

Undervisa i matematik genom problemlösning

Maria Larsson, Mälardalens universitet

Att hjälpa barn att bli bättre problemlösare är inte bara ett utomordentligt viktigt mål, det är också den mest spännande utmaningen en lärare kan få. Om jag bara fick ge ett enda råd till en lärare som har tänkt att börja med problemlösning, så skulle det vara: Kom ihåg att barn är problemlösare av naturen. Lärarens arbete är att försöka utveckla denna naturliga förmåga så långt det går [...]. (Lester, 1996, s.91)

Problemlösning och matematiska förmågor

Undervisningen i matematik ska ge eleverna förutsättningar att utveckla sin förmåga att formulera och lösa problem med hjälp av matematik och värdera valda strategier (Skolverket, 2022). Då är det problemlösningens förmågan vi talar om. Genom att eleverna får lösa och diskutera utmanande matematiska problem kan faktiskt **alla** matematiska förmågor utvecklas. Om eleverna arbetar med samma problem och diskuterar sina olika lösningar får de uppleva att det finns många olika sätt att tänka kring ett problem. De får kommunicera, resonera, utveckla sina räknefärdigheter och sin begreppsförståelse.

Genom att eleverna får möjlighet att arbeta med utmanande problem får de också uppleva vad det kan innebära att utöva matematik. Matematikern George Pólya betonade att en naturlig del av att utöva matematik är att brottas med centrala matematiska idéer (Pólya, 1945/1957). Forskning visar också (Lester & Cai, 2016; Hiebert & Grouws, 2007) att elever som utmanas med problem och aktiviteter som kräver att de brottas med viktiga matematiska idéer utvecklar sin problemlösningens förmåga och sin begreppsförståelse. Dessutom pekar mycket forskning på att de kan prestera ungefär lika bra eller rentav bättre även på rena rutinuppgifter än elever som enbart följer mer ”traditionell” undervisning där man huvudsakligen övar på det som har demonstrerats av läraren. Det har också visat sig att elever som tränar sin räknefärdighet i en miljö som fokuserar på begreppslig utveckling blir mer flexibla och kan i högre grad anpassa sina färdigheter till att lösa nya uppgifter.

Vad är ett problem och vad är en lösning?

Pólya (1945/1957) delar upp elevernas arbete med ett problem i att förstå problemet, att göra upp en plan, att genomföra planen och att se tillbaka och kontrollera resultatet. Det sista steget får inte glömmas bort. Du som lärare kan hjälpa eleverna att ställa sig frågor

som: Är det rimligt? Stämmer det jag kom fram till med förutsättningarna som gavs i problemet? Hur kan jag kontrollera resultatet?

När vi talar om ett matematiskt problem avser vi en matematisk uppgift som personen inte från början vet hur han/hon kan gå tillväga för att lösa (jfr Lester & Cai, 2016). Det krävs ansträngning för att lösa ett problem. Det innebär också att det är individuellt vad som är ett problem. En uppgift som är ett problem för en person behöver inte vara det för en annan person. Något som är ett problem för en person idag kan senare bli en rutinuppgift för samma person. Det innebär dessutom att en textuppgift inte behöver vara ett problem och att en rent matematisk uppgift utan kontext kan vara ett problem. Med lösningen till ett problem menar vi hela resonemanget och inte enbart svaret.

Hagland med flera (2005) har tagit fram ett antal kriterier för ett rikt problem. Ett rikt problem är ett problem som:

- introducerar viktiga matematiska idéer eller strategier
- alla elever kan arbeta med på sin nivå
- kräver att eleverna anstränger sig och ska få ta tid
- kan lösas på många olika sätt med olika strategier och representationer
- kan samla hela klassen i en diskussion baserad på elevernas olika lösningar
- kan knyta samman olika matematiska områden
- kan inspirera till skapandet av egna, liknande problem.

För att ett problem ska passa alla elever i en klass behöver problemet både ha en låg tröskel och samtidigt ett djup så att alla elever kan få lagom utmaning av det. För att uppnå detta kan man bryta upp ett problem i ett antal olika delproblem som i problemet ”Kramar” nedan, se även Problembanken:

Kramar

Ellinor har bjudit hem sina tjejkompisar till en filmkväll. Alla som är på filmkvällen kramar varandra. Alla kramarna är mellan två personer i taget. Hur många kramar blir det totalt om det är:

- 4 personer på filmkvällen?
- 5 personer?
- 10 personer?
- 20 personer?
- n personer på filmkvällen?

- Hitta på ett eget liknande problem och lös det.

Tröskeln i problemet är låg eftersom man först frågar hur många kramar det blir om det är 4 personer. Vill man sänka tröskeln ytterligare skulle man kunna börja med 3 personer innan man frågar efter antalet kramar för 4 personer och 5 personer. Därefter blir det en betydligt större utmaning när man frågar efter antalet kramar för 10 personer och 20 personer. Man skulle också kunna fråga efter 100 personer och 1000 personer innan man frågar efter den generella formeln för det totala antalet kramar för n personer.

En problemlösningslektions faser

De fyra faser som vi tänker oss i en problemlösningslektion är:

- introduktion
- enskilt arbete
- arbete och diskussioner i smågrupper/par
- klassdiskussion

Du introducerar först problemet och ser till att alla elever förstår problemställningen, varefter eleverna arbetar tyst och enskilt med problemet en stund innan de får arbeta vidare och diskutera sina lösningar i smågrupper eller par. Till sist leder du en gemensam klassdiskussion utifrån elevernas olika lösningar och gör en summering av viktiga aspekter.

Självklart finns det olika varianter av de här faserna. Man behöver ju inte alltid låta eleverna arbeta både enskilt och i smågrupper, men det kan finnas stora fördelar med det jämfört med att direkt låta eleverna sätta sig i smågrupper. Det kan bidra till mångfalden av olika lösningar i klassen. Eleverna har oftast hunnit komma igång med problemet och har med sig sina egna tankar in i grupparbetet. Även de elever som tar lite längre tid på sig att komma igång har då chansen att bidra i gruppdiskussionen. Eleverna kan välja att arbeta vidare på en av lösningarna eller att ta idéer från olika lösningar och smälta samman.

Ofta kan det vara lagom med 5–10 minuter för det enskilda arbetet för att eleverna ska ha kommit en bit på väg med sin lösning innan de arbetar vidare och diskuterar i smågrupper. Beroende på gruppens nivå kan det dock behövas längre tid.

Klassdiskussionen ligger oftast sist, men ibland kan det även behövas en kort klassdiskussion mitt i elevernas arbete för att samla tankarna. Om du har möjlighet till halvklass ibland kan det också vara ett alternativ.

Ibland kan man behöva ägna flera lektioner åt ett problem. För att du i lugn och ro ska hinna sätta dig in i elevernas olika lösningar innan klassdiskussionen kan du vänta med

klassdiskussionen till dagen efter. Då kan du samla in elevlösningarna efter elevernas arbete. En annan variant är att bara ta en rast innan klassdiskussionen. Fördelen med det är att eleverna har sina tankar i färskt minne när klassdiskussionen kommer. Naturligtvis kan du också ta alla faserna i ett svep under en enda lång lektion. Det ställer ganska höga krav på att du ska hinna skaffa dig en överblick över alla elevers olika lösningar medan de arbetar, men det kan vara ett mål på sikt.

När det gäller sammansättningen av smågrupper så visar forskning att det är bra med heterogena grupper så länge skillnaderna inte är för extrema. Blanda gärna medelpresterande med hög- eller lågpresterande elever, men undvik att sätta samman de mest högpresterande med de mest lågpresterande eleverna. Det är bra om grupperna inte består av mer än 2–3 elever för delaktighetens skull.

Sätta mål och välja problem

Om vi går tillbaka till ett övergripande plan så är huvudmålet med undervisning genom problemlösning att eleverna utvecklar djup förståelse för matematiska begrepp och metoder genom att lösa problem. En nyckel till förståelse är elevernas egna engagemang och meningsskapande. Eleverna kan lära sig att arbeta matematiskt genom att lösa problem, och det har de nytta av i alla matematiska situationer.

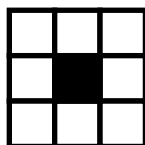
Du som lärare behöver avgöra vilka problem som ska väljas, vad som ska lyftas fram i klassdiskussionen utifrån elevernas olika idéer och vilka frågor som kan ställas för att utmana och stötta eleverna utan att tänka åt dem (Lester & Lambdin, 2007).

När det gäller val och anpassning av problem så måste problemet passa alla elever i klassen och bygga på den kunskap de redan har. För att anpassa ett problem kan man exempelvis lägga till eller ta bort delproblem, ändra problemets kontext, anpassa språket eller de ingående talen. I problemet ”Kramar” skulle man till exempel kunna ändra kontexten till att handla om handskakningar eller ta bort delproblemet med n personer.

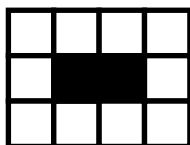
Matematikinnehållet, alltså de begrepp och procedurer som ska studeras, måste finnas inbäddat i problemet. Problemet väljs i relation till lektionsmålen. Ett långsiktigt mål för all matematikundervisning är ju att utveckla elevernas förmågor med hjälp av det centrala innehållet. För att tydliggöra vilka kunskaper och förmågor som eleverna ska ges förutsättningar att utveckla under arbetet med ett problem behöver man som lärare konkretisera de långsiktiga målen. Nu ska vi ge ett exempel på hur målen kan sättas för arbetet med problemet ”Lägga plattor runt rabatter” (Figur 1):

Figur 1

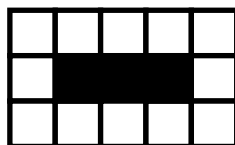
Lägga plattor runt rabatter



figur 1



figur 2



figur 3

Eva och Ali lägger vita plattor runt rabatter som bilden visar.

- Hur många vita plattor går det åt i:
 - figur 4?
 - figur 5?
 - figur 14?
 - figur 54?
- Beskriv med ord hur mönstret är uppbyggt!
- Hur många vita plattor går det åt i figur n ?
- Hitta på ett eget liknande problem och lös det.

Mål för en klass som arbetar med problemet i samband med **mönster** kan vara att eleverna utvecklar sin förmåga att:

- visualisera ett mönster på olika sätt
- använda figurens nummer som variabel för att uttrycka en explicit regel för antal plattor
- göra kopplingar mellan olika visualiseringar av mönstret och olika, ekvivalenta sätt att uttrycka en formel
- argumentera för och jämföra sina egna och andras algebraiska formler utifrån den grafiska representationen

Mål för en annan klass som arbetar med problemet i samband med **funktioner** kan vara att eleverna utvecklar sin förmåga (Smith & Stein, 2014) att:

- se att linjära funktioner växer med konstant hastighet
- uttrycka en explicit regel som definierar sambandet mellan de två variablerna på flera olika, ekvivalenta sätt
- uttrycka förändringstakten hos en linjär funktion med olika representationsformer:

- som skillnaden mellan efterföljande y -värden i en tabell
- som k -värdet i räta linjens ekvation $y = kx + m$
- som lutningen hos funktionens graf

Målen i det här fallet skiljer sig en hel del från målen i det första exemplet, trots att det är samma problem vi utgick ifrån. Lärare behöver välja problem med omsorg och matcha problemen med målen för elevernas lärande. Olika problem ger ju eleverna olika möjligheter att lära sig och utöva matematik.

Uppgifter som ställer högre eller lägre kognitiva krav

Forskarna Stein och Smith med kollegor särskiljer mellan uppgifter som ställer högre eller lägre krav på elevernas kognitiva förmåga. I uppgifter som ställer **lägre** krav ligger fokus på att producera korrekta svar istället för på att utveckla matematisk förståelse. Det kan handla om:

- att återge memorerad fakta.
Exempel: Skriv som procent och i decimalform: $\frac{1}{4} = \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$
- att en algoritmisk procedur kan användas utan koppling till begreppen eller betydelsen som ligger bakom proceduren. Det krävs inga förklaringar (eller förklaringar som enbart fokuserar på att beskriva proceduren).
Exempel: Beräkna $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$

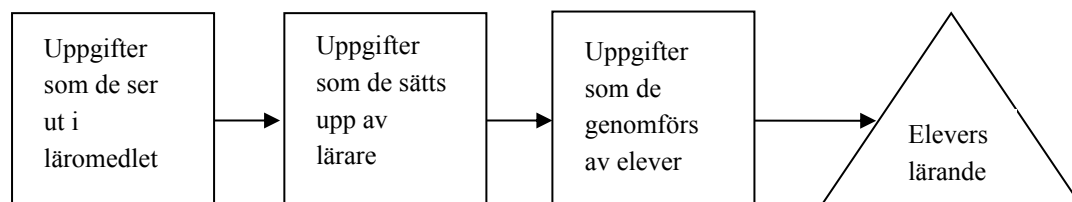
I uppgifter som ställer krav på **högre** nivå ligger fokus på att utveckla matematisk förståelse. Det kan vara uppgifter som:

- kräver komplext och icke-algoritmiskt tänkande och att eleverna utforskar och förstår matematikens karaktäristiska begrepp, processer eller samband.
Exempel: Lägga plattor runt rabatter (se ovan).
- föreslår breda vägar att följa som har nära kopplingar till bakomliggande begreppslika idéer.
Exempel: Beräkna $\frac{2}{3}$ av $\frac{3}{4}$. Rita figurer och förklara din lösning.

Även om uppgiften som den ser ut i läromedlet ställer krav på högre nivå är det inte säkert att den höga nivån bibehålls under arbetet med problemet. Forskarna Stein och Smith med kollegor har utvecklat ett ramverk för analys av hundratals lektioner i ett stort projekt. Deras ramverk ser ut så här (Stein et. al., 1998):

Figur 2

Ramverk för analys av lektioner



Faktorer som bidrar till att problemets nivå sjunker under arbetets gång är att

- läraren ”tar över” tänkandet och resonemangen och talar om för eleverna hur man löser problemet,
- läraren byter fokus från meningsskapande, begrepp och förståelse till huruvida svaret är korrekt,
- för lite eller för mycket tid ges till problemet,
- det finns svårigheter med att leda klassrumsarbetet,
- problemet inte passar eleverna,
- bristfälliga förklaringar accepteras.

Faktorer som bidrar till att en högre nivå bibehålls har visat sig vara att

- läraren stöttar elevernas tankar och resonemang
- elever får verktyg för att hålla koll på sina egna framsteg,
- läraren eller andra elever visar på resonemang på hög nivå,
- läraren ser till att det alltid finns förväntningar på tydliga förklaringar,
- uppgiften bygger på elevers tidigare kunskap,
- läraren ofta gör begreppsliga kopplingar,
- det finns tillräckligt med tid att utforska (inte för lite och inte heller för mycket).

Referenser

Cai, J., & Lester, F. K. (2016). Can mathematical problem solving be taught? Preliminary answers from 30 years of research. I P. Felmer et al. (Red.), *Posing and solving mathematical problems, Research in Mathematics Education* (s. 117–135). https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3_8

Hagland, K., Hedrén, R., & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem – inspiration till variation*. Liber.

Hiebert, J., & Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students’ learning. I F. K. Lester (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 371–404). Information Age Publishers.

Lester, F. K. (1996). Problemlösningens natur. I *Matematik – ett kommunikationsämne*. Nämnaren TEMA. NCM.

Lester, F., & Lambdin, D. (2007). Undervisa genom problemlösning. I *Lära och undervisa matematik – internationella perspektiv*. NCM.

Pólya, G. (1945/57). *How to solve it*. Princeton University Press.

Skolverket (2022). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet*.

Smith, M. S., & Stein, M. K. (2014). *5 undervisningspraktiker i matematik för att planera och leda rika matematiska diskussioner*. Natur & Kultur.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. A. (2009). *Implementing standards-based mathematics instruction – a casebook for professional development*. Teachers College Press and NCTM.