcker i talföljden som bildas.



Den stora vinsten med att arbeta med talkörer som Ms Tuh gör är att eleverna blir delaktiga i att skapa underlag för matematiska samtal om viktiga och kraftfulla idéer. När eleven uttalar alla talen i rätt ordning blir talföljden en del av det egna matematiska registret. Eleverna blir vana vid talen. Genom det sätt läraren bokför talföljden kan olika mönster och samband framträda som eleverna ges möjlighet att upptäcka och diskutera.

För Ms Tuh är talkören en rutin som återkommer minst en gång i veckan. Varje lektion börjar med någon form av räknerutin som eleverna känner igen sig i, ofta en talkör. Ju längre in på terminen de kommer desto mer aktiva blir eleverna i talkören och desto djupare kommer de i sina matematiska analyser av de talföljder de arbetar med. Tack vare att aktiviteten görs till en rutin kan eleverna slappna av och flytta fokus från själva aktiviteten till dess matematiska innehåll.

Matematiska samtal

När Ms Tuh i det inledande exemplet ställt frågan ”Vad kan du se?” till sina elever låter hon dem först tänka tyst en kort stund och sedan prata parvis någon minut medan hon går runt och lyssnar in. Därefter samlar hon allas uppmärksamhet och lyfter elevernas olika iakttagelser samtidigt som hon gör anteckningar på den uppskrivna talföljden, se Figur 1. Hennes eleverna lade märke till följande mönster och matematiska idéer:

- Täljaren är hela tiden udda–jämn–udda–jämn …
- Entalssiffran i täljaren är varannan när man tittar ner i kolumnerna.
  2–7–2–7–2 i sista kolumnen, 0–5–0–5–0 i första kolumnen.
- Alla tal i första kolumnen blir heltal $(\frac{15}{5} = 3)$, $(\frac{30}{5} = 6)$.

Additiva och multiplikativa idéer:

- Om man tittar diagonalt är det en addition med $\frac{18}{5}$ hela tiden.
- Om man tittar lodrätt är det en addition med $\frac{15}{5}$ hela tiden.
- Täljaren är alltid en multipel av 3.
- 5 stycken $\frac{3}{5}$ är samma som 3 $(5 \cdot \frac{3}{5} = 3)$.

I samtalet är det viktigt att sträva efter att alla elevernas idéer tas på allvar och följs upp med frågor som: Är den någon annan som har sett samma sak? Stämmer det? Stämmer det alltid? Hur kan vi veta att det alltid stämmer? Varför är det så?

Att komma igång med talkörer

Det är viktigt att säkerställa att alla elever förstår vad det är för talföljd som ska räknas fram. Ett bra sätt kan vara att skriva upp de tre första talen i följden och be eleverna fundera tyst på vilket nästa tal kommer att vara. När alla elever visar tummen upp börjar ni läsa talkören från början. Hitta en lagom rytm som fungerar för eleverna samtidigt som den går att skriva. Var noga med att alla elever håller takten så att ingen rusar iväg. Takten ska kännas i kroppen. Om eleverna inte hinner med kan det vara bra att stanna upp en stund och be dem tänka framåt. Vilket tal är nästa? Och nästa efter det? En möjlighet är också att stanna upp och be eleverna dela med sig av räknestrategier, berätta för varandra hur de tänker för att snabbt få fram nästa tal i följden. Ta sedan upp talkören igen med start ett par tal före avbrottet.

Representera talföljden

Ibland kan eleverna behöva visuell hjälp i räknandet, exempelvis en tallinje eller en hundraruta. Sätt då upp eller rita den väl synligt på tavlan så att eleverna kan titta på den och samtidigt se talföljden som skrivs. Det viktigaste visuella stödet är dock den struktur som bildas allteftersom talföljden växer fram. Skrivs alla tal i en lång rad efter eller under varandra är det svårt att upptäcka mönster och se strukturer. Istället ska talen skrivas så att det bildas rader och kolumner med brytpunkter på väl valda ställen. Ms Tuh valde till exempel att skriva fem tal på varje rad eftersom hon arbetade med femtedelar. Tänk noga igenom och skriv ner hur talföljden ska bokföras för att skapa ett bra underlag för samtal. Olika sätt att skriva upp talen gör att olika mönster framträder. I Tabell 1 finns flera exempel på hur tal i en talföljd kan struktureras.

Om talföljden skrivs på tavlan kommer den snart att suddas bort. Ofta gör det ingenting, men ibland kan det vara bra att spara talföljden för att kunna jämföra den med en annan talföljd. Man kan titta på likheter och skillnader och dra mer generella slutsatser. Ett förslag är därför att arbeta på blädderblock, eller på en interaktiv skrivtavla där det färdiga dokumentet kan sparas för att senare plockas fram igen. Vill man slippa skriva under tiden går det att förbereda talföljden så att talen klickas fram i tur och ordning, men hela talföljden ska inte synas från början eftersom tanken är att eleverna ska räkna fram nästa tal i huvudet, inte att de ska läsa upp talen. Elever som behöver extra stöd kan förberedas genom att få titta på talföljden i förväg, och kanske läsa den högt tillsammans med specialläraren eller en kamrat.

Ta vara på elevernas tankar

Förbered talkören noga genom att tänka igenom vilka matematiska idéer du vill ska komma fram och vad du tror att eleverna kommer att lägga märke till. Lyssna in elevernas samtal och ta deras tankar på allvar. Undvik att tala om för eleverna vad de ska se utan låt dem göra upptäckter. Din roll som lärare är att lyssna och hjälpa eleverna att representera sina idéer på tavlan så att de blir tillgängliga för alla, och att leda och orkestrera samtalet. Ta eleverna till hjälp för att granska alla idéer kritiskt och konstruktivt utan att vara kritisk mot den som kom med idén. Att vara matematiker är att tänka kreativt. För varje god idé finns det en lång rad idéer som inte är utvecklingsbara och som aldrig kommer längre än till första granskningen, men dessa idéer är också viktiga. Man behöver kunna lägga dem bakom sig, annars kommer man inte framåt. Thomas Edison lär ha sagt ”Jag har aldrig misslyckats, jag har bara hittat 10 000 sätt som inte fungerar”. Det är ett bra motto att ha i matematikklassrummet.

Räknerundor

En annan räknerutin som kan användas som variation till en talkör är en räknerunda (Kilhamn & Frisk, 2016; Shumway, 2011). En räknerunda skapar också en talföljd som kan utgöra underlag för matematiska samtal. Skillnaden är att här sitter eleverna i ring och säger ett tal var i tur och ordning. Situationen blir mer utsatt än i en talkör och kräver därför att eleverna redan är trygga och att alla har förutsättningar att klara av uppgiften. Å andra sidan kan varje elev få så mycket tid att tänka som han/hon behöver, vilket kan kännas mindre stressande än i en talkör. I en räknerunda finns det en risk att en elev tappar koncentrationen och inte följer med i räkningen om det blir en lång väntan på att få säga sitt tal. Därför fungerar en räknerunda ofta bäst i mindre grupper och när alla uppmanas att hela tiden räkna tyst för att följa med och vara beredda på sin tur. En fördel med räknerundan är att läraren kan ställa frågor som förbereder eleverna och uppmuntrar dem att utveckla sina huvudräkningsstrategier. När eleverna sedan räknar skapar de sitt eget facit. På så sätt är räknandet hela tiden något eleverna själva har kontroll över. De kan själva värdera eller förkasta en strategi. För att utveckla huvudräkningsstrategier kan frågor ställas i början av eller mitt i en räknerunda. De kan anpassas efter olika elevers förutsättningar och behov. Olika strategier och överslagsräkning bör uppmuntras, till exempel genom att fråga om någon har ett sätt att tänka utan att faktiskt genomföra räkningen. Exempel på frågor:

- Om vi börjar på Sara och räknar fram till Elias, vilket tal kommer Elias att säga då? Hur kan vi veta det utan att räkna?
- Om vi räknar runt hela cirkeln, vilket tal kommer vi att hamna på då? Om vi går runt tre varv vilket tal kommer vi att hamna på då? Hur kan vi veta det utan att räkna?
- Gör ett snabbt överslag och säg vilket tal du tror att du kommer att få säga? Varför tror du att det blir det talet?
- Hur visste du vilket tal du skulle säga?
- Jag märkte att du tog lite tid på dig innan du sa talet den här gången, hur gjorde du för att komma på vilket tal det skulle vara?

Talkörer i alla årskurser

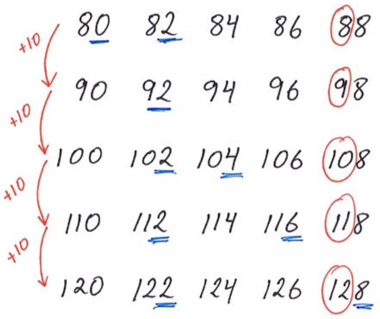
Alistair McIntosh (2020) argumenterar i boken ”Förstå och använda tal” för att talkörer bör användas i skolans alla årskurser. Att säga, höra och känna rytmen i kroppen bidrar till att stärka elevens känsla för mönster och strukturer i talsystemet. Det skapar också säkerhet och flyt i räknandet som innebär att arbetsminnet avlastas. I de tidiga åren kan talkörerna handla om räkning med hela tal, först räkneramsan uppåt, sedan i 2-steg, 5-steg, 10-steg och så vidare, uppåt och neråt och från olika startpunkter. Att räkna i 5-steg från 0 eller från 74 ger ganska olika talföljder och kan skapa olika insikter. Och att räkna ner i 5-steg från 372 kan både vara utmanande och ge nya insikter. För en klass som inte redan har etablerat en rutin kring talkörer är det bra att börja med enkla talföljder även i senare årskurser. När väl eleverna är bekväma med rutinen går det att utöka talområdet till stora tal, bråk, decimaltal och negativa tal. McMillan och Sagun beskriver även talkörer med algebraiska uttryck, exempelvis upprepad addition av $4x$ eller $3x^2$. De additiva talföljderna kan också kompletteras med multiplikativa talföljder såsom återkommande dubblering eller halvering.

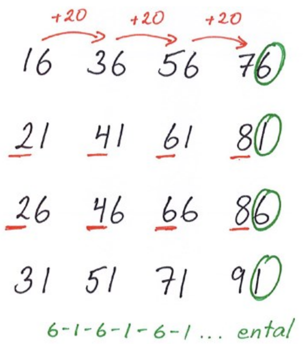
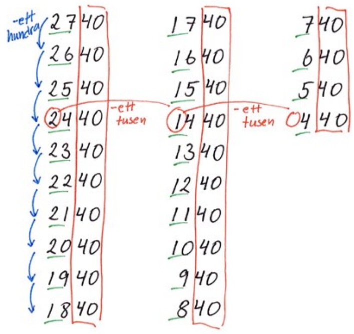
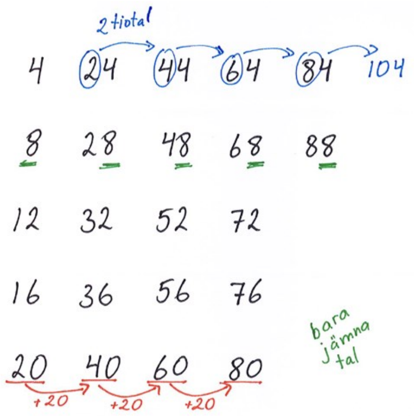
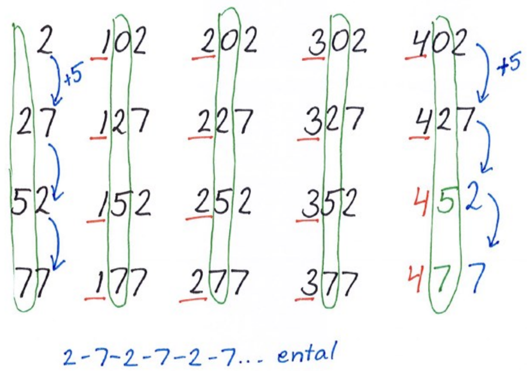
Exempel på talföljder

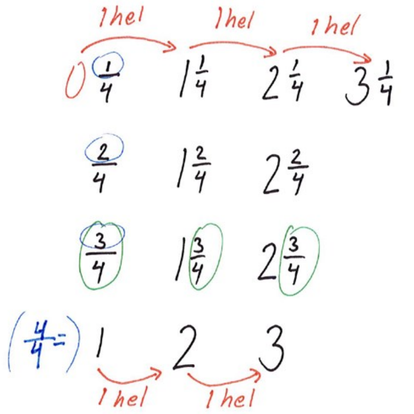
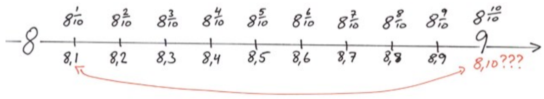
I Tabell 1 finns några exempel på talföljder som kan användas till talkörer eller räknerundor, hämtade från ett nätbaserat material från University of Washington. Talföljderna återges i stigande svårighetsgrad. Bilderna visar hur en dokumentation på tavlan skulle kunna se ut när läraren ritat pilar, strukit under och antecknat för att illustrera elevernas iakttagelser.

Tabell 1

Exempel på talföljder som kan användas antingen som talkörer eller räknerundor, jämte vilka matematiska idéer de kan belysa (Teacher education by design, 2015).

Talföljd	Matematiska idéer	Exempel på dokumentation
Räkna uppåt/neråt med 2-steg med olika starttal.	Räkneflyt med 2-steg. Positionssystemets uppbyggnad. Udda/jämna tal.	

Räkna uppåt/neråt med 5-steg med olika starttal.	Räkneflyt med 5-steg. Tiobassystemets uppbyggnad.	
Räkna uppåt/neråt med steg om10 eller 100 eller 1000 med olika starttal.	Räkneflyt med stora tal. Generalisera tiobassystemet.	
Räkna uppåt från 0 med ett ensiffrigt tal, till exempel 4.	Skutträkning, multiplikationstabellen. Samband mellan olika multiplikationstabeller.	
Räkna upp med 25.	Utveckla effektiva strategier för +/–. Samband mellan 25 och 100.	

Räkna uppåt med ¼, ½, eller ett annat stambråk.	Se bråket *a*/*b* som *a* stycken av storlek 1/*b*. Samband mellan bråk i blandad form och bråk större än 1.	
Räkna uppåt med tiondelar både som bråk och som decimaler.	Samband mellan bråk och decimaltal. Tiobassystemets uppbyggnad efter decimalkommat.	

Referenser

Franke, M, L., Kazemi, E., & Turrou, A., C. (2018). *Choral counting and counting collections: transforming the preK–5 math classroom*. Stenhouse publishers.

Kilhamn, C., & Frisk, S. (2016). Reflekterande och matematiserande barn – en utmaning. *Nämnaren 2016*:3, 9–14.

McIntosh, A. (2020). *Förstå och använda tal*. NCM, Göteborgs universitet.

McMillan, B., & Sagun, T. (2020). Extending choral counting. *The Mathematics Teacher*, *113*(8), 618–627. https://doi.org/10.5951/mtlt.2019.0361

Shumway, J. (2011). *Number sense routines.* Stenhouse publishers.

Teacher education by design (2015). *Choral counting tasks ideas.* University of Washington. https://tedd.org/choral-counting/

Talkör – en huvudräkningsaktivitet

Cecilia Kilhamn, NCM

Testa en talkör med din klass eller elevgrupp. Om de inte gjort detta tidigare kan ni börja med en talföljd som eleverna behärskar väl, exempelvis att räkna i 2-steg, 5-steg eller 10-steg. När det fungerar smidigt kan ni sedan öka svårighetsgraden successivt och arbeta med följder av bråk eller decimaltal.

1 Välj en talföljd

Fundera på vilka mönster och matematiska idéer du vill skapa förutsättningar för eleverna att få syn på och strukturera ditt sätt att skriva talen så att dessa framträder. Tänk igenom vilka huvudräkningsstrategier dina elever kan tänkas ha och vilka iakttagelser de kommer att göra.

2 Genomför talkören

Tala om för eleverna vilket tal de ska börja på och vilket tal du vill sluta på. Skriv gärna upp de två eller tre första talen i följden och be dem först tänka efter vilket som är nästa tal. Eleverna ska sedan tillsammans rytmiskt säga talen i den ordning de kommer i följden. Samtidigt som varje tal sägs skriver du upp det på tavlan så att alla ser talen uppställda i den struktur du tänkt ut.

3 Samtala om talen i talföljden

När ni nått slutet på talföljden säger du:

> Titta på talen. Vad kan du se? Vad finns där för mönster?

Låt gärna eleverna tänka tyst en liten stund, sedan prata parvis så att du kan lyssna in vilka iakttagelser de gör, och be dem därefter berätta för alla andra vad de sett och tänkt. När något föreslås bemöter du det med frågor som:

> Är det någon annan som har sett samma sak? Stämmer det? Stämmer det alltid?

Försök att representera elevens iakttagelse på tavlan där talföljden står uppskriven. När tanken visualiserats i strukturen kan du fortsätta samtalet med frågor som:

> Hur kan vi veta att det alltid stämmer? Varför är det så?

Skolverket

Förslag på talföljder att använda till talkör eller räknerunda

Förslagen ökar i svårighetsgrad men alla talföljder kan ge underlag till intressanta samtal i alla årskurser. Välj en på lämplig nivå för dina elever, fortsätt sedan med andra talföljder under kommande lektioner, allteftersom de passar övrigt innehåll.

Heltal med fokus på 10-bassystemet

- Räkna upp med 5, 10 eller 100. Börja på 0. Börja på 40. Börja på 140. Börja på 5. Börja på 27.
- Räkna ner med 5 eller 10. Börja på 130. Börja på 138.
- Räkna ner med 50 eller 100. Börja på 1300. Börja på 1380.
- Räkna upp eller ner med 25. Börja på olika tal.
- Räkna upp eller ner med 7, 8 eller 9.

Heltal med fokus på multiplikativa strukturer

- Räkna upp med 4 eller ett annat ensiffrigt heltal. Börja på 0.
- Räkna upp med 11. Börja på 0.
- Räkna upp med 12. Börja på 0.
- Dubblera varje tal. Börja på 1. Börja på 10. Börja på vilket tal som helst.
- Halvera varje tal, det vill säga dividera med 2.
  Börja på 1000. Börja på 1024. Börja på 49 152.

Tal i bråkform

När talföljden går förbi en hel behöver du uppmärksamma eleverna på brytpunkten och hur ni ska välja att säga och skriva. Antingen fortsätter talföljden med enbart bråkdelar i så kallade oegentliga bråk (bråk större än 1), eller så fortsätter talföljden med blandade bråk där heltalsdelen skiljs ut från det egentliga bråket. Till exempel om ni ska säga och skriva: $\frac{10}{10}, \frac{11}{10}, \frac{12}{10}$ ... eller: $1, 1\frac{1}{10}, 1\frac{2}{10}$ ...

- Räkna upp eller ner med tiondelar. $\frac{0}{10}, \frac{1}{10}$ ...
- Räkna upp eller ner med en halv. Börja på olika tal.
- Räkna upp eller ner med ett annat stambråk, exempelvis $\frac{1}{3}$ eller $\frac{1}{4}$ eller $\frac{1}{5}$.
- Räkna upp med ett heltal från ett tal i bråkform.
- Räkna upp med $\frac{3}{4}$. Börja på 0.

Decimaltal med fokus på 10-bassystemet

När decimaler utläses kan de sägas på olika sätt. Talet 0,1 kan antingen utläsas ”noll hela och en tiondel” eller ”noll komma ett”. Talet 3,45 kan antingen utläsas ”tre hela, fyra tiondelar och fem hundradelar” eller ”tre komma fyra fem”. Notera att man bör undvika att säga ”tre komma fyrtiofem” eftersom det är lätt att då befästa missuppfattningar som relaterar till heltal. Diskutera de olika sätten att säga talen.

- Räkna upp med 0,1. Börja på 0. Börja på 10. Börja på 34,5.
- Räkna ner med 0,1. Börja på 3, sluta på 0. Börja på 17, sluta på 6.
- Börja på ett decimaltal och räkna upp eller ner med 1, 2, 5 eller 10.
- Räkna upp med 0,5. Börja på 0, sluta på 30. Börja på 100, sluta på 130. Börja på 177, sluta på 200. Börja på 5,5. Börja på 5,3.
- Räkna ner med 0,5. Börja på 10, sluta på 0. Börja på 38, sluta på 28. Börja på 25,5. Börja på 25,3.
- Räkna upp eller ner med 0,01.
- Räkna upp eller ner med 1,5.

Talföljder med negativa tal

- Räkna ner med 1. Börja på 10.
- Räkna upp med 1. Börja på -10.
- Räkna ner med 10. Börja på 50. Börja på 48.
- Räkan upp med 10. Börja på -50. Börja på -48.
- Räkna ner med 2 eller 5. Börja på 20. Börja på 2. Börja på 0. Börja på -2.
- Räkna ner med 7, 8 eller 9. Börja på 23.
- Räkna ner med en halv. Börja på 5.
- Räkna ner med en tiondel. Börja på 3.

Mer avancerade talföljder

När eleverna blivit vana vid talkörer och själva aktiviteten blivit en rutin utvecklas deras taluppfattning snabbt. Då kan man utmana dem med mer avancerade talföljder som inte följder en upprepad addition, subtraktion eller multiplikation. Se hur långt ni klarar att gå innan ni hakar upp er.

- Kvadrattalen. 1^1, 2^2, 3^2 … som ger talföljden 1, 4, 9, 25, 36, 49 …
- Triangeltalen. 1, 3, 6, 10, 15, 21 …
- Fibonaccitalen 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 …

Del 2: Moment B – kollegialt arbete

Diskutera

Förslag till diskussionspunkter:

- Hur reagerar ni på talkörer? Vilka för- och nackdelar finns?
- Jämför talkörer och räknerundor, när passar det ena bättre än det andra? Varför?
- Hur kan talkörer stödja elevers lärande? Vilka erfarenheter har ni av att använda talkörer i undervisningen?
- Hur tas kopplingen mellan tal i bråk- och decimalform upp i era läromedel?

Planera

Välj en talkör på lämplig nivå i ”Talkör – en huvudräkningsaktivitet”. Diskutera vad som är det viktigaste att eleverna uppfattar i talföljden som bildas. Tänk igenom hur talföljden ska struktureras på tavlan och vilka matematiska mönster som ska framträda. Förbered ett sätt att kort anteckna det som ni noterar och diskutera vad ni kan förvänta er av eleverna.

Del 2: Moment C – aktivitet

Genomför aktiviteten på det sätt som ni har planerat.

Del 2: Moment D – gemensam uppföljning

Diskutera

Jämför de anteckningar ni förde i anslutning till aktiviteten.

- Vad fick ni syn på?
- Vad överraskade er?

Sammanfatta

Hur fungerade aktiviteten? Vilka fördelar upptäckte ni? Vad var svårt? Vad skulle ett återkommande arbete med talkörer kunna bidra med till undervisningen?