

Problembanken

Grundskola åk 7–9, modul: Problemlösning

Hillevi Gavel, Mälardalens högskola

Problembanken

Hillevi Gavel

Mälardalens högskola

Denna problembank innehåller 19 problem med varierande innehåll och svårighetsgrad. Tanken är att ni väljer problem efter vad som passar ihop med undervisningen i övrigt. På sidan 5 finns ett index som visar vilka delar av det centrala innehållet som de olika problemen tar upp. Detta kan vara till hjälp vid valet av problem.

Problemens upplägg

En del av problemen ges i flera varianter. Då behandlar alla varianterna samma grundidé, men de är lite olika svåra i övrigt. Ni får välja den som ni bedömer bäst passar för den elevgrupp ni har. Ni kan dessutom anpassa problemen vidare till just era egna elevgrupper, till exempel genom att anpassa siffror och lägga till eller ta bort deluppgifter. Framför allt i början kan det vara bra att hellre ta för lite än för mycket – eleverna kan bli stressade om uppgiften känns för stor. Man kan ha de deluppgifter man valde bort på separata papper, och dela ut om det verkar befogat.

Många av problemen innehåller förutom själva grundproblemet också *Utvidgningar*. Utvidgningarna är fortsättningar på grundproblemet. I en del fall finns flera olika utvidgningar, som hakar på olika aspekter hos grundproblemet. Det är då inte meningen att ni ska känna er pressade att ta alltsammans, utan välj ut några delar som verkar passa gruppens nivå och som fokuserar på det som verkar lämpligt ihop med den övriga undervisningen.

Det kan också vara bra att ha någon utvidgningsuppgift ”i bakfickan” ifall lektionen går snabbare än planerat (eller ifall någon arbetsgrupp blir klar fortare än de andra). Många av problemen innehåller också en deluppgift av typ ”konstruera ett eget problem”. Om tiden räcker kan eleverna få prova varandras problem; det är ett givande sätt att använda överblivna minuter.

Det är alltså meningen att ni vid behov ska redigera elevversionerna av problemen innan ni presenterar dem. Klipp ut de delproblem ni vill använda, klipp bort de ni inte vill ha, måla över mindre delar som ni inte är intresserade av, skriv dit de siffror ni vill ha och kopiera upp det färdiga resultatet.

Lärarsidorna

Till varje problem finns lärarsidor. Till det första problemet finns ett längre utdrag ur boken *Rika matematiska problem*, som beskriver arbetsmetodiken med den här typen av problem med problemet *Glassarna* som exempel.

Till de övriga problemen finns:

Problempresentation med en kort bakgrund till problemet.

Användbart material som listar konkret material som kan vara bra att ha vid arbetet.

Svar på deluppgifterna.

Matematiskt innehåll som listar vilka förkunskaper man bör ha för att kunna arbeta med problemet och vilket utbyte man kan få. (Exakt vilket utbytet blir beror mycket på vad eleverna fokuserar på, så listorna är inte kompletta.)

Lösningsstrategier med exempel på hur problemet kan angripas. (Det finns givetvis många fler strategier än vad som beskrivs här.)

Kommentarer ifall det finns mer att tillägga om problemet.

Innehåll

Problembanken	1
Ämnesområden	5
I Elevsidor	6
1 Glassarna	7
2 Kramar	9
3 Tornet	11
4 Buskar på rad	12
5 Lägga plattor runt rabatter	14
6 En brakmiddag	15
7 Andel av andel	17
8 Cykelförrådet	19
9 Staketet	22
10 Vinkelsumma	24
11 Kulpåsen	26
12 Prissättning	29
13 Annas syskon	31
14 Felblandad saft	32
15 Alla möjliga summor	33
16 Klubbverksamhet	35
17 Schackbrädet	37
18 Likheter och liknande	40
19 Smultronasken	42
II Lärarsidor	43
1 Glassarna	44
2 Kramar	57
3 Tornet	62
4 Buskar på rad	65
5 Lägga plattor runt rabatter	69
6 En brakmiddag	72
7 Andel av andel	75
8 Cykelförrådet	79
9 Staketet	85
10 Vinkelsumma	90
11 Kulpåsen	96
12 Prissättning	99

13	Annas syskon	102
14	Felblandad saft	105
15	Alla möjliga summor	108
16	Klubbverksamhet	113
17	Schackbrädet	120
18	Likheter och liknande	125
19	Smultronasken	128

Ämnesområden

Kursivering innebär att området ingår i någon utvidgningsuppgift eller att någon Lös-ningsstrategi använder sig av teknik från området, men att det inte är huvudfokus för problemet. Första sidhänvisningen går till elevsidorna, andra till lärarsidorna.

Algebra

- 15. Alla möjliga summor, 33, 108
- 7. Andel av andel, 17, 75
- 4. Buskar på rad, 12, 65
- 8. Cykelförrådet, 19, 79
- 6. En brakmiddag, 15, 72
- 14. Felblandad saft, 32, 105
- 1. Glassarna, 7, 44
- 16. Klubbverksamhet, 35, 113
- 2. Kramar, 9, 57
- 5. Lägga plattor runt rabatter, 14, 69
- 18. Likheter och liknande, 40, 125
- 12. Prissättning, 29, 99
- 17. Schackbrädet, 37, 120
- 19. Smultronasken, 42, 128
- 9. Staketet, 22, 85
- 3. Tornet, 11, 62
- 10. Vinkelsumma, 24, 90

Geometri

- 4. Buskar på rad, 12, 65
- 5. Lägga plattor runt rabatter, 14, 69
- 18. Likheter och liknande, 40, 125
- 17. Schackbrädet, 37, 120
- 19. Smultronasken (3D), 42, 128
- 9. Staketet, 22, 85
- 3. Tornet (3D), 11, 62
- 10. Vinkelsumma, 24, 90

Modellering

- 7. Andel av andel, 17, 75
- 4. Buskar på rad, 12, 65
- 8. Cykelförrådet, 19, 79
- 1. Glassarna, 7, 44
- 16. Klubbverksamhet, 35, 113
- 2. Kramar, 9, 57
- 5. Lägga plattor runt rabatter, 14, 69

- 19. Smultronasken, 42, 128

- 9. Staketet, 22, 85

Samband och förändring

- 15. Alla möjliga summor, 33, 108
- 4. Buskar på rad, 12, 65
- 8. Cykelförrådet, 19, 79
- 14. Felblandad saft, 32, 105
- 1. Glassarna, 7, 44
- 2. Kramar, 9, 57
- 5. Lägga plattor runt rabatter, 14, 69
- 12. Prissättning, 29, 99
- 17. Schackbrädet, 37, 120
- 19. Smultronasken, 42, 128
- 9. Staketet, 22, 85
- 3. Tornet, 11, 62
- 10. Vinkelsumma, 24, 90

Sannolikhet och statistik

- 15. Alla möjliga summor
(kombinatorik), 33, 108
- 13. Annas syskon, 31, 102
- 8. Cykelförrådet, 19, 79
- 1. Glassarna (kombinatorik), 7, 44
- 16. Klubbverksamhet (kombinatorik),
35, 113
- 2. Kramar (kombinatorik), 9, 57
- 11. Kulpåsen, 26, 96
- 17. Schackbrädet (kombinatorik), 37,
120

Taluppfattning och tals användning

- 15. Alla möjliga summor, 33, 108
- 7. Andel av andel, 17, 75
- 8. Cykelförrådet, 19, 79
- 6. En brakmiddag, 15, 72
- 14. Felblandad saft, 32, 105
- 2. Kramar, 9, 57

Del I

Elevsidor

1 Glassarna

Problemet är taget ur *Rika matematiska problem* av Kerstin Hagland, Rolf Hedrén och Eva Taflin, © författarna och Liber 2005. Återgivet med tillstånd. Teckning: Anders Suneson.



Lisa ska köpa lösglass i kulor och kan välja på fyra olika smaker. Hon vill ha två glasskullor.

- På hur många olika sätt kan hon välja sin glass?
- Hitta på ett eget liknande problem. Lös det.

Variant

Lisa ska köpa lösglass i kulor. Hon vill ha två glasskulor. På hur många olika sätt kan hon välja sin glass om det finns:

- a) 3 olika smaker?
- b) 4 olika smaker?
- c) 5 olika smaker?
- d) 10 olika smaker?
- e) 100 olika smaker?
- f) n olika smaker?
- g) Hitta på ett eget liknande problem. Lös det.

2 Kramar

Ellinor har bjudit hem sina tjejkompisar till en filmkväll. Alla som är på filmkvällen kramar varandra. Alla kramarna är mellan två personer i taget.



- a) Hur många kramar blir det om det är 4 personer på filmkvällen?
- b) Och om det är 5 personer?
- c) Och om det är 10 personer?
- d) Och om det är 20 personer?
- e) Om det är n personer på filmkvällen, hur många kramar blir det totalt?
- f) Hitta på ett eget liknande problem och lös det.

Utvidgningar

Lika eller olika, udda eller jämnt?

Vanligen är det ju inte så att alla kramar alla. Antagligen kramar man inte de som man kommer i sällskap med, till exempel. Det gör att olika personer kan ha kramat olika många andra. (I uppgifterna nedan kan ni skaka hand istället för att kramas, det går snabbare att göra.)

- a) Börja med att "kramas" inom gruppen. Se till att inte alla kramar alla. Skriv upp hur många kramar var och en varit med i.
- b) Hur många fick samma antal som någon annan i gruppen?
- c) Det blir *alltid* så att åtminstone två har samma antal. Förklara varför!
- d) Hur många fick ett udda antal och hur många fick ett jämnt? (Noll är ett jämnt tal.)
- e) Det blir *alltid* ett jämnt antal personer som har ett udda antal kramar. Förklara varför!

Gifta par

På ett cocktailparty fanns 4 gifta par (och inga andra). De kramades inte, men en del av dem skakade hand med varandra. Ingen skakade hand med den som den var gift med. En kvinna frågade därefter alla andra hur många de skakat hand med. Alla gav olika svar.

- a) Hur många personer hade kvinnan skakat hand med?
- b) Hur många personer hade hennes man skakat hand med?

3 Tornet

Problemet är taget ur *Rika matematiska problem* av Kerstin Hagland, Rolf Hedrén och Eva Taflin, © författarna och Liber 2005. Återgivet med tillstånd. Teckning: Anders Suneson.

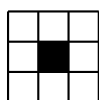


- a) Hur många kuber behövs det för att bygga tornet på bilden?
- b) Hur många kuber behövs det för att bygga ett liknande torn som är 12 kuber högt?
- c) Hur många kuber behövs det för att bygga ett liknande torn som är n kuber högt?
- d) Hitta på ett eget liknande problem. Lös det.

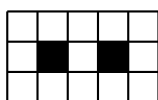
4 Buskar på rad

Problemet är taget ur *32 rika problem i matematik* av Maria Larsson, © Maria Larsson och Liber 2007. Återgivet med tillstånd. Teckning: Tomas Karlsson.

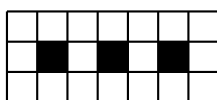
Camilla ska plantera buskar vid en gågata i city. Runt varje buske lägger hon plattor som figuren visar. Varje vit ruta är en platta och varje svart ruta är en rabatt där en buske planteras.



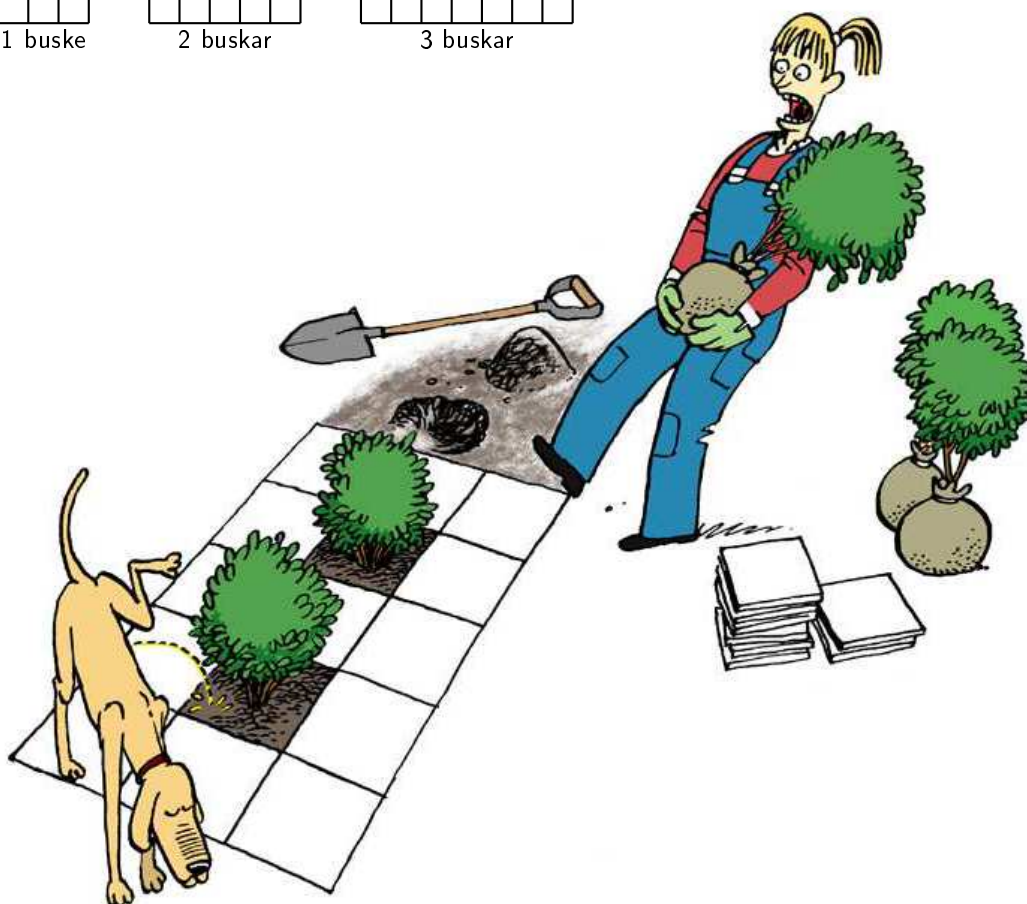
1 buske



2 buskar



3 buskar



1. Hur många plattor går det åt runt
 - a) 4 buskar?
 - b) 5 buskar?
 - c) 10 buskar?
 - d) 100 buskar?
 - e) n buskar?
2. Hur många buskar måste Camilla plantera om hon lägger 208 plattor?
3. Hitta på ett eget liknande problem och lös det.

4.1 Variationer

(Ur 32 rika problem i matematik.)

Låt eleverna bygga plattmönster av stenar, knappar, tärningar, klossar, lego etc. på alla möjliga fantasifulla sätt och ta fram formeln för summan av alla plattor. Flera olika färger på plattorna kan ingå i mönstret. En annan variant kan vara att fråga hur de följande figurerna i en serie kan se ut om man endast presenterar de två första figurerna i serien med plattor.

Utvidgningar

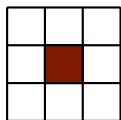
(Ej ur 32 rika problem.)

1. Vad har rabatten för omkrets i de olika fallen?
2. Vilken area har rabatten i de olika fallen?
3. Hur stor andel av arean är plattbelagd, och hur stor andel är jord?
4. Om man gör en mycket stor rabatt, hur stor blir andelen jord på ett ungefär?

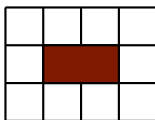
5 Lägga plattor runt rabatter

Problemet är formulerat av Cecilia Christiansen och Maria Larsson.

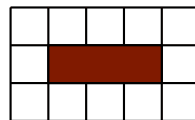
Eva och Ali lägger vita plattor runt rabatter som bilden visar.



Figur 1



Figur 2



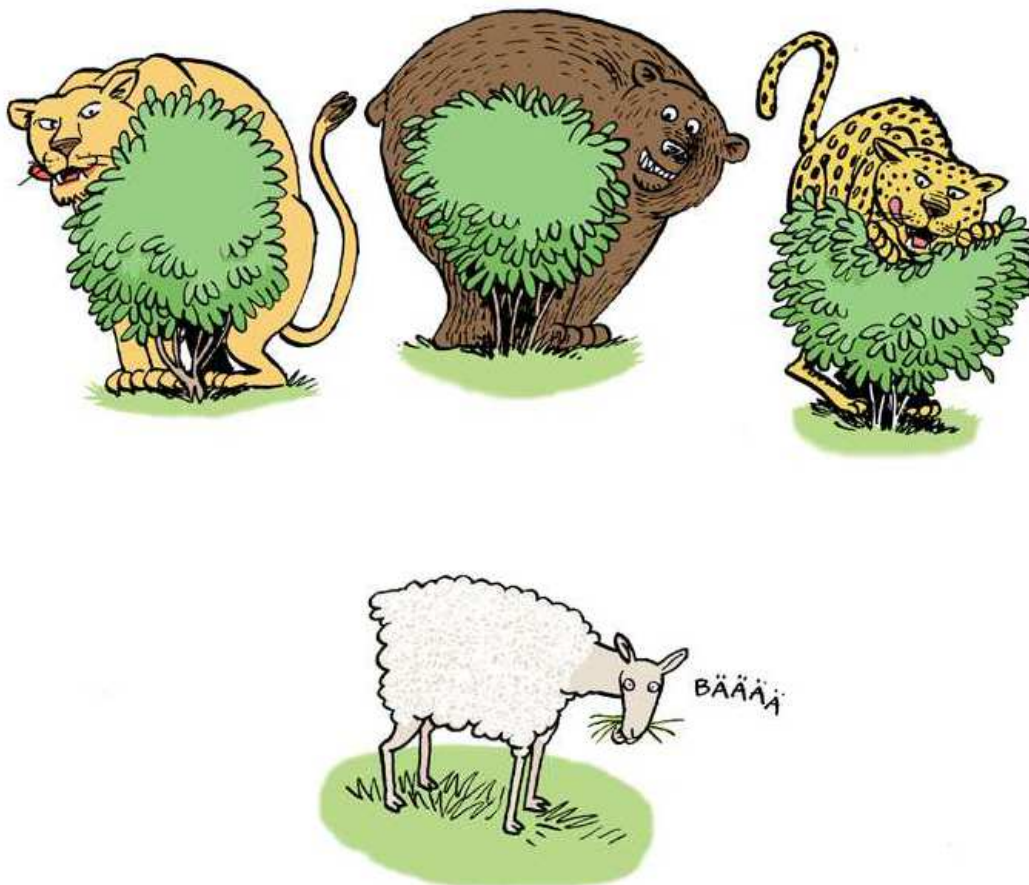
Figur 3

1. Hur många vita plattor går det åt i:
 - a) figur 4?
 - b) figur 5?
 - c) figur 14?
 - d) figur 54?
2. Beskriv med ord hur mönstret är uppbyggt!
3. Hur många vita plattor går det åt i figur n ?
4. Hur lång blir rabatten (det vill säga: området med jord) om de har 158 vita plattor att lägga?
5. Hitta på ett eget liknande problem och lös det.

6 En brakmiddag

Problemet är taget ur *32 rika problem i matematik* av Maria Larsson, © Maria Larsson och Liber 2007. Återgivet med tillstånd. Teckning: Tomas Karlsson.

Ett lejon äter upp ett får på 3 timmar, en björn äter upp ett får på 6 timmar och en leopard äter upp ett får på 4 timmar.



1. Hur lång tid tar det för lejonet och björnen att tillsammans äta upp ett får?
2. Hur lång tid tar det för alla tre djuren att tillsammans äta upp ett får?
3. Hitta på ett eget liknande problem och lös det.

Utvidgningar

1. Diskutera det realistiska i problemet. (Kan djuren äta samtidigt?)
2. Diskutera det realistiska i modellen. (Äter man lika fort hela tiden, och om inte: hur påverkar det svaret?)
3. Försök hitta ett realistiskt problem med samma typ av beräkning.

7 Andel av andel

Problemen är formulerade av Karin Pollack och Cecilia Christiansen.

Månadspeng

Hurra! Jag har fått månadspeng till min tomma plånbok.



Jag köper en väska för en tredjedel av månadspengen och går sedan och köper en tröja för 40 % av det som är kvar.

Till sist njuter jag av en glass för en tiondel av pengarna som är kvar efter mina två fina inköp.

Nu finns det 216 kr i min plånbok.

- a) Hur mycket fick jag i månadspeng?
- b) Hitta på ett eget liknande problem och lös det.

Emmas USB-minne

Emma har ett gammalt använt 8GB USB-minne med ledigt utrymme.



Förra veckan laddade hon ned ett spel som tog $\frac{2}{7}$ av det lediga minnet.

Till helgen fick hon en spännande film som upptog 60 % av det lediga utrymmet som nu fanns kvar.

Emmas kompis tog snygga foton på festen. När Emma sparar korten på sitt USB tar de $\frac{1}{8}$ av det nuvarande minnet.

Nu har hon bara 0,5 GB kvar.

- a) Hur stort utrymme av USB-minnet var upptaget från början?
- b) Hitta på ett eget liknande problem och lös det.

Utvidgningar

- a) Är det möjligt att sätta ihop ett sådant här problem som är olösligt?
- b) Försök tänka ut en realistisk situation där man har den här typen av information om något.

Till USB-minnet:

- c) Ta reda på vad "GB" är för något.
- d) Om det lediga utrymmet från början var det som ni kom fram till, är det då möjligt att spelet tog upp *exakt* $\frac{2}{7}$ av det tillåtna utrymmet?

8 Cykelförrådet

En stor förskola har ett förråd, där de har sina cyklar. Förskolan har både 2-hjuliga och 3-hjuliga cyklar.



- a) Just nu finns det 11 cyklar i förrådet. Tillsammans har de 27 hjul. Hur många av cyklarna är 2-hjulingar, och hur många är 3-hjulingar?
- b) Är det säkert att det bara finns *ett* möjligt svar på den här frågan? Förklara!
- c) Om vi bara får reda på att det är 27 hjul men inte hur många cyklar det är, vad är då svaret på frågan?
- d) Sätt ihop ett liknande problem. Det behöver inte handla om cyklar!

Utvidgningar

Det stora förrådet

Kommunen har köpt in nya cyklar, som ska delas ut till alla förskolor i området.

- Just nu har de 117 cyklar i sitt lager. Tillsammans har dessa 290 hjul. Hur många av cyklarna är 2-hjulingar, och hur många är 3-hjulingar?

Det olösbare problemet

Hanna har konstruerat ett cykelproblem, och låter Erik försöka lösa det. Erik säger: "Du måste ha räknat fel då du räknade hjulen, för så här kan det inte vara!"

- Vad kan det vara som gör att Erik tycker att Hannas problem är fel?

Enklare variant

Hanna har gjort problemet

I ett skjul finns 15 cyklar, både 2-hjulingar och 3-hjulingar. Tillsammans har de 50 hjul. Hur många av varje sort är det?

Erik, som ska försöka lösa det, säger: "Du måste ha räknat fel då du räknade hjulen, för så här kan det inte vara!"

- Vad är det som gör att Erik tycker att Hannas problem är fel?

Algebra

Man kan lösa de här problemen med hjälp av algebra.

- Undersök hur man kan bära sig åt.

Enhjulingar

Förskolan har nu också köpt enhjulingar.

- a) Just nu finns det 11 cyklar i förrådet. Tillsammans har de 27 hjul. Hur många är enhjulingar, hur många är 2-hjulingar och hur många är 3-hjulingar? Hitta minst två olika svar!
- b) Hur kommer det sig egentligen att det här problemet har flera möjliga lösningar?
- c) Sätt ihop ett liknande problem som har flera lösningar.

Mer algebra

Också enhjulingsproblemet kan studeras med hjälp av algebra.

- Prova, och se vad ni kommer fram till.

Ett realistiskt problem

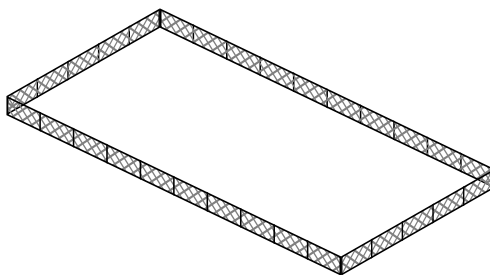
I verkligheten skulle man antagligen gå ut i förrådet och räkna cyklarna om man ville veta hur många man hade av varje.

- Försök tänka ut någon "riktig" situation som leder till att man får ett sådant här problem att lösa!

9 Staketet

Del 1

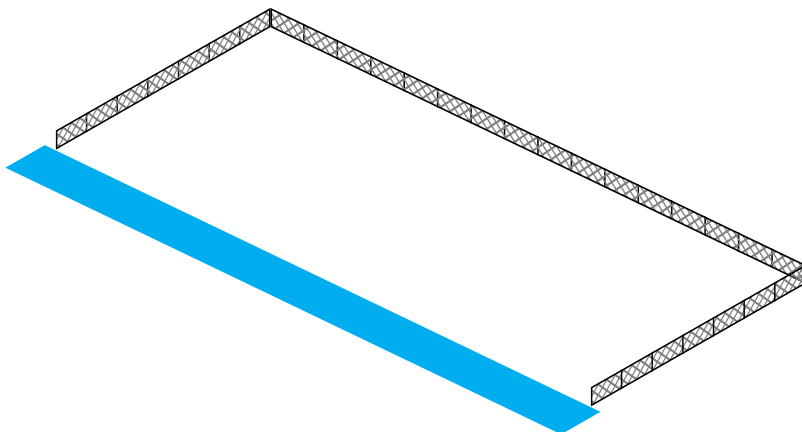
Aline och Ludvig har en rulle med 90 meter staket, och på en stor äng vill de sätta upp en hage. Hagen ska vara rektangulär. Eftersom de vill kunna få in så många djur som möjligt i hagen så vill de att hagen ska bli så stor som möjligt.



- Rita ett antal skalenliga hagar med rätt omkrets på rutat papper. Prova lite olika former på rektanglar. Vilken form verkar vara bäst? Undersök arean både med hjälp av en beräkning och genom att räkna rutorna.
- Om hagen har bredden B , vilken längd L måste den då ha?
- Vilka mått ska hagen ha för att få så stor area som möjligt?

Del 2

Aline och Ludvig kom nu på att det går en å utmed ängen. Om de låter ån vara fjärde sidan i hagen så behöver de bara använda staket till tre sidor. Då borde man kunna få en ännu större hage.



- Vilka mått ska den här hagen ha för att få så stor area som möjligt?
- Hur mycket större blir den här hagen?

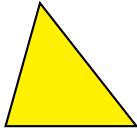
Utvidgningar

- a) Om man vill göra en fyrkantig hage så behöver man inte göra den rektangulär (= rätvinklig). Blir det bättre eller sämre om man provar andra vinklar i hörnen?
- b) Man behöver ju inte göra just en *fyr*kantig hage. Man skulle kunna göra den trekantig eller sexkantig eller... Blir det bättre eller sämre med många kanter?
- c) Vilken form på hage ger egentligen den allra största arean?

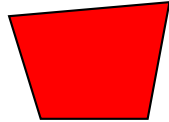
10 Vinkelsumma

Problemet är formulerat av Cecilia Christiansen.

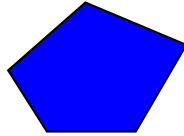
Del 1



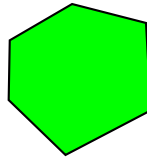
3-hörning



4-hörning



5-hörning



6-hörning

?

10-hörning

?

n -hörning

Hur stor är vinkelsumman i en:

- a) 3-hörning (triangel)?
- b) 4-hörning?
- c) 5-hörning (pentagon)?
- d) 6-hörning (hexagon)?
- e) 10-hörning (dekagon)?
- f) n -hörning?

Del 2

- a) Hur stor är vinkelsumman i en dekadon?
- b) Bestäm vinkelsumman i en 27-hörning.
- c) Hur många hörn har en månghörning med vinkelsumman 3060° ?
- d) Beräkna summan av vinkelsummorna av alla månghörningar som finns från en triangel till en hexagon.
- e) Beräkna summan av vinkelsummorna av alla månghörningar som finns från en triangel till en 27-hörning.
- f) Beräkna summan av vinkelsummorna av alla månghörningar som finns från en triangel till en n -hörning.

Utvidgningar

Icke-platt geometri

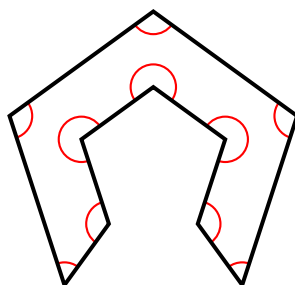
Det här med vinkelsumman i trianglar och vad den för med sig gäller i *platt geometri*. (Matematiker brukar säga *plan* istället för *platt*, men det betyder ungefär samma sak.)

- Vad kan det vara för sorters geometri som *inte* är platt, och vad blir det för skillnader där?

Icke-konvexa polygoner

Vinklar i polygoner mäts alltid på insidan. Om alla vinklarna i en polygon är mindre än 180° säger man att polygonen är *konvex*. (Det betyder ungefär "något som putar utåt".) Om några av vinklarna är större än 180° säger man att den är *icke-konvex*. (Något som "putar inåt" kallas *konkavt*, men en sådan här polygon brukar putar utåt på en del ställen och inåt på andra så man kan inte använda det ordet här.)

- Rita några icke-konvexa polygoner.
- Hur många hörn måste en polygon ha för att det ska vara möjligt för den att vara icke-konvex?
- Det går inte att göra en polygon där *alla* hörn är mer än 180° . Varför inte?
- Här är en icke-konvex 10-hörning. Vad har den för vinkelsumma? Förklara ordentligt; det är inte säkert att de förklaringar ni redan kommit med fungerar på den här figuren!



11 Kulpåsen

De här påsarna innehåller allihop en blandning av röda och blå kulor. Kulorna är precis lika, förutom att de har olika färg.



Påse A

Påse B

Påse C

Tänk nu att du blundar, sticker handen i en påse och tar en kula.

- Vilken påse ger dig störst chans att få en blå kula?
- Förklara varför just den påsen ger dig störst chans.
- Hitta på ett eget liknande problem och lös det.

Enklare varianter

- Ta bara påse A och B . (Frågan är formulerad så att det bara är att klippa bort bilden på påse C om man inte vill ha med den.)
- Minska antalen, så att procenträkning och bråkförenkling inte blir ett hinder. (Väsentligt är att alla antal – både av de respektive färgerna och totalsumman – är olika, annars finns det ett antal i grunden felaktiga resonemang som ger korrekt svar.) Måla över de givna antalen med tipp-ex och skriv dit önskade siffror istället.
- Skriv upp totalsumman kulor på påsarna; ger en vink om att den är relevant.

Utvidgningar

Konkret test

Läraren har med sig kulpåse B (fylld med exempelvis träpärlor i rött och blått; pärlor är relativt billigt). Alla eleverna får dra varsin kula (med återläggning), och man ser hur stor andel som faktiskt fick en blå. Eventuellt kan man låta alla dra ett par tre gånger, för att få mer data.

Man kan ställa upp en tabell med andelen blå efter första, andra, tredje och så vidare dragningar. Förhoppningsvis ska andelen gå mot det teoretiska sannolikhetsvärdet. Utseendet på tabellen kan vara intressant att diskutera.

Att man tar just kulpåse B kan motiveras med att den innehåller minst antal kulor och därmed är billigast att ordna.

Man kan också göra experimentet med alla påsarna, men det går då åt ganska många kulor.

Fler färger

Diskutera vad det blir för skillnad om man har tre olika färger på kulor.

- Om man exempelvis byter ut 15 av de 60 röda kulorna i påse B mot gröna, hur påverkar det sannolikheten att få en blå kula?

Fler dragningar

Vi tittar på kulpåse A . Den här gången vill vi dra *två* kulor. Det finns två olika sätt att göra detta på:

Med återläggning Vi lägger tillbaka den första kulan innan vi drar den andra.

Utan återläggning Vi lägger *inte* tillbaka den första kulan innan vi drar den andra.

Det blir lite olika sannolikheter beroende på vilket sätt man använder.

- a) Vid vilken av metoderna är det mest sannolikt att vi ska få två blå kulor? Förklara!
Svara på den här frågan *innan* ni löser de som kommer efter.
- b) Hur sannolikt är det att vi ska få två blå kulor då vi drar med återläggning?
- c) Hur sannolikt är det att vi ska få två blå kulor då vi drar utan återläggning?
- d) Hur många blåa kulor ska man byta mot röda i påse B för att sannolikheten för att få två blå kulor med återläggning ska bli samma som för påse A ?
- e) Om man gör det utbytet, kommer då sannolikheten för två blå kulor *utan* återläggning också att bli samma? Och om den inte blir samma, i vilken påse blir den störst?

12 Prissättning

Det här problemet ges i tre varianter:

Datorspelet

Emil har blivit intresserad av det nya nätbaserade spelet *Super-Mega-Gigant*. För att spela det måste man teckna ett abonnemang. Det finns två sorter att välja på:

- (1) *Ingen veckoavgift* Man betalar 25 öre för varje påbörjad minut.
- (2) *Veckoavgift* Man betalar 50 kronor för varje vecka man vill ha möjlighet att spela, och 10 öre för varje påbörjad minut.

Emil försöker räkna ut vilket av abonnemangen som är mest fördelaktigt för honom. (Han vill ju betala så lite som möjligt!)

- a) Vilket abonnemang bör Emil välja om han tror att han kommer att spela en timme i veckan?
- b) Vilket abonnemang bör Emil välja om han tror att han kommer att spela tio timmar i veckan?
- c) När är egentligen abonnemang 1 bäst, och när är abonnemang 2 bäst? Bestäm exakt var gränsen går!
- d) Är det någon skillnad i pris på att spela i ett tiotimmarspass och att spela tio pass på sammanlagt tio timmar?
- e) Sätt ihop ett likande problem, och lös det.

Telefontjänsten

Agnes har sett ett marknadsbehov, och har startat telefontjänsten *Gnäll om dina föräldrar*. Man ringer Agnes och berättar hur besvärliga ens föräldrar är, och Agnes håller med en. Det hela kostar 4 kronor per påbörjad minut. Det finns också ett månadsabonnemang, där man betalar 100 kronor för en månad, och då bara behöver betala en krona per påbörjad minut för samtalen.

Emily vill gärna använda denna tjänst, och försöker räkna ut vilket av betalningssätten som är mest fördelaktigt för henne. (Hon vill ju betala så lite som möjligt.)

- a) Vilket betalningssätt bör Emily välja om hon tror att hon kommer att vilja gnälla en kvart i månaden?
- b) Vilket betalningssätt bör Emily välja om hon tror att hon kommer att vilja gnälla en timme i månaden?
- c) När är det bäst att inte betala månadsavgift, och när är det bäst att betala? Bestäm exakt var gränsen går!
- d) Är det någon skillnad i pris på att ringa ett samtal som tar en halvtimme och på att ringa 10 samtal som sammanlagt tar en halvtimme?
- e) Sätt ihop ett liknande problem, och lös det.

Gymmet

Adrian ska börja gå på gym. Man kan betala på två sätt.

- (1) *Utan medlemskap* Man betalar 150 kronor för varje besök.
- (2) *Med medlemskap* Man betalar 1750 kronor för att bli medlem i gymmet under ett år.
Besöken kostar då bara 50 kronor.

Adrian försöker räkna ut vilket av betalningssätten som är mest fördelaktigt för honom.
(Han vill ju betala så lite som möjligt!)

- a) Vilket betalningssätt bör Adrian välja om han tror att han kommer att besöka gymmet en gång i månaden under det närmaste året?
- b) Vilket betalningssätt bör Adrian välja om han tror att han kommer att besöka gymmet en gång i veckan under det närmaste året?
- c) När är det bäst att inte betala medlemskap, och när är det bäst att betala? Bestäm exakt var gränsen går!
- d) Sätt ihop ett likande problem, och lös det.

13 Annas syskon

Problemet är taget ur *32 rika problem i matematik* av Maria Larsson, © Maria Larsson och Liber 2007. Återgivet med tillstånd. Teckning: Tomas Karlsson.

Anna har två systrar och två bröder. Medelvärdet av Annas fyra syskons åldrar är 17 år. Medelvärdet av alla fem syskonens åldrar är 16 år. Emma är 20 år och äldst. Cecilia är 15 år, vilket är medianen för alla fem syskonens åldrar.



- a) Hur gammal är Anna?
- b) Hur gamla är Annas bröder?
- c) Hitta på ett eget liknande problem och lös det.

14 Felblandad saft

Problemet är taget ur *32 rika problem i matematik* av Maria Larsson, © Maria Larsson och Liber 2007. Återgivet med tillstånd. Teckning: Tomas Karlsson.

En varm sommardag bestämmer sig John för att blanda lite saft. Han tar en del koncentrerad saft och 9 delar vatten och häller det i tillbringaren. Han smakar på saften och tycker att den smakar väldigt blaskigt. Då ser han på saftflaskan att saften ska blandas $1 + 3$ delar. Det ska alltså vara en del koncentrerad saft till bara 3 delar vatten. John bestämmer sig för att hälla i mer koncentrerad saft för att saften ska bli rätt blandad.



- a) Hur stor del av den utspädda saften är koncentrerad saft när John har blandat saften $1 + 9$ delar?
- b) Hur stor del av den utspädda saften ska vara koncentrerad saft om John ska blanda saften $1 + 3$ delar?
- c) Hur många fler delar koncentrerad saft ska John hälla i den felblandade saften för att den ska bli blandad $1 + 3$ delar?
- d) Hur många fler delar koncentrerad saft ska John hälla i den felblandade saften för att den ska bli blandad $1 + 6$ delar istället?
- e) Hitta på ett eget liknande problem och lös det.

15 Alla möjliga summor

Mamma Hillevi går på första föräldramötet i sin 7-årige sons klass. Läraren berättar bland annat att barnen fått skriva 10 som summa på alla sätt som går. Hillevi funderar: "Är inte det väldigt många sätt?" och försöker räkna ut hur många sätten egentligen är.

$$\begin{array}{ll} 3 = 1 + 1 + 1 & 3 = 2 + 1 \\ 3 = 1 + 2 & 3 = 3 \end{array}$$

- a) På hur många sätt kan man skriva 3?
- b) På hur många sätt kan man skriva 4?
- c) På hur många sätt kan man skriva 10?
- d) På hur många sätt kan man skriva n ? Motivera ordentligt!

Alla termerna i summorna ska vara positiva heltal. Det spelar roll i vilken ordning talen står (så " $1 + 2$ " och " $2 + 1$ " räknas som två olika sätt att skriva 3). Vi räknar att bara skriva talet direkt som en tillåten lösning (så att skriva " 3 " räknas som ett av sätten att skriva 3).

- e) Vad tror ni att läraren egentligen menade?

Utvidgningar

Speciella termer

- a) I hur många av summorna som blir 10 är alla termerna jämna?
- b) I hur många av summorna som blir n är alla termer delbara med k ?

Andra sorters tal

I frågan står det "positiva heltal".

- a) Vad skulle hända om man tog bort det där med "positiva"?
- b) Vad skulle hända om man bytte "heltal" mot bara "tal"?

Utan ordning

- Om man bestämmer sig för att det inte är så viktigt med ordningen, utan tycker att $1+9$ och $9+1$ är samma sak, hur många sätt finns det då? Undersök, och se efter vilka saker man måste tänka på.

16 Klubbverksamhet



En journalist från *Lokalbladet* besöker en skolklass med 25 elever, och frågar bland annat om vilka klubbar de tillhör. På sitt kontor tittar han igenom resultatet:

- 11 elever tillhör simklubben.
- 13 elever tillhör fotbollsklubben.
- 10 elever tillhör dansklubben.

Men $11 + 13 + 10$ blir ju mer än 25! tycker han, och ringer skolan eftersom det inte verkar rätt. "Många är med i mer än en klubb", säger läraren. Journalisten skickar ut ett frågepapper och får reda på att

- 6 elever tillhör både fotbollsklubben och simklubben.
- 7 elever tillhör både fotbollsklubben och dansklubben.
- 5 elever tillhör både simklubben och dansklubben.
- 5 elever tillhör inte någon av klubbarna.

När han får tillbaka pappret inser han att han också borde ha frågat hur många som är med i alla tre klubbarna. Eftersom han inte vill ringa skolan igen beslutar han att försöka räkna ut saken.

1. Hur många av eleverna tillhör alla tre klubbarna?
2. Hur många av dem är med i bara en klubb?
3. Hitta på ett eget liknande problem. Försök komma på något som ni tror att skulle kunna inträffa i verkligheten.

Enklare variant

En journalist från *Lokalbladet* besöker en skolklass med 25 elever, och frågar bland annat om vilka klubbar de tillhör. På sitt kontor tittar han igenom resultatet:

- 13 elever tillhör fotbollsklubben.
- 10 elever tillhör dansklubben.
- 9 tillhör inte någon av klubbarna

Men det här blir ju mer än 25! tycker han, och ringer skolan eftersom det inte verkar rätt. "Många är med i mer än en klubb", säger läraren.

1. Hur många av eleverna tillhör båda klubbarna?
2. Hur många av dem är med i bara en klubb?
3. Hitta på ett eget liknande problem. Försök komma på något som ni tror att skulle kunna inträffa i verkligheten.

Utvidgning

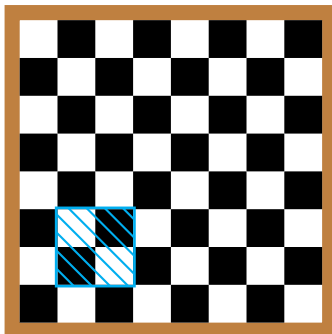
Om det istället varit frågan om 4 olika klubbar, hur många olika klubbkombinationer finns det egentligen? Exakt hur ser de olika varianterna ut?

17 Schackbrädet

Ett schackbräde är en stor kvadrat som är ihopsatt av 8 gånger 8 små kvadrater.

Då man talar om storlekar hos till exempel kvadrater brukar man beteckna *gånger* med $\times$, så man kan skriva att schackbrädet är en 8×8 -kvadrat.

Om man tittar på det börjar man se kvadrater av andra storlekar också. I bilden är en kvadrat av storlek 2×2 markerad.



Det finns en kvadrat av storlek 8×8 och 64 kvadrater av storlek 1×1 på brädet.

1. Hur många kvadrater av storlek 7×7 finns det?
2. Hur många kvadrater av storlek 6×6 finns det?
3. Hur många kvadrater av storlek 3×3 finns det?
4. Hur många olika kvadrater finns det totalt på schackbrädet?
5. Man kan tänka sig schackbräden i andra storlekar också. Hur många kvadrater finns på ett $n \times n$ -schackbräde?
6. Förklara varför ni känner er helt *säkra* på att det stämmer!

Variant

Man kan tänka sig schackbräden i andra storlekar också. Här är ett i storlek 2×2 :



Det innehåller fyra 1×1 kvadrater och en 2×2 -kvadrat, totalt sett fem stycken kvadrater.

1. Hur många kvadrater finns totalt på ett 3×3 -bräde?
2. Hur många kvadrater finns totalt på ett 4×4 -bräde?
3. Hur många kvadrater finns totalt på 8×8 -brädet?
4. Hur många kvadrater finns på ett $n \times n$ -bräde?
5. Förklara varför ni känner er helt *säkra* på att det stämmer!

Utvidgningar

En formel

Nu påstår vi att antalet kvadrater på ett $n \times n$ -bräde kan beräknas med formeln

$$\frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} = \frac{n + 3n^2 + 2n^3}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1. Kontrollera att de här tre uttrycken verkligen är lika med varandra.
2. Kontrollera att formeln verkar stämma. Använd den variant av den som ni tycker verkar lättast att använda.
3. Har ni några idéer om hur man kan kontrollera att den här formeln *alltid* stämmer?
4. Den här formeln innehåller ju division med 6. Om man tar ett slumpvalt tal och dividerar med 6 så får man oftast *inte* ett heltal. Vilket heltals- n man än sätter in i den här formeln så får man ett heltal som svar. Hur kommer det sig?

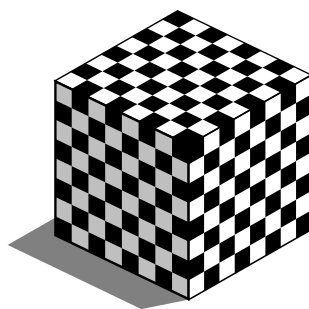
Andra "bräden"

Det är inte allt i världen som är fyrkantigt. Man kan exempelvis använda trekantiga spelbräden:



1. Hur många liksidiga trianglar finns på det här brädet, som har sidlängden 4?
2. Hur många liksidiga trianglar finns på ett liknande bräde med sidlängd n ?

Det är inte heller allt i världen som är platt. Man kan tänka sig spel i 3-dimensionella "bräden":



Precis som man kan leta kvadrater på det kvadratiske brädet så kan man leta kuber i det här kubiska "brädet".

3. Hur många kuber finns i den här $8 \times 8 \times 8$ -kuben?

18 Likheter och liknande

$$2 + 2 = 4$$

$$2 + 2 \neq 5$$

Problem 1

Nästan allt räknande brukar innehålla "är lika med", $=$, någonstans. En vanlig uträkning kan se ut som

$$2 + 3 \cdot 4 = 2 + 12 = 14$$

Egentligen är det här *två* "är lika med". Dels har vi att $2 + 3 \cdot 4 = 2 + 12$, dels har vi $2 + 12 = 14$. Ur de här två likheterna kommer man fram till att $2 + 3 \cdot 4 = 14$.

Har man en sådan här "kedja" av likheter så kan man alltid dra slutsatsen att det man hade allra först är lika med det man fick allra sist. Det spelar ingen roll hur många likheter det är på vägen. Det man nu kan fråga sig är om det går att resonera på samma sätt med annat än likheter.

1. Mindre än "Mindre än" betecknas med $<$. Exempelvis är $2 < 3$.

- Om man har en hel kedja av "mindre än", är det då säkert att det som står allra först är mindre än det som står allra sist?

2. Inte lika med "Inte lika med" betecknas med $\neq$. Exempelvis är $2 + 2 \neq 5$.

- Om man har en hel kedja av "inte lika med", är det då säkert att det som står allra först inte är lika med det som står allra sist?

3. Ungefär lika med "Ungefär lika med" betecknas med $\approx$. Exempelvis är $2,1 \approx 2$.

- Om man har en hel kedja av "ungefär lika med", är det då säkert att det som står allra först är ungefär lika med det som står allra sist?

4. Parallell med "Parallell med" betecknas ofta med $\parallel$. (Det går snabbare att skriva om man ska använda begreppet ofta.) Exempelvis är golvet parallellt med taket, åtminstone i de flesta rum.

- Om man har en hel kedja av "parallell med", är det då säkert att det som står allra först är parallellt med det som står allra sist?

5. Vinkelrät mot "Vinkelrät mot" betecknas ofta med $\perp$. (Också det går snabbare att skriva.) Exempelvis är golvet vinkelrätt mot väggen, åtminstone i de flesta rum.

- Om man har en hel kedja av "vinkelrät mot", är det då säkert att det som står allra först är vinkelrätt mot det som står allra sist?

6. Likformig med "Likformig med" betecknas ofta med $\sim$. Exempelvis är en stor cirkel likformig med en liten cirkel.

- Om man har en hel kedja av "likformig med", är det då säkert att det som står allra först är likformigt med det som står allra sist?

7. Släkt med "Släkt med" är inte ett matematiskt begrepp, men man kan ställa samma fråga om det ändå.

- Om man har en hel kedja av "släkt med", är det då säkert att den som står allra först är släkt med den som står allra sist?

8. Kortare än "Kortare än" är också något som man kan fråga sig om personer.

- Om man har en hel kedja av "kortare än", är det då säkert att den som står allra först är kortare än den som står allra sist?

9. Eget problem

- a) Hitta på något mer begrepp som man kan ställa samma fråga om.
- b) Vad är svaret på den frågan?
- c) Byt problem med en annan grupp och försök lösa varandras problem!

Problem 2

Ekvationslösning grundar sig på en idé: Om man har två saker som är lika och gör samma sak med dem så får man två andra saker som är lika med varandra. Som i

$$\begin{aligned}2x &= 8 \\ \frac{2x}{2} &= \frac{8}{2} \\ x &= 4\end{aligned}$$

Vi hade att $2x$ och 8 var lika med varandra. Vi halverade båda två, och fick då att x är lika med 4.

Kan man göra på samma sätt med annat än likheter?

1. Mindre än "Mindre än" betecknas med $<$. Exempelvis är $2 < 3$.

- Om man har två saker, den första mindre än den andra, och gör samma sak med dem, är det då säkert att den första nya saken är mindre än den andra nya saken?

2. Inte lika med "Inte lika med" betecknas med $\neq$. Exempelvis är $2 + 2 \neq 5$.

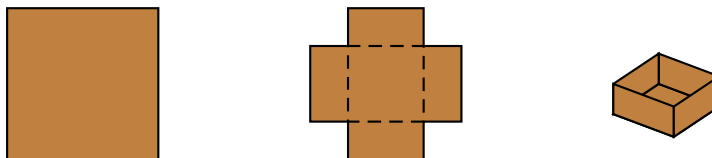
- Om man har två saker som inte är lika med varandra och gör samma sak med dem, är det då säkert att de nya sakerna blir olika?

3. Ungefär lika med "Ungefär lika med" betecknas med $\approx$. Exempelvis är $2,1 \approx 2$.

- Om man har två saker som är ungefär lika med varandra och gör samma sak med dem, är det då säkert att de nya sakerna blir ungefär lika?

19 Smultronasken

Mikaela och Alexander har ett bra smultronställe, och tänker att det kan vara en bra idé att plocka smultron och sälja till turister. Smultronen ska säljas i askar. De har fått tag på en stor låda med kartongbitar, som är 21×21 centimeter stora. Om man klipper bort hörnen och viker upp sidorna så får man en ask:



Mikaela och Alexander vill ha så stora askar som möjligt, och funderar på hur de ska klippa.

1. Fundera lite. Vad tror ni är bäst, breda låga askar eller höga smala? Eller kanske något mitt-emellan?
2. Klipp till och vik en ask var, och försök göra dem ganska olika. Räkna ut vilken volym de har. Ta också och kontrollmät någon av dem, för att se att den beräknade volymen verkligen är rätt.
3. Vilka mått ska asken ha för att få så stor volym som möjligt?
4. Om ingen av de askar ni redan gjort hade de måtten, klipp till och vik ihop en ask med den här volymen och se hur den ser ut.
5. Mikaela och Alexander har nu fått tag på kartongbitar som är 18×18 cm stora. Vilka mått ska asken då ha för att få så stor volym som möjligt?

Del II

Lärarsidor

1 Glassarna

Problemet är taget ur *Rika matematiska problem* av Kerstin Hagland, Rolf Hedrén och Eva Taflin, © författarna och Liber 2005. Återgivet med tillstånd. Varianten av problemet har formulerats speciellt till problembanken.

Om det innehållsmässigt passar ihop med det man arbetar med i övrigt är detta ett bra problem att börja med, av nedanstående skäl:

- Konkret, realistiskt problem
- Många lösningsmetoder, på många nivåer.
- Fyra olika rimliga tolkningar av frågan.

Det att det både finns många lösningsmetoder och flera tolkningar av frågan gör att man ganska snabbt kan komma bort från "är det här rätt?", "är det så här man ska göra?", och liknande.

Detta problem har också en mycket grundlig analys, som vi fått tillstånd att återge här. Efterföljande problem har mer kortfattade lärarsidor. Man får komma ihåg att mycket av det som står på det här problemet också gäller för dem.

Avsnitt 1.1–1.3 är nyskrivet till problembanken.

1.1 Användbart material

- Något som konkret kan representera glasskulorna, som utklippta papperscirkclar i flera färger, knappar i olika färger eller något liknande.
- Eventuellt: papper med förtryckta strutar.
- Rutat papper, pennor i flera färger.
- Miniräknare (åtminstone till variant 2).

1.2 Svar

Detta är svaren till varianten med de 7 deluppgifterna, och givet att frågan tolkats som "högst en kula av varje smak till varje strut, och ordningen på kulorna saknar betydelse":

- a) 3 sätt
- b) 6 sätt
- c) 10 sätt
- d) 45 sätt
- e) 4950 sätt
- f) $1 + 2 + \dots + (n - 1) = \frac{n(n - 1)}{2} = \binom{n}{2}$ sätt.
- g) —

1.3 Matematiskt innehåll

Förkunskaper

Nödvändiga förkunskaper:

- Egentligen inga mer än att kunna räkna; fullt möjlig att göra något av redan år 1 i grundskolan, om man inte tar alltför många smaker.

För större utbyte:

- Addition (till summalösningar)

- Multiplikation
- Division
- Algebraisk notation (med variabel)
- Algebraiska omskrivningar
- Summauttryck med variabel

Utbyte

- Bra introduktion till problemlösning
- Diskussion om problemvarianter
- Insikt om vikten av att ge tydliga förutsättningar
- Insikt om att det finns olika lösningsmetoder, ingen av dem mer "rätt" än någon annan
- Kombination av lösningsstrategier kan ge nya insikter
- Problemstrukturering
- Mönsterigenkänning
- **Begrepp:**
 - aritmetisk talföljd,
 - summa av aritmetisk talföljd,
 - algebraisk formel,
 - kombinatorikens additions- och multiplikationsprinciper,
 - rekursion,
 - urval (med och utan ordning och återläggning),
 - bevis av lösningars korrekthet,
 - icke-linjära samband

1.4 Utdrag ur Rika matematiska problem: Hur kan man planera för elevers matematiklärande genom problemlösning?

Att undervisa i matematik genom problemlösning är inte alltid så helt lätt. Det fordrar såvitt vi kan bedöma, kanske mer än annan matematikundervisning, att läraren har gedigna kunskaper, både i didaktik och i ämnet.

Vilka matematiska mål kan eleverna nå genom att arbeta med ett problem?

Vi hoppas genom följande exempel kunna visa något av vad gedigna kunskaper kan betyda för lärares agerande under vanliga problemlösningsektioner i skolan och hur väsentligt det är att läraren noggrant tänker igenom problemet i förväg. Frågan kommer förhoppningsvis att bli ytterligare belyst i de exempel, som följer senare i boken.

Det problem vi har valt är följande:

Glassarna

Lisa ska köpa lösglass i kulor och kan välja på fyra olika smaker. Hon vill ha två glasskulor.

- a) På hur många olika sätt kan hon välja sin glass?
- b) Hitta på ett eget liknande problem. Lös det.

Vi har sett att detta problem kan sysselsätta elever från förskolan till gymnasiet och även studenter på högskolenivå, fast på lite olika sätt. Om läraren är införstådd med problemets möjligheter till variation kan alla elever bemötas på bästa möjliga sätt och få en

chans att utveckla sina matematiska tankar genom en lagom utmaning. Problemet kan till exempel utvidgas så att Lisa har fem, sex eller ännu fler smaker att välja bland. Man kan till slut fråga efter en generell regel att bestämma antalet möjligheter, om man har ett visst antal, n st, smaker att välja bland. Här står n för vilket som helst av de positiva heltalen.

Problemet kan även utvidgas så att Lisa inte har bara två utan tre, fyra, fem eller fler kulor i sin glass. Här kan man också till sist fråga efter en generell regel att bestämma antalet möjligheter, om man har ett visst antal, k st, kulor att välja ut. Här ska sedan k kunna bytas ut mot vilket som helst av de positiva heltalen 1, 2, 3, 4 och så vidare.

Dessutom kan man redan med de yngsta eleverna antagligen få fram en diskussion om vad som egentligen ska gälla för glassarna. Här är två matematiskt viktiga frågor, som man kan hoppas att eleverna ställer sig:

Räknas en glass med jordgubb överst och vanilj under och en glass med vanilj överst och jordgubb under som samma glass eller ska man se dem som olika glassar?

Får en glass ha de båda kulorna i samma smak, till exempel två chokladkulor, eller måste kulorna ha olika smaker?

Det finns alltså olika sätt att tolka uppgiften och antalet lösningar är förstas beroende på vilka villkor som man bestämmer sig för ska gälla. Diskussionen av tolkningen kan i sig ge en chans till en matematisk systematisk sortering av de olika möjligheterna.

Man kan till exempel ställa upp följande tabell för att åskådliggöra de olika tolkningarna. Här betecknas de fyra fallen med A, B, C och D.

Ordning Smak	Varje smak kan väljas högst en gång till varje strut.	Varje smak kan väljas fler gånger till varje strut.
Kulornas ordning saknar betydelse	A	B
Kulornas ordning har betydelse	C	D

Läraren kan givetvis välja mellan att ge problemet utan bestämda villkor (och hoppas att frågorna kommer) eller låsa det till bestämda villkor, det vill säga en eller flera av rutorna i tabellen. Det kan alltså vara bra för läraren att vara väl insatt i problemets möjligheter, innan han eller hon gör sitt slutliga val.

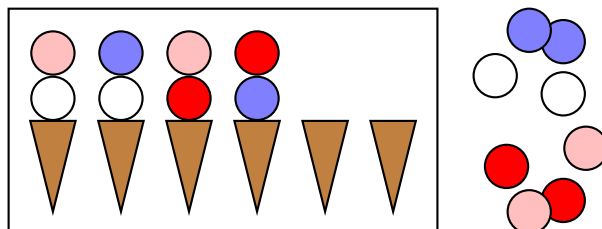
Vi kommer här att göra en noggrann genomgång av olika metoder som elever kan tänkas använda för att lösa ett problem enligt villkoren i ruta A. Därefter kommer vi att behandla de övriga tre fallen representerade av rutorna B, C och D mer summariskt.

Fall A	Varje smak kan väljas högst en gång till varje strut. Kulornas ordning saknar betydelse
--------	--

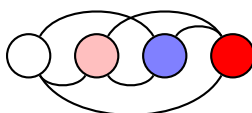
Vi vill ha reda på hur många olika glasstrutar Lisa kan köpa, om hon har fyra olika smaker att välja bland och ska kombinera dem två och två på alla tänkbare sätt, dock aldrig två kulor med samma smak. Vi har bestämt att ordningen mellan kulorna saknar betydelse, det vill säga vanilj-jordgubb räknas som samma glass som jordgubb-vanilj.

Exempel på problemlösningsprocesser

Osystematiskt letande Lärare har visat oss hur deras elever har fått olikfärgade pappcirklar att limma upp två och två på papper med färdigtryckta strutsymboler och hur eleverna har provat sig fram utan någon särskild systematik



Vi har också sett lösningar där elever målat fyra olikfärgade cirklor som symboler för de olika smakerna och sedan dragit streck mellan dem två och två för att visa vilka smaker man kan kombinera. Ungefär som bilden nedan visar. De har sedan räknat strecken och på så sätt fått fram antalet möjliga kombinationer.



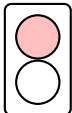
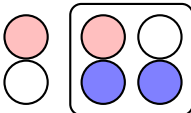
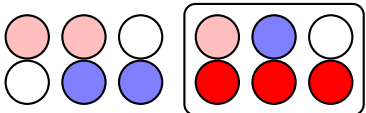
Vissa elever vi träffat på har förkortat smakerna till bokstäverna v, j, b och s, där v står för vanilj, j för jordgubb, b för blåbär och s för smultron. De har sedan osystematiskt kombinerat dessa tre bokstäver två och två på alla tänkbara sätt:

j b s v v b j v s j b s

Systematiskt letande En del elever letar mer systematiskt efter lösningar. Här följer tre varianter.

Resonemang 1 Ett exempel på ett logiskt resonemang, som kan leda fram till en lösning, är att en elev inser, att varje ny smak som tillkommer kan kombineras precis en gång var med de smaker som finns sedan tidigare. Genom detta förfarande kan man finna att antalet möjliga kombinationer är sex.

Detta kan även lösas på motsvarande systematiska sätt med hjälp av en eller flera bilder. Till exempel så här:

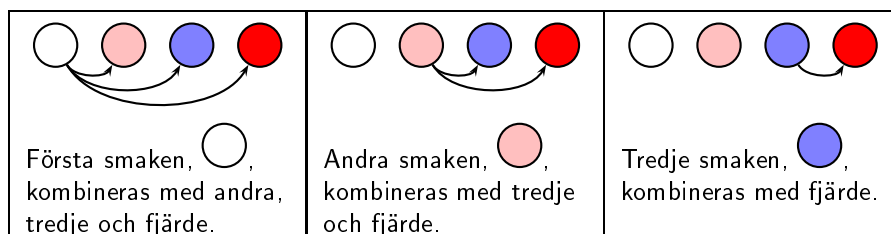
 Två smaker 1 kombination	 Tre smaker, ny smak, som kombineras med de andra två. $(1 + 2)$ kombinationer = = 3 kombinationer	 Fyra smaker, ny smak, som kombineras med de andra tre. $(3 + 3)$ kombinationer = = 6 kombinationer
--	--	--

*Tillägg*¹: Genom detta förfarande kan man finna att antalet möjliga kombinationer är $1 + 2 + 3 = 6$. Observera att resonemanget är generellt, se *Översättning av lösningarna till matematiska formler* på sidan 50. Med kommentarer kan det betraktas som ett bevis.

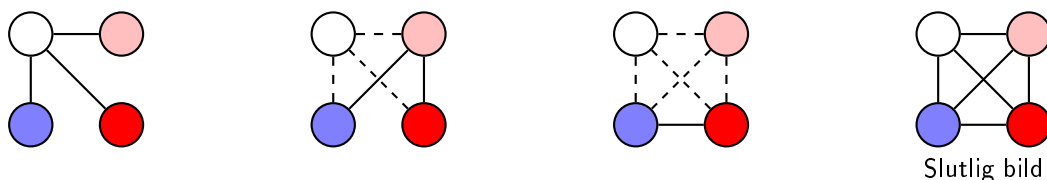
Resonemang 2 Ett annat exempel på logiskt resonemang är när eleven kommer på att den första smaken kan kombineras en gång var med de andra tre. Den andra smaken kan på motsvarande sätt även kombineras med de två återstående. Slutligen kan den tredje smaken dessutom kombineras med den fjärde smaken. Totala antalet kombinationer blir då sex stycken.

Tillägg: Även här är resonemanget generellt, eller kan lätt göras till ett sådant genom att man stryker "tre" och "två" och lägger till "osv." till att den näst sista smaken kan kombineras med den sista smaken.

Detta kan även på motsvarande sätt lösas systematiskt med hjälp av en eller flera bilder. Till exempel så här:



Eller så här med samma resonemang:

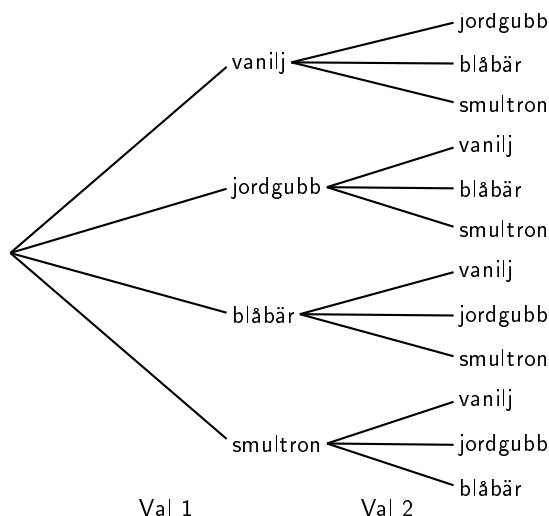


Resonemang 3 Vissa elever tar hjälp av en tabell för att mer systematiskt finna de möjliga kombinationerna. Här kan de sedan stryka de kombinationer som redan finns med i tabellen. Snart märker de, att de bara behöver räkna med de kombinationer som finns på ena sidan diagonalen.

	vanilj	jordgubb	blåbär	smultron
vanilj	–	vj	vb	vs
jordgubb	jv	–	jb	js
blåbär	bv	vj	–	bs
smultron	sv	sj	sb	–

En annan uttrycksform som elever kan använda för samma typ av resonemang är ett så kallat träd-diagram. Här visar man från vänster sett första valet, mellan de fyra smaker, och sedan kommer andra valet, de smaker dessa kan kombineras med, i solfjädersform. Även här får man dela antalet kombinationer med 2, eftersom vanilj-jordgubb räknas som samma som jordgubb-vanilj osv.

¹Alla *Tillägg* är skrivna speciellt för problembanken.



Tillägg: Resonemanget att det finns lika många glassar som antalet celler över diagonalen i tabellen får anses generellt och utgör ett bevis om det kompletteras med ett argument för hur många dessa celler är uttryckt i antalet smaker.

Träddiagrammet illustrerar *multiplikationsprincipen* i kombinatoriken. Antalet vägar från vänster till höger är produkten av antalet valmöjligheter i de olika stegen (förutsatt att antalet alternativ i senare steg är oberoende av vad man valde i föregående steg). Observera att detta ger antalet glassar om man tar hänsyn till ordningen.

Upptäckt av mönster Elever som utmanas att lösa samma problem fast med ett växande antal smaker kan till exempel ta hjälp av en tabell för att lättare upptäcka matematiska mönster.

I tabell 1 nedan syns ett mönster man kan få, om man följer det första logiska resonemanget under förra rubriken. I tabell 2 återfinns ett mönster man kan få, om man följer det andra logiska resonemanget. I tabell 3 slutligen visas ett mönster man kan få, om man utgår från träddiagrammet i tredje logiska resonemanget.

Tabell 1 Resonemang 1		Tabell 2 Resonemang 2		Tabell 3 Resonemang 3	
antal smaker	antal olika med 2 kulor	antal smaker	antal olika med 2 kulor	antal smaker	antal olika med 2 kulor
1	–	1	–	1	–
2	1	2	1	3	$2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$
3	$1 + 2 = 3$	3	$2 + 1 = 3$	3	$3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 3$
4	$3 + 3 = 6$	4	$3 + 2 + 1 = 6$	4	$4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 6$
5	$6 + 4 = 10$	5	$4 + 3 + 2 + 1 = 10$	5	$5 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 10$
6	$10 + 5 = 15$	6	$5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$	6	$6 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 15$
osv.		osv.		osv.	

I alla tre tabellerna kan eleverna förmodligen snabbt ana sig till fortsättningen.

De kan dessutom se samband mellan de olika tabellerna, till exempel att

$$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 10 \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} = 45$$

Detta är en god början till att finna en generell regel för hur man beräknar *summan av en godtycklig aritmetisk talföljd*. Detta kan man läsa mer om längre fram, under rubriken *Översättning av reglerna till matematiska formler*.

På motsvarande sätt kan elever göra tabeller där antalet smaker hålls konstant och där man istället låter antalet kulor växa och i dessa tabeller på motsvarande sätt upptäcka matematiska mönster. Man kan även tänka sig att de låter både antalet smaker och antalet kulor variera på ett noggrant och systematiskt sätt.

Formulering av generella regler uttryckta med egna ord Elev 1 kan exempelvis med egna ord formulera en generell regel inspirerad av resonemang 1 och tabell 1:

Om man har 4 smaker plussar man på med 3 till så många man hade när man hade 3 smaker. Om man har 5 smaker plussar man på med 4 till så många man hade när man hade 4 smaker. Så där gör man hela tiden. Man plussar alltid på med ett mindre än så många smaker man har.

Elev 2 som utgått från resonemang 2 och tabell 2 kanske uttrycker sin regel på följande sätt:

Om det är 4 smaker så plussar man ihop $3 + 2 + 1$ och om det är 5 smaker plussar man ihop $4 + 3 + 2 + 1$ och så vidare. Man startar alltid på talet före hur många smaker det är.

Elev 3 kan vara inspirerad av resonemang 3 och tabell 3 och beskriva sin regel så här:

Man tar så många smaker det finns gånger en smak mindre. Sedan tar man hälften av det man får då.

Tillägg: Observera att dessa formuleringar enbart är beskrivning av hur man räknar sig fram till ett svar. Det fattas helt ett argument för att det blir *rätt* svar.

Översättning av reglerna till matematiska formler

Rekursionsformel Elev 1 i förra exemplet närmar sig en så kallad rekursionsformel. Denna elev har nämligen upptäckt ett samband mellan ett resultat och det som kommer direkt efter.

Om man till exempel har 3 smaker så är summan av antalet kombinationer (S_3) med två olika kulor på glassen:

$$S_3 = S_2 + 2 = 1 + 2 = 3$$

Om man till exempel har 4 smaker så är summan av antalet kombinationer (S_4) med två olika kulor på glassen:

$$S_4 = S_3 + 3 = 3 + 3 = 6$$

osv.

Man kan uttrycka detta mer generellt. Här nedan står n för ett positivt heltal, vilket som helst. Man kan alltså byta ut n mot 1, 2, 3, 4, 5, ..., 100, ... 1000, ... eller vad man nu vill.

Om summan av antalet kombinationer med n smaker betecknas som S_n , blir summan av antalet kombinationer med ytterligare en smak (S_{n+1}), det tidigare antalet ökat med n , alltså gäller formeln:

$$S_{n+1} = S_n + n$$

Den nya smaken kan ju kombineras med alla de n övriga, och alla redan tidigare kombinationer kvarstår. Nackdelen med denna metod är dock att man först måste beräkna alla kombinationer för antalet smaker ända fram till och med n smaker för att få fram värdet för $(n + 1)$ smaker.

Formel för summan av en aritmetisk talföljd Elev 2 har funnit att man får antalet kombinationer med två olika kulor på glassen, om man adderar alla positiva heltal fram till och med talet före totala antalet smaker.

Om man till exempel har 3 smaker så är antalet kombinationer (S_3):

$$S_3 = 1 + 2 = 3$$

Om man till exempel har 4 smaker så är antalet kombinationer (S_4):

$$S_4 = 1 + 2 + 3 = 6$$

osv.

Detta kan man också skriva mer generellt. Här nedan står n för ett positivt heltal, vilket som helst. Man kan alltså byta ut n mot 1, 2, 3, 4, 5, ..., 100, ... 1000, ... eller vad man nu vill.

Om man har n smaker är antalet kombinationer (S_n):

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1)$$

Nackdelen med denna metod är att man måste addera alla tal ända fram till och med $(n - 1)$ smaker för att få fram värdet för n smaker.

Elev 3 inser, att man helt enkelt kan ta smak för smak och kombinera dem med alla de övriga smakerna. Om man till exempel har 10 smaker kan var och en av dem kombineras med de övriga 9. Men man får se upp lite. Gör man så får man två likvärdiga par av varje kombination. Med andra ord är exempelvis vanilj-jordgubb samma kombination som jordgubb- vanilj. Därför räknar man bara hälften av dem.

$$S_{10} = \frac{10 \cdot 9}{2}$$

Det generella uttrycket blir då, om det är n smaker, där n står för ett positivt heltal, vilket som helst:

$$S_n = \frac{n \cdot (n - 1)}{2}$$

Om elev 2 och elev 3 jämför sina resultat kan de hitta ett betydligt enklare sätt för elev 2 att addera alla sina tal, med andra ord en formel för summan av den aritmetiska talföljden, i detta fall en summa där första termen är 1 och differensen (skillnaden) mellan varje tal i talföljden är 1 och där det finns $(n - 1)$ tal:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) = \frac{n \cdot (n - 1)}{2}$$

Tillägg: Observera att denna formel har erhållits genom att studera två olika lösningsstrategier till samma problem. Härav inser man nyttan av att studera olika lösningar och inte bara nöja sig med en.

Ett sätt att öka förståelsen för att denna formel verkligen gäller ges genom följande exempel:

Exempel: Vi vill räkna ut summan av den aritmetiska talföljden

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

Vi sätter upp och adderar summan två gånger på följande sätt:

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \\ 5 + 4 + 3 + 2 + 1 \\ \hline 6 + 6 + 6 + 6 + 6 \end{array} = 6 \cdot 5$$

Med andra ord är

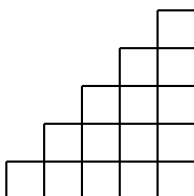
$$2(1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 6 \cdot 5$$

Eftersom vi nu tog summan två gånger måste vi alltså dela med 2. Då får vi:

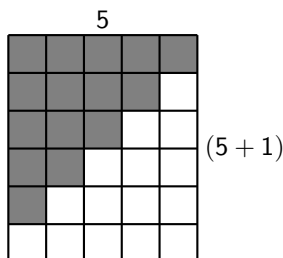
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

Man kan även visa samma exempel i bild:

Rita en enkel trappa av rutor, som symboliserar $1 + 2 + 3 + 4 + 5$:



För att få reda på hur många rutor det är i trappan, fyller vi först ut den med en likadan trappa, fast uppochnedvänd (det mörka partiet i figuren nedan):



Nu kan vi lätt räkna ut att hela figuren rymmer $(5 + 1) \cdot 5$ rutor $= 6 \cdot 5$ rutor.

Men då hade vi två trappor, vi skulle bara ha en. Därför måste vi dela med 2. Vi får åter:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

För summan av en godtycklig aritmetisk talföljd gäller det mer generella uttrycket:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \quad (*)$$

där S_n är summan av n termer i följd, där a_1 är den första termen och a_n den n :te termen. Vi tar ännu ett exempel:

Exempel: Beräkna $20 + 22 + 24 + 26 + 28 + 30$.

Summan innehåller 6 st termer. Den första termen är 20 och den sista termen är 30. Då är enligt formeln ovan

$$20 + 22 + 24 + 26 + 28 + 30 = \frac{(20 + 30) \cdot 6}{2} = 150$$

Smidigt eller hur?

Det allmänna uttrycket går också att använda direkt i glassexemplet. Vi kan exempelvis få fram hur många kombinationer med 2 kulor det går att finna med 10 olika smaker. Efter att ha sett tabell 2 vet vi att antalet kombinationer är summan av en aritmetisk talföljd:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$$

Summan innehåller 9 termer (se *). Den första termen (a_1) är 1 och den sista termen (a_n) är 9. Då är enligt formeln summan:

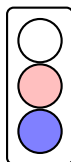
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = \frac{(1 + 9) \cdot 9}{2} = 45$$

Formel för antalet delmängder med k element ur en mängd med n element Allmänt gäller att om antalet kulor är 2 och antalet smaker är n (ett godtyckligt positivt heltal), så är antalet möjliga kombinationer:

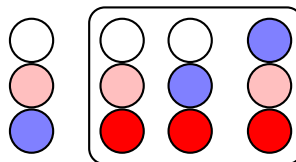
$$\frac{n \cdot (n - 1)}{2}$$

Detta brukar inom den högre matematiken uttryckas som "antalet delmängder med 2 element ur en given mängd med n element utan återläggning och utan hänsyn till ordning".

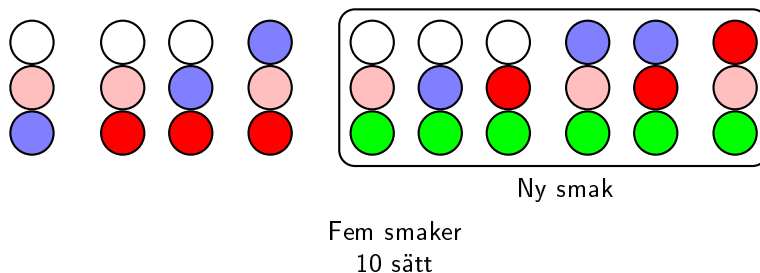
Vi kan undersöka lite närmare, vad som händer, om man ökar antalet glasskulor. Här följer i bild på hur många sätt vi kan kombinera 3, 4 och 5 smaker om vi har 3 olika kulor i glassen:



Tre smaker
1 sätt



Ny smak
Fyra smaker
4 sätt



Vi kan också göra tabeller; här visas en över 3 kulor, 4 smaker. Dubletter stryks.

	vanilj	jordgubb	blåbär	smultron
vanilj-jordgubb	–	–	vjb	vjs
vanilj-blåbär	–	vbj	–	vbs
vanilj-smultron	–	vsj	vsb	–
jordgubb-blåbär	jbv	–	–	jbs
jordgubb-smultron	jsv	–	j sb	–
blåbär-smultron	bsv	bsj	–	–

Det går faktiskt även här att uttrycka antalet kombinationer mer generellt. Det blir i fallet med 3 kulor:

$$\frac{n \cdot (n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Vi kan testa genom att stoppa in $n = 3$, $n = 4$ respektive $n = 5$ i formeln:

$$\begin{aligned}\frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} &= 1 \\ \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} &= 4 \\ \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} &= 10\end{aligned}$$

Tillägg: Formeln kan förklaras så här:

Antalet glassar med 3 kulor valda bland n smaker blir enligt multiplikationsprincipen $n(n-1)(n-2)$ om man tar hänsyn till ordningen. För att få antalet utan hänsyn till ordning kan man indela de $n(n-1)(n-2)$ glassarna i grupper där varje grupp har samma smaker men i olika ordning. Det finns $3 \cdot 2 \cdot 1$ glassar i varje grupp, för det är antalet sätt att ordna 3 olika smaker (också enligt multiplikationsprincipen). Antalet grupper blir då antalet glassar delat med antalet glassar per grupp.

För en glass med 4 olika kulor och n smaker gäller följande formel:

$$\frac{n \cdot (n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

och så där kan vi fortsätta.

Om vi vill ha k kulor (där k är ett godtyckligt positivt heltal) och fortfarande har n smaker att välja bland blir antalet på motsvarande sätt

$$\frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1))}{k!} \quad k \leq n$$

där $(n - (k - 1))$ alltså betyder n minus heltalet före k . Uttrycket $k!$ är en kortare skrivsätt för en multiplikation av alla positiva heltal fram till och med k :

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot k$$

För den som har studerat kombinatorik känns formeln

$$\frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1))}{k!} \quad k \leq n$$

igen som formeln för antalet delmängder av k element ur en mängd med n element, vilket brukar skrivas lite kortare (och utläsas "n över k") :

$$\binom{n}{k}$$

en formel som ger just antalet val utan återläggning, det vill säga att man endast får ta en kula av varje smak utan hänsyn till ordningen².

På motsvarande sätt kan man behandla de övriga tre fallen B, C och D i glassproblemet. Här har vi antecknat de allmänna formlerna för alla fyra fallen:

Smak Ordning	Varje smak kan väljas högst en gång till varje strut.	Varje smak kan väljas fler gånger till varje strut.
Kulornas ordning saknar betydelse	A $\binom{n}{k}$	B $\binom{n+k-1}{k}$
Kulornas ordning har betydelse	C $\frac{n!}{(n-k)!}$	D n^k

Dessa korta formler är ett bra exempel på vad mycket av matematiken går ut på, nämligen att söka och finna vackra matematiska mönster och beskriva dem så kortfattat man kan. Matematiker försöker alltid förenkla för sig!

Formulering av ett eget liknande problem För att eleverna ska få chansen att visa att de upptäckt och förstått det matematiska innehållet i uppgiften kan det vara lämpligt att de får formulera ett eget liknande problem och lösa det.

Med den här tämligen utförliga genomgången av ett av de fyra tänkbara fallen har vi visat på två saker:

1. Vikten av att läraren noggrant tänker igenom ett problem och dess tänkbara lösningsmetoder, innan hon ger det till sina elever.
2. Vikten av att läraren har mycket goda kunskaper i matematik för att kunna tillämpa en väl genomtänkt men samtidigt elevstyrd undervisning.

Vi vill återknyta till olika uttrycksformer, som vi diskuterade i kapitlet *Hur kan matematiska tankar uttryckas?*³ Vi går därför igenom de olika metoderna och visar på olika uttrycksformer som kan komma till användning vid var och en av dem. Vi vill dock tala om att vår genomgång inte kan bli helt fullständig. En påhittig elev kan säkert hitta ytterligare uttrycksformer att använda vid en given metod.

² Tillägg: Dessa tal, *Binomialtalen*, finns tabellerade i *Pascals triangel* på sidan 111.

³Ej inkluderat i detta dokument.

Exempel på hur olika uttrycksformer har använts i problemet *Glassarna* När eleverna letar osystematiskt med hjälp av en figur använder de sig av den grafisk/geometrisk uttrycksformen. När detta letande sker med hjälp av begynnelsebokstäver, är det i stället den algebraisk/aritmetiska uttrycksformen som kommer till användning. När eleverna tar hjälp av papperslappar i olika färger och på så sätt så att säga formar de olika glassarna använder de den konkreta uttrycksformen.

På motsvarande sätt kan det systematiska letandet ske logiskt/språkligt om de resonerar sig fram med hjälp av vanliga ord, med en grafisk/geometrisk uttrycksform om eleverna använder sig av en figur, en tabell eller ett träd-diagram, med en algebraisk/aritmetisk om de i stället utnyttjar bokstäver. En elev som använder konkreta uttrycksformer kan givetvis också leta systematiskt.

När eleverna letar efter matematiska mönster använder de till exempel den grafisk/geometrisk uttrycksformen tabell.

Då de med egna ord formulerar generella regler använder de en logisk/språklig uttrycksform. När de matematiska mönstren slutligen beskrivs med olika kortfattade formler – rekursionsformeln, formeln för summan av en aritmetisk talföljd och formeln för antalet delmängder med k element ur en mängd med n element – är det den algebraisk/aritmetiska uttrycksformen som kommer till användning.

2 Kramar

Detta är en samling mer eller mindre klassiska diskretmatematiska problem på samma tema. Normalt brukar de allihop handla om handskakningar, men personer i den här åldern brukar inte skaka hand på bjudningar. Däremot kramas de ofta.

I själva verket är grundproblemet identiskt med problem 1 (*Glassarna*), så resonemangen där fungerar även här (liksom övrigt material i det problemet). Problemen passar antagligen att göra med ett ganska långt mellanrum, så att man glömt detaljerna men ändå känner igen sig.

Vill man göra problemet enklare kan man börja med 2 och 3 personer. Vill man göra det svårare kan man starta direkt i n personer. (Det kan fungera i en erfaren elevgrupp, som vet att det brukar vara en bra idé att börja med de enkla fallen även om man inte säger det åt dem.)

2.1 Användbart material

- Papper, pennor i flera färger, linjal.

2.2 Svar till grundproblemet

- a) 6 kramar.
- b) 10 kramar.
- c) 45 kramar.
- d) 190 kramar.
- e) $\binom{n}{2} = 1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 - n}{2}$ kramar.
- f) —

2.3 Svar till utvidgningarna

Lika eller olika, udda eller jämnt?

- a) —
- b) Om det *inte* blivit åtminstone två lika svar så har något blivit fel i bokföringen.
- c) Se *lösningsstrategier*.
- d) Om det inte är ett jämnt antal som har udda värden så har något blivit fel.
- e) Se *lösningsstrategier*.

Gifta par

- a) 3 personer.
- b) 3 personer.

2.4 Matematiskt innehåll

Förkunskaper

Absolut nödvändigt:

- Addition och multiplikation
- Variabelbegreppet

Utbyte

Exakt vad man får beror på vilka av lösningsmetoderna man kommer på.

- Problemstrukturering
- Modellering (med graf)
- Flera metoder för samma problem
- Kombination av lösningsstrategier kan ge nya insikter
- Mönsterigenkänning
- **Begrepp:**
 - arimetisk talföljd,
 - summa av arimetisk talföljd,
 - algebraisk formel,
 - kombinatorikens additions- och multiplikationsprinciper,
 - rekursion,
 - urval (med och utan ordning och återläggning),
 - bevis av lösningars korrekthet,
 - icke-linjära samband,
 - postfacksprincipen⁴,
 - udda och jämna tal

2.5 Lösningsstrategier till grundproblemet

Tabell och leta mönster Oavsett hur man tittar på problemet så kan man samla resultaten i en tabell, där man sedan försöker se ett mönster.

Personer	1	2	3	4	5	...
Kramar	0	1	3	6	10	...

Det är inte så troligt att man lyckas läsa ut andragradsformeln ur detta, men systemet för ökningarna är inte så svårt att se.

Drop-in Anta att personerna kommer en i taget. Varje person tar då och kramar alla som redan är på partyt när den anländer. Detta antal är ett mindre än personens ”nummer” (så person 7 kramar de 6 som redan är där). Ger $1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1)$ kramar.

På rad Ställ upp personerna på rad. Person 1 går utmed raden och kramar de $n - 1$ övriga personerna. Sedan ska person 1 inte krama någon mer, utan går undan. Person 2 går nu utmed raden och kramar de $n - 2$ övriga. Och så vidare. Ger $(n - 1) + (n - 2) + \dots + 2 + 1$ kramar.

(Det finns ett antal andra sätt att visualisera processen som leder till denna formel. Jämför också resonemang 1 och 2 i problemet *Glassarna* på sidan 47.)

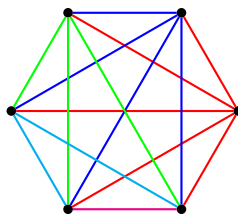
Cirkulera Vi antar att n är jämnt. Ställ upp personerna på två rader med $n/2$ personer, mitt emot varandra. Alla kramar personen mitt emot. Sedan flyttar sig raderna åt höger. Den som stod längst till höger flyttar över till vänstraste positionen i andra raden. Upprepa tills vi är tillbaka på ursprungsuppställningen. Ger $n - 1$ uppställningar där det varje gång görs $n/2$ kramar; $(n - 1) \cdot n/2$ totalt. Resonemanget kan modifieras till udda antal, där en person får stå över i varje steg.

⁴Också kallad *brevlådeprincipen*, *duvslagsprincipen* och *fågelholksprincipen*; alternativa översättningar av *pigeon hole principle*.

Multiplikationsprincipen Var och en av de n personerna kramar $n - 1$ andra. Blir $n(n - 1)$. Fast vi har dubbelräknat, varje kram har kommit med på två personers kon-ton. Halvera.

(Att resonera så här men missa halveringen är ganska vanligt. Jämför också resone-mang 3 i *Glassarna*, sidan 48.)

Modellering med graf Representera varje person med en plupp, och dra ett streck mel-lan varje par av personer för att representera kramen. Analysera antalet streck. (Ger tro-ligen antingen *på rad* eller *multiplikationsprincipen* som resultat.)



Detta är alltså ett exempel på det som inom den diskreta matematiken kallas *Grafteori*. "Plupparna" brukar kallas *noder* eller *hörn*, och "strecken" *kanter*. Om ingen kommer att tänka på att göra så här så bör man visa det – tekniken är så generellt användbar att man bör ha sett den.

Klassisk kombinatorik Om någon råkar kunna standardkombinatorik så kan den se pro-blemet som antal sätt att ta ut 2 personer bland n möjliga utan hänsyn till ordning och utan återläggning. Varje sådan uttagning motsvarar en kram som ska göras. Detta kan beräknas som ett binomialtal:

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1}$$

Summan De flesta resonemangen landar på summan av en aritmetisk talföljd. Olika sätt att resonera för att gå från summan till $n(n - 1)/2$ finns beskrivna i *Glassarna* på sidan 49.

2.6 Lösningsstrategier till utvidgningarna

Lika eller olika, udda eller jämnt?

Varför två måste ha samma antal:

Postfacksprincipen Tänkbara antal är allt mellan 0 (krama ingen) och $n - 1$ (krama alla). Detta är n möjliga antal. (Här finns risk för "fence post error"; att man tror att eftersom sista värdet är $n - 1$ så är antalet värden $n - 1$.)

Dock kan inte 0 och $n - 1$ existera samtidigt; finns det en 0:a så finns det inte en $n - 1$:a, och tvärtom. (Om någon kramat ingen så kan det inte samtidigt finnas någon som kramat alla.) Så det finns alltså $n - 1$ *samtidigt* möjliga värden.

Se nu de $n - 1$ värdena som postfack och de n personerna som brev. Varje person ska få ett värde, vilket motsvarar att brevet ska stoppas in i ett brev-fack. $n - 1$ postfack för

n brev räcker inte till för att alla breven ska kunna hamna i olika fack. Så åtminstone två måste hamna ihop. (Det är alltså detta som kallas *postfacksprincipen*.)

Varför det finns ett jämnt antal uddakramare:

Dubbelräkning Varje kram involverar 2 personer, så om man frågar alla hur många de kramat får man antalet kramar gånger 2, vilket är ett jämnt tal. Ska man addera fram ett jämnt tal måste man ta ett jämnt antal udda tal (och valfritt antal jämna tal), annars blir svaret udda. Så det måste vara ett jämnt antal udda-kramare.

Induktion Innan några alls kramats fanns det 0 personer som kramats ett udda antal gånger. Vad händer sedan när folk börjat kramas?

- Om två som båda kramats ett udda antal gånger kramar varandra så blir de "jämna", och antalet udda kramare har minskat med två. Var antalet jämnt innan så är det fortfarande jämnt.
- Om två "jämna" kramas omvandlas de till "udda", och antalet udda kramare ökar med två. Var antalet jämnt innan så är det fortfarande jämnt.
- Och om en "jämna" kramar en "udda" byter de kategori med varandra, och antalet udda kramare är oförändrat. Var antalet jämnt innan så är det jämnt efter.

Antalet udda kramare var jämnt från början, och inget vi gör kan ändra på detta. Det fortsätter att vara jämnt.

Modellering med graf Grafmodellen kan också här vara användbar. Varje person representeras med en nod, de kramar som görs av kanter. För varje nod kan man studera antalet kanter som ansluter till noden, nodens *grad* eller *valens*. Graden hos en nod motsvarar antalet kramar som personen deltagit i. Eftersom varje kant har två ändar kommer summan av gradtalen bli två gånger antal kanter, vilket är ett jämnt tal. Och en summa som blir jämn måste innehålla ett jämnt antal udda termer.

(Den grafteoretiska sats som säger att antalet noder med udda grad är jämnt kallas *handskakningslemmat*, just baserat på det här problemet som oftast formuleras som räkning av handskakningar.)

Gifta par

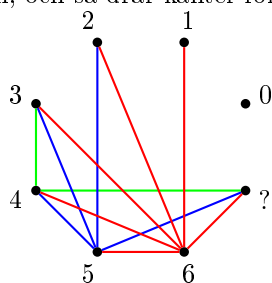
Eftersom ingen skakat hand med alla var maximala antalet handskakningar 6. Om de 7 tillfrågade gav olika svar måste dessa vara talen 0 till 6.

Resonemang i ord

- Den som skakade hand med 6 personer måste ha gjort det med alla utom den som skakade hand med noll stycken. Har då bland annat skakat hand med damen. Den med noll skakningar måste vara den som är gift med denna person.
- Den som skakade hand med 5 personer måste ha gjort det med alla utom "nollan" (som inte skakat med någon) och "ettan" (som redan gjort av med sin skakning på "sexan"). Har alltså skakat hand med damen. "Ettan" måste vara gift med den här personen.
- Den som skakade hand med 4 personer måste ha gjort det med alla utom "nollan", "ettan" och "tvåan", för de har gjort av med sina skakningar på föregående personer. Har skakat hand med damen, måste vara gift med "tvåan".
- "Trean" finns med bland de som skakat med "sexan", "femman" och "fyran", och ska alltså inte skaka hand med någon mer. Så damen har de tre skakningar vi redan om-

nämnt och inga mer. Och damen och "trea" måste vara gifta med varandra (för det finns inga andra kvar som de skulle kunna vara gifta med – *uteslutningsmetoden*).

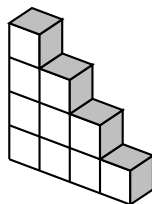
Grafisk lösning Det föregående resonemanget kan också genomföras grafiskt, genom att man ritar en nod för varje person, och så drar kanter för handskakningarna.



3 Tornet

Problemet är taget ur *Rika matematiska problem* av Kerstin Hagland, Rolf Hedrén och Eva Taflin, © författarna och Liber 2005. Återgivet med tillstånd. Bokens lärarsidor innehåller betydligt mer än vad vi fått rum med här.

Problemet är ganska avancerat, och det är därför bra om man har gjort några lite lättare ”mönsterproblem” innan. Det finns också möjlighet att förenkla problemet, t.ex. till bara en trappa och formulera motsvarande frågor baserat på den.



3.1 Användbart material

- Klossar (i stort antal).
- Rutat papper, linjal.
- Eventuellt: miniräknare.

3.2 Svar

- 1) 28 kuber.
- 2) 276 kuber.
- 3) $1 + 5 + \dots + (4(n - 1) + 1) = 4 \cdot (1 + 2 + \dots + (n - 1)) + n = n(2n - 1)$ kuber.
- 4) —

3.3 Matematiskt innehåll

Något om matematiken i problemet, ur Rika matematiska problem.

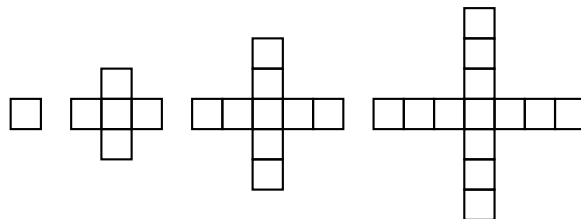
Här följer en kortfattad lista med exempel på matematiska kunskaper som elever och lärare kan använda sig av och utveckla under lösningen av problemet:

- naturliga tal
- tabell
- mönster
- aritmetisk talföljd
- area
- plangeometrisk figur
- rymdgeometrisk figur
- variabelbegrepp
- formel.

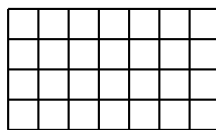
3.4 Lösningsstrategier

Kortfattade exempel på lösningar av problemet Tornet, ur Rika matematiska problem.

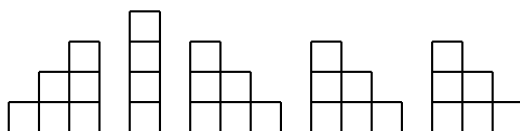
Använda konkret material Bygg upp tornet på riktigt med hjälp av någon typ av klossar. Räkna klossarna. Försök hitta matematiska mönster. Om man lägger klossarna plan för plan bredvid varandra som i figuren nedan, kan man exempelvis upptäcka att det ökar med 4 klossar för varje nytt plan.



Packar man ihop dem som i figuren nedan, kan man lätt upptäcka att totala antalet klossar i ett 4-våningstorn är $4 \cdot 7 = 28$ st.



Rita en bild 1 Dela i tanken upp tornet i plana figurer och rita dem. Räkna kuberna. Försök hitta matematiska mönster.



Här kan man exempelvis upptäcka att antalet bitar i 4-våningstornet är $4 \cdot (1 + 2 + 3) + 4 = 4 \cdot 6 + 4 = 28$

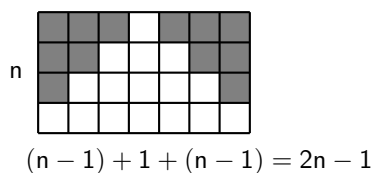
På motsvarande sätt kan man rita upp och räkna ut delproblem b:
 $4 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11) + 12 = 4 \cdot 66 + 12 = 276$

Rita en bild 2 Sätt i tanken samman kuberna på ett sätt som underlättar uträknandet av totala antalet kuber, till exempel som en rektangel. Försök hitta matematiska mönster.



I figuren ovan har två av tornets "vingar" lagts upp och ned mot de andra två. Mittpelaren är kvar i mitten.

Här kan man se att om tornet är n bitar högt så är rektangelns höjd n och rektangelns bredd $(2n - 1)$:



Då är totala antalet bitar $n(2n - 1)$.

Göra en tabell Tänk ut hur många kuber det finns på plan efter plan. Börja uppifrån. Anteckna resultatet i en tabell. Försök hitta matematiska mönster.

uppifrån sett	antal kuber på planet	totalt antal kuber	
plan 1	$1 + 4 \cdot 0 = 1$	1	
plan 2	$1 + 4 \cdot 1 = 5$	$1 + 5 = 6$	
plan 3	$1 + 4 \cdot 2 = 9$	$1 + 5 + 9 = 15$	
plan 4	$1 + 4 \cdot 3 = 13$	$1 + 5 + 9 + 13 = 28$	Insikter: *Det ökar med 4 kuber för varje nytt plan. *Totala antalet kuber är summan av en aritmetisk talföljd där det är 4 mellan varje tal, där det första talet är 1 och det sista talet är antalet kuber i detta plan.
...			
plan 12	$1 + 4 \cdot 11 = 45$	$\frac{(1 + 45)12}{2} = 276$	
plan n	$1 + 4 \cdot (n - 1) = 4n - 3$	$1 + \dots + (4n - 3) = \frac{n(1 + (4n - 3))}{2} = n(2n - 1)$	

Det egna problemet När det gäller det egna matematiskt liknande problemet, så är det, som vi ser det, bra om följande punkter finns med:

- det bör handla om en tredimensionell figur som byggs av mindre, lika stora, delar
- lösaren ska upptäcka att figuren växer på ett bestämt sätt
- lösaren ska kunna beskriva totala antalet smådelar i figuren med hjälp av summan av en aritmetisk talföljd
- lösaren ska förkorta denna summa till en generell formel där n ingår
- lösaren ska uppmanas att hitta på ett eget liknande problem och lösa det.

Se även listan under rubriken Något om matematiken i problemet. Vilken matematik har eleven fått med i sitt eget problem?

4 Buskar på rad

Problemet är taget ur *32 rika problem i matematik* av Maria Larsson, ○ Maria Larsson och Liber 2007. Återgivet med tillstånd.

4.1 Användbart material

- Rutat papper, linjal, färgpennor.
- Kvadratiske plattor eller klossar i två färger (t.ex. mosaik; blåser inte bort om man nyser...)
- Eventuellt miniräknare.

4.2 Svar till grundproblemet

1. a) 23 plattor.
b) 28 plattor.
c) 53 plattor.
d) 503 plattor.
e) $5n + 3$ plattor.
2. 41 buskar.
3. —
4. —

4.3 Svar till utvidgningarna

1. a) 21 plattlängder
b) 25 plattlängder
c) 45 plattlängder
d) 405 plattlängder
e) $4n + 5$ plattlängder
2. a) 27 plattareor
b) 33 plattareor
c) 63 plattareor
d) 603 plattareor
e) $3 \cdot (2n + 1)$ plattareor
3. a) $4/27 \approx 14,8\%$ jord
b) $5/33 \approx 15,2\%$ jord
c) $10/63 \approx 15,9\%$ jord
d) $100/603 \approx 16,6\%$ jord
e) $n/3 \cdot (2n+1)$ jord.
4. Andelen jord går mot $1/6 \approx 1,667\%$.

4.4 Matematiskt innehåll

Detta avsnitt är nyskrivet till problembanken.

Förkunskaper

För att över huvud taget kunna göra något med uppgiften:

- Addition och multiplikation (och sambandet mellan dessa räknesätt).

För att få fullt utbyte:

- Algebraisk notation (med variabel)

- Algebraiska omskrivningar (inklusive distributiva lagen)
- Ekvationslösning.

Om man väljer att gå in på utvidgningarna:

- Area

Utbyte

- Olika strategier för samma problem
- Mönsterigenkänning
- Formulering av verklighetsproblem i matematiska termer (modellering)
- Olika sätt att formulera algebraiska uttryck, och hur de kan omformas till varandra. Uttryckets form i relation till den beskrivna verkligheten.
- Parenteser och prioritetsordning
- **Begrepp:**
linjära samband,
algebraiska formler,
area,
rekursion,
ekvation

4.5 Lösningsstrategier till grundproblemet

Detta avsnitt är taget ur 32 rika problem i matematik.

Använd konkret material Om man lägger plattor med till exempel stenar, lego eller tärningar går det att se att man för varje buske lägger till 5 plattor med formen av ett spegelvänt C.



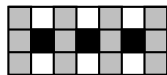
Antalet plattor ökar alltså med 5 för varje ny buske. Eftersom man startar med 3 lodräta plattor samt ett spegelvänt C måste formeln för antal plattor vara $3 + 5n = 5n + 3$ där n är antalet buskar.

Sätt upp en tabell

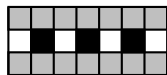
Antal buskar	Antal plattor
1	8
2	13
3	18
4	23
5	28
...	...
10	53
...	...
15	78
...	...
n	$5n + 3$

För varje ny buske ökar antalet plattor med 5. Eftersom det är 8 plattor runt den första busken kan formeln skrivas som $5n + 3$, där n är antalet buskar.

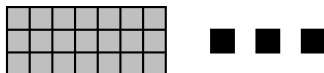
Rita en bild och resonera logiskt Man kan utgå från lodräta rader av plattor. Mellan varje buske samt i ändarna är det en lodrät rad med tre plattor. Sedan är det även en platta över och under varje buske. Om n är antalet buskar kan antal plattor över och under buskarna uttryckas som $2n$ och antal plattor mellan buskarna och vid ändarna kan tillsammans uttryckas som $3(n + 1)$. Totala antalet plattor kan uttryckas som $2n + 3(n + 1) = 2n + 3n + 3 = 5n + 3$, där n är antalet buskar.



Ett alternativt resonemang är att utgå från horisontella rader av plattor. Den övre och undre raden består vardera av $2n + 1$ plattor. Plattorna mellan buskarna samt i ändarna är $n + 1$ stycken. Totalt är det $(2n + 1) + (2n + 1) + (n + 1) = 5n + 3$ plattor, där n är antalet buskar.



Ett tredje resonemang är att utgå från hela rektangeln och sedan dra ifrån buskplanteringarna. Totala antalet plattor blir $3(2n + 1) - n = 6n + 3 - n = 5n + 3$, där n är antalet buskar.



Ställ upp en ekvation För att ta reda på hur många buskar Camilla måste plantera om hon har 208 plattor kan man ställa upp följande ekvation där n är antalet buskar:

$$\begin{aligned} 5n + 3 &= 208 \\ 5n &= 205 \\ n &= \frac{205}{5} = 41 \end{aligned}$$

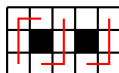
Det finns alltså utrymme för 41 buskar.

Följande Lösningssvarianter finns inte med i 32 rika problem, utan har vidarebefordrats av lärare som använt boken:

Fler bildalternativ Runt varje buske ligger 8 plattor. $8n$ ger dock dubbelräkning av plattor som ligger mellan två buskar. Finns $n - 1$ sådana platt"kolumner", med 3 plattor i varje. Ger $8n - 3(n - 1)$ plattor.



Kvadraten runt första busken kan ses som hopsatt av två L-formade bitar, med 4 plattor i varje. För varje buske man sedan lägger till lägger man på ytterligare ett L, och dessutom en platta i kanten. Ger $4(n + 1) + (n - 1)$ plattor.



4.6 Lösningsstrategier till utvidgningarna

Detta avsnitt är nyskrivet till problembanken.

I princip alla metoderna och sätten att se på mönstret kan också användas här. Den sista deluppgiften innehåller dock lite nytt:

Gränsvärdesresonemang Andelen jord blir

$$\frac{n}{3(2n+1)} \approx \frac{n}{3 \cdot 2n} = \frac{1}{6}$$

När n är stort så blir 1:an försumbar i förhållande till övriga värden.

Man kan också se det som att varje "busktillägg" har arean 6 plattareor, varav en är jord. Det enda som avviker från det mönstret är de tre plattorna i början. När n är stor är de inte mycket att bry sig om, och då är jordarean ungefär $1/6$ av det hela.

4.7 Kommentarer

Detta avsnitt är nyskrivet till problembanken.

I alla problem som handlar om mönster kan man hamna i en diskussion om hur mycket man behöver motivera. Om man ställt upp en tabell för de första tio fallen och upptäcker att varje fall är 5 mer än det förra, kan man då säga att sambandet *är* så?

En matematiker svarar nej. Man kan ställa upp *hypotesen* att så är fallet, men innan man har en förklaring till *varför* kan man inte vara säker. Mönsterigenkänning är bara första steget. Mer om detta finns i avsnitt 15.7 på sidan 112.

(Personligen är jag av sådana här skäl inte så förtjust i uppgifter av typ "skriv upp nästa tal i serien". Det går alltid att hitta ett antal olika mönster som början av serien passar in på, och "nästa tal" blir ju helt olika beroende på vilket mönster man hittat. I *Fem myror är fler än fyra elefanter* brukade det ingå en "sortera bort den som inte passar in"-uppgift, som deltagarna löste på helt olika sätt. Den uppgiften gillade jag. Hillevi Gavel)

5 Lägga plattor runt rabatter

Det här problemet förekommer i många böcker med mönsteranalys. Den här versionen är formulerad av Cecilia Christiansen och Maria Larsson. Det passar inte att ta direkt i anslutning till *Buskar på rad*, eftersom problemen är mycket lika. Men har man gjort det ena ett läsår så kan det passa att inleda med det andra nästa läsår.

5.1 Användbart material

- Rutat papper, linjal, färgpennor.
- Kvadratiske plattor i två färger (t.ex. mosaik; blåser inte bort om man nyser. . .)
- Eventuellt miniräknare.

5.2 Svar

1. a) 14 plattor.
b) 16 plattor.
c) 34 plattor.
d) 114 plattor.
2. Ett område motsvarande $n \times 1$ plattor är omgivet av en 1 platta bred ram. (Kan formuleras på många sätt!)
3. $2n + 6$
4. 76 plattor långt.
5. —

5.3 Matematiskt innehåll

Förkunskaper

För att över huvud taget kunna göra något med uppgiften:

- Addition och multiplikation (och sambandet mellan dessa räknesätt).

För att få fullt utbyte:

- Algebraisk notation (med variabel)
- Algebraiska omskrivningar (inklusive distributiva lagen)
- Ekvationslösning
- Mönsterigenkänning

Om man väljer att gå in på utvidgningarna:

- Area

Utbyte

- Olika strategier för samma problem
- Mönsterigenkänning
- Formulering av verklighetsproblem i matematiska termer (modellering)
- Olika sätt att formulera algebraiska uttryck, och hur de kan omformas till varandra. Uttryckets form i relation till den beskrivna verkligheten.
- Parenteser och prioritetsordning
- **Begrepp:**
linjära samband,
algebraiska formler,
area,

rekursion,
ekvation

5.4 Lösningsstrategier

Analys av mönstret

Bygg och räkna antingen genom att rita på rutat papper eller genom att bygga olika storlekar på rabatter. Det generella uttrycket går ju inte att få fram med denna teknik, men de övriga går. (Storlek 54 blir nog ganska tråkig att lösa så här, men det är möjligt.)

Denna metod kan mycket väl vara en inledande undersökning till någon av de efterföljande.

Tabell med analys för att hitta mönster; sammanställning av *Bygg och räkna*:

storlek	1	2	3	4	5	6	...
plattor	8	10	12	14	16	18	...

Detta känner man igen som 2:ans tabell flyttad ett par steg, och det motsvarar formeln $2n + 6$.

Kant och två ändplattor Över- och nedkant har längd $n + 2$, och så har vi 2 plattor i ändarna på rabatten: $2(n + 2) + 2$.



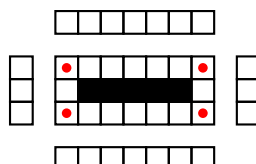
Kanter och fyra hörn Ovan- och nedanför rabatten har vi n plattor, till höger och vänster 1 platta, och så är det 4 hörn: $2n + 2 + 4$.



Sidor och nedkant 3 plattor i vardera sidan, och så n plattor över och under rabatten: $2 \cdot 3 + 2n$.

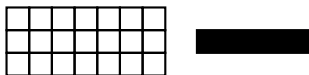


Kantlängd (Felaktig) Längden på över- och nedkant är $n + 2$, längden på sidorna 3, så det blir $2(n + 2) + 2 \cdot 3$.

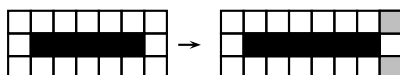


Kantlängd – med korrigering Längden på över- och nedkant är $n + 2$, längden på sidorna 3, så det blir $2(n + 2) + 2 \cdot 3$. Fast då har de 4 hörnen kommit med 2 gånger, korrigera: $2(n + 2) + 2 \cdot 3 - 4$. (Samma figur som i föregående resonemang.)

Rektangel med hål Hela rabatten är rektangulär, med sidorna $n + 2$ och 3. Hålet motsvarar n plattor. Totalt $(n + 2) \cdot 3 - n$.



Rekursivt Ska vi förstora en figur så får vi flytta plattan i ändan ett steg och lägga på 2 nya hörnplattor. Blir alltså 2 plattor mer för varje figur.



Rabattens längd

Tabell Man kan fylla i tabellen tills man når till 158 plattor och så läsa av. (Ganska tråkigt men fullt genomförbart.)

Ställ upp en ekvation Man kan ställa upp en ekvation utgående från den formel man har tagit fram:

$$2n + 6 = 158$$

$$2n = 152$$

$$n = 76$$

5.5 Kommentarer

Se kommentarerna till *Buskar på rad* på sidan 68.

6 En brakmiddag

Problemet är taget ur *32 rika problem i matematik* av Maria Larsson, © Maria Larsson och Liber 2007. Återgivet med tillstånd.

Detta problem kan väl inte med bästa vilja i världen klassas som *realistiskt*, men det är så uppenbart orealistiskt att de flesta elever som provat uppgiften tycker att det är roligt. Vill man sedan ha realism också så kan man gå vidare till utvidgningarna, som fokuserar på den aspekten.

Problemet svårighetsgrad kan ökas eller minskas genom att man ändrar antalet aktörer som gör något eller genom att man ändrar siffrorna. Problemets sammanhang kan också ändras till att exempelvis handla om personer som målar staket eller klippar gräs eller om badkar som ska fyllas.

Det kan behövas att man vid introduktionen av problemet understryker att djuren äter *samtidigt*. En del elever tänker sig också att det ska vara rättvist så tillvida att djuren får äta lika mycket, något som man också kan diskutera vid introduktionen av problemet. (Här blir det ju inte rättvist!)

6.1 Svar till grundproblemet

1. 2 timmar.
2. 1 timme och 20 minuter.

6.2 Svar till utvidgningarna

1. Antagligen börjar djuren slåss, och det slutar med att vinnaren äter hela fåret. Även om de inte gör detta så bör de vara ivägen för varandra och därmed inte äta i samma hastighet som om de var ensamma.
2. Troligen äter man fortare i början än i slutet. Den som saktar av först får mest nackdel av det hela, för då hinner de andra äta upp mer än sin beräknade andel.
3. Se *lösningsstrategier*.

6.3 Matematiskt innehåll

Detta avsnitt är nyskrivet till problembanken.

Förkunskaper

För att över huvud taget kunna göra något med uppgiften:

- Bråkräkning
- Tidsenheter

Bra att ha:

- Ekvationslösning

Utbyte

- Olika strategier för samma problem.
- Formulering av "verklighetsproblem" i matematiska termer (modellering)
- Bråkräkning i sammanhang
- Diskussion om det realistiska i den matematiska modellen

- **Begrepp:**

bråk (addition och division),
proportionalitet,
ekvation,
hastighet.

6.4 Lösningsstrategier till grundproblemet

Detta avsnitt är kopierat ur *32 rika problem i matematik*.

Resonera logiskt Lejonet äter $\frac{1}{3}$ får och björnen $\frac{1}{6}$ får på en timme. Tillsammans äter de $\frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ får på en timme. Det tar alltså 2 h för lejonet och björnen att tillsammans äta upp ett får. Man kan också säga att på 6 h äter björnen ett får och lejonet två får. Tillsammans äter de alltså tre får på 6 h, vilket ger att det tar 2 h för dem att äta ett får.

När alla tre djuren äter kan man utgå ifrån att lejonet och björnen tillsammans äter $\frac{1}{2}$ får på en timme. Leoparden äter $\frac{1}{4}$ får på en timme. Alla tre djuren äter då $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ får på en timme. De har då $\frac{1}{4}$ får kvar att äta vilket måste ta $\frac{1}{3}$ h, alltså 20 min. Totalt tar det 1 h 20 min för alla tre att äta ett får. Man kan också säga att på 4 h äter leoparden ett får och lejonet och björnen äter tillsammans två får, alltså tre får totalt. Det ger att de äter ett får på $\frac{4}{3}$ h, som är 1 h 20 min.

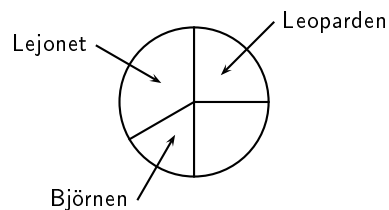
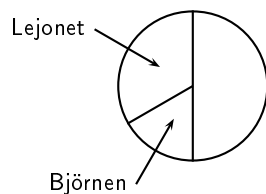
Sätt upp en tabell

Antal timmar	Antal får lejonet äter	Antal får björnen äter	Antal får leoparden äter	Antal får alla äter
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	
2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	
3	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	
4	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	
5	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{4}$	
6	2	1	$\frac{3}{2}$	
12	4	2	3	9

Lejonet och björnen äter tillsammans 3 får på 6 h, vilket ger att det tar 2 h att äta ett får för lejonet och björnen tillsammans. Alla tre djuren äter tillsammans 9 får på 12 h. Det tar alltså $\frac{12}{9} \text{ h} = \frac{4}{3} \text{ h} = 1 \text{ h } 20 \text{ min}$ för dem att äta ett får.

Använd konkret material Lejonet äter dubbelt så snabbt som björnen. Det betyder att lejonet äter dubbelt så mycket som björnen på lika lång tid. Om man lägger två gula legobitar (det lejonet äter) och en brun legobit (det björnen äter) bredvid varandra, så ser man att lejonet och björnen tillsammans äter tre gånger så mycket som björnen ensam äter på lika lång tid. Lejonet och björnen äter alltså tre gånger så snabbt som björnen ensam. Då tar det $\frac{6}{3} \text{ h} = 2 \text{ h}$ för lejonet och björnen att äta ett får. På samma sätt kan man utgå ifrån att lejonet och björnen tillsammans äter ett får dubbelt så fort som leoparden. Om man lägger legobitar kan man dra slutsatsen att det tar $\frac{4}{3} \text{ h} = 1 \text{ h } 20 \text{ min}$ för alla tre djuren att tillsammans äta ett får.

Rita en bild Lejonet äter ett får på 3 h och björnen äter upp ett får på 6 h. Alltså äter lejonet $\frac{1}{3}$ får och björnen $\frac{1}{6}$ får på en timme. Om en cirkel föreställer ett helt får kan man rita in hur stor del lejonet och björnen äter. Då ser man att de äter $\frac{1}{2}$ får på en timme. Alltså tar det 2 h för lejonet och björnen tillsammans att äta ett helt får.



På samma sätt kan man rita in att lejonet och björnen äter $\frac{1}{2}$ får och leoparden $\frac{1}{4}$ får på en timme. Då ser man att alla tre djuren tillsammans äter $\frac{3}{4}$ får på en timme. Alltså tar det $\frac{1}{3}$ timme = 20 min till att äta $\frac{1}{4}$ får till, så det tar 1 h 20 min totalt.

Ställ upp en ekvation Lejonet äter $\frac{1}{3}$ får, björnen $\frac{1}{6}$ får och leoparden $\frac{1}{4}$ får på en timme. Om man antar att det tar t timmar för alla djuren tillsammans att äta upp fåret kan man ställa upp följande ekvation:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right)t &= 1 \\ \frac{9}{12}t &= \frac{3}{4}t = 1 \\ t &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

De tre djuren äter alltså ett får på 1 h 20 min.

6.5 Lösningsstrategier till utvidgningarna

Genom att diskutera det realistiska i problemet kan man också synliggöra vilka (ofta outtalade) förutsättningar som gäller i sådana här problem. De är värda att skärskåda, för vid "riktig" problemlösning brukar man verkligen behöva bedöma vad förutsättningarna är.

Realistisk variant Här gäller det att få eleverna att släppa djuren och fundera på något som verkligen är realistiskt. Här är en rimlig variant (där förutsättningarna "håller samma tempo hela tiden" och "interfererar inte med varandra" kan anses vara uppfyllda):

En fabrik har flera olika maskiner, som kan tillverka ett lass av en produkt på olika givna tider. Hur lång tid tar det att få ihop ett fullt lass om man använder alla maskinerna till detta ändamål?

7 Andel av andel

Problemen är formulerade av Karin Pollack och Cecilia Christiansen. Månadspengen är den enklare varianten. I boken *Tema problemlösning i matematik* av Cecilia Christiansen och Doris Lindberg finns ett problem, *Pengar*, som bygger på samma grundidé.

7.1 Användbart material

- Pennor, rutat papper (gärna millimeterrutat).
- Eventuellt: miniräknare. (Beror på vad man vill fokusera på i uppgiften.)

7.2 Svar till grundproblemet

Månadspeng

- a) 600 kronor.
- b) —

Emmas USB-minne

- a) 6 GB upptaget.
- b) —

7.3 Svar till utvidgningarna

- a) Om man låter alla villkor vara av typen "ta mindre än 100 % av tillgänglig resurs" så går det alltid att bestämma "resurs från början".
I ett problem upplagt som USB-minnet, där man bestämmer hur mycket av utrymmet som var upptaget från början, kan man dock råka välja siffrorna så att det lediga utrymmet som fordras är större än det totala minnesutrymmet. Det givna problemet skulle exempelvis vara olösligt för ett 4 GB-minne. (Se också *Verklighetskontroll*.)
- b) Realisationer, t.ex. "Jag behövde bara betala 189 kronor för den här kappan, för först så var den nedsatt 30 %, och sedan var det halva priset på allt just den dagen och så hade jag en rabattkupong som gav 10 % rabatt".
- c) $2^{30} = 1\,073\,741\,824$ Byte, där en Byte är 8 bitar, d.v.s. 8 binära siffror.
- d) Nej, för utrymmet består av ett antal odelbara enheter, o h det antalet är inte delbart med 7.

7.4 Matematiskt innehåll

Förkunskaper

- Decimaler
- Bråkräkning
- Procent
- Sambanden mellan ovanstående
- Andelar
- Ekvationslösning

Utbyte

- Formulering av verklighetsproblem i matematiska termer (modellering)
- Förstärkning och sammanhang för det som räknas upp under *förkunskaper*.

7.5 Lösningsstrategier till grundproblemet

Ta och lämna Man måste ha klart för sig t.ex. att om man tar 60 % av tillgänglig resurs så lämnar man 40 %. (Där kan det lätt bli fel.)

Tomt utrymme/fullt utrymme (USB) I alla Lösningsvarianter måste man hålla reda på vad som är tomt utrymme och vad som är fullt utrymme.

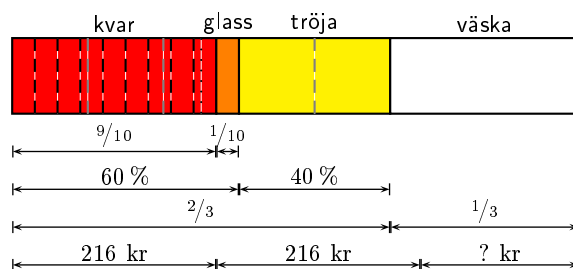
Beräkningarna med variabler kan allihop ställas upp med antingen tomt utrymme eller fullt utrymme som variabel. Beräkningarna nedan har det tomma utrymmet; genom att byta x mot $8 - x$ får man en lösning med det fulla utrymmet istället. (Ekvationerna blir enklare då man arbetar med det tomma utrymmet, men man blir tvungen att göra ett sista steg för att få fram svaret på frågan.) Det kan vara intressant att jämföra två lösningar som har var sitt angreppssätt men som är identiska för övrigt.

Räkna baklänges – grafiskt *Månadspeng:* Rita en rektangel som representerar 216 kronor. Dela den i 9 bitar, rita till en sådan del. Det ger pengar innan glassköpet.

Dela denna rektangel i 3 delar och rita till 2 sådana. Ger pengar innan tröjan.

Dela denna rektangel i två delar och rita till en sådan. Ger pengar från början. Mät/läs av och relatera till använd skala.

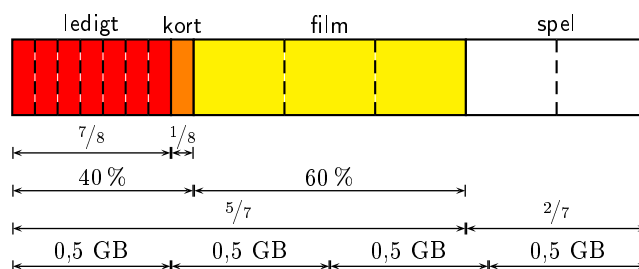
Hur pass bra denna lösning blir beror mycket på vilken skala man använde och hur exakt man ritar.



USB-minne: Rita en rektangel som representerar 0,5 GB. Dela den i 7 delar, rita till en sådan del. Det ger ledigt minne innan korten.

Dela denna rektangel i 2 delar och rita till 3 sådana. Ger utrymmet innan filmen.

Dela denna rektangel i 5 delar, och rita till 2 sådana. Nu har vi en rektangel som motsvarar utrymmet från början. Se efter hur många av den ursprungliga rektangeln det motsvarar.



Här kan man notera att *USB-minne*, som har svårare siffreräkning, trots detta är enklare än *Månadspeng* att lösa exakt med just den här tekniken.

Räkna baklänges – utan variabler *Månadspeng:* 216 kronor är det som finns kvar på slutet av månadspengen. Det är $\frac{9}{10}$ av det som fanns innan glassen köptes. Då måste pengarna som fanns då vara $\frac{10}{9} \cdot 216 = 240$ kronor.

Det var 60 % av det som fanns innan köpet av tröjan. Då måste summan innan dess ha varit $\frac{1}{0,6} \cdot 240 = 400$ kronor.

Det var $\frac{2}{3}$ av ursprungssumman, som måste ha varit $\frac{3}{2} \cdot 400 = 600$ kronor.

USB-minne: 0,5 GB är det som finns kvar på slutet i USB-minnet. Det är $\frac{7}{8}$ av vad som fanns innan korten lades upp. Då måste utrymmet som fanns då vara $\frac{8}{7} \cdot 0,5 = \frac{4}{7} \approx 0,57$ GB.

Det utrymmet var 40 % av det som fanns innan filmen lades upp. Då måste utrymmet som fanns innan dess varit $\frac{1}{0,4} \cdot \frac{4}{7} = \frac{10}{7} \approx 1,43$ GB.

Det utrymmet var $\frac{5}{7}$ av det som fanns innan spelen laddades ner. Då måste utrymmet som fanns innan dess varit $\frac{7}{5} \cdot \frac{10}{7} = 2$ GB.

I så fall var $8 - 2 = 6$ GB upptaget från början.

Räkna baklänges – med variabler Sätt namn på "det man hade innan", och lös ekvationsserien

$$\frac{9}{10}x = 216 \quad 0,6y = x \quad \frac{2}{3}z = y \quad \text{alternativt} \quad \frac{7}{8} \cdot x = 0,5 \quad 0,4y = x \quad \frac{5}{7}z = y$$

Här kan en intressant diskussionsfråga vara om man kan kalla alla de obekanta "x" eller inte. Man kan inte kalla två olika saker vid samma namn i samma problem, men det är OK att använda samma namn i olika problem. Är detta ett enda problem eller tre olika problem på raken?

Räkna framlänges – multiplikativt Kalla det vi hade från början för x . Vi har att

$$x \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,6 \cdot \frac{9}{10} = 216 \quad \text{alternativt} \quad x \cdot \frac{5}{7} \cdot 0,4 \cdot \frac{7}{8} = 0,5$$

vilket ger

$$x = 216 / \frac{9}{25} = 600 \text{ kronor} \quad \text{alternativt} \quad x = 0,5 / \frac{1}{4} = 2 \text{ GB}$$

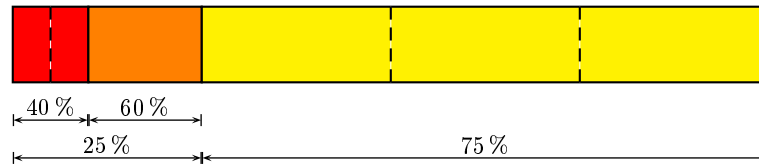
Här finns varianterna att multiplicera ihop alla konstanterna och sedan dela, och att dela med konstanterna en i taget.

Räkna framlänges – tabell Kalla det vi hade från början för x . Ställ upp hur mycket vi vid varje tidpunkt hade kvar, och hur mycket av detta som vi då gjorde av med.

	Kvar	Används	Kvar	Används
1.	x	$\frac{1}{3} \cdot x$	x	$\frac{2}{7} \cdot x$
2.	$\frac{2}{3} \cdot x$	$0,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot x$	$\frac{5}{7} \cdot x$	$0,6 \cdot \frac{5}{7} \cdot x$
3.	$0,6 \cdot \frac{2}{3} \cdot x$	$\frac{1}{10} \cdot 0,6 \cdot \frac{2}{3} \cdot x$	$0,4 \cdot \frac{5}{7} \cdot x$	$\frac{1}{8} \cdot 0,4 \cdot \frac{5}{7} \cdot x$
4.	$\frac{9}{10} \cdot 0,6 \cdot \frac{2}{3} \cdot x = 216$		$\frac{7}{8} \cdot 0,4 \cdot \frac{5}{7} \cdot x = 0,5$	

Räkna framlänges – additivt (felaktigt) Om man först gjorde av med $\frac{1}{3}$ och sedan med 40 % och sist med $\frac{1}{10}$ så måste man totalt ha gjort av med $\frac{1}{3} + \frac{40}{100} + \frac{1}{10} = \frac{5}{6}$ av ursprungsbeloppet. Alternativt: Om man först tog $\frac{2}{7}$ och sedan 60 % och sist $\frac{1}{8}$ måste man totalt ha tagit $\frac{2}{7} + \frac{60}{100} + \frac{1}{8} = \frac{283}{280}$ av det tillgängliga utrymmet.

För *USB-minne* ger detta ett uppenbart orimligt svar, eftersom det är mer än 100 %. För *Månadspeng* kan det vara svårare att övertyga om att resonemanget är fel. Ett enklare exempel kan vara t.ex. först 75 % och sedan 60 %. Additivt resonemang ger ett orimligt svar, och eftersom det bara är två steg är det lättare att analysera resonemanget, exempelvis i bild:



Räkna framlänges – additivt (korrekt) Kalla det vi hade från början för x , och se hur mycket som går åt i varje steg:

$$(\frac{1}{3} + 0,4 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{10} \cdot 0,6 \cdot \frac{2}{3})x + 216 = x$$

alternativt

$$(\frac{2}{7} + 0,6 \cdot \frac{5}{7} + \frac{1}{8} \cdot 0,4 \cdot \frac{5}{7})x + 0,5 = x$$

Lös sedan ut x .

7.6 Lösningstrategier till utvidgningarna

Beräkningsanalys För att avgöra om det går att göra ett olösbart problem av den här typen är nog bästa sättet att analysera den beräkning som man gjorde för att lösa grundproblemet och se om det finns något som kan haka upp sig. (I USB-minnet finns det det: sista steget, där man drar det beräknade lediga minnet från det totala tillgängliga minnet. Vid illa valda siffror kan resultatet bli negativt.)

8 Cykelförrådet

Det här är ett populärt problem, som väl finns i hur många varianter som helst. Det är vanligt på knep-och-knäp-sidor i tidningar.

Bedömer man att grundproblemet är väl enkelt kan man hoppa på det kommunala förrådet direkt.

8.1 Användbart material

- Papper, pennor, linjal.
- Eventuellt: miniräknare.
- Eventuellt: grafritande räknare eller program. (Har man detta så leder man eleverna mot en av lösningsmetoderna. Om detta är bra eller inte får man avgöra.)

8.2 Svar till grundproblemet

- a) 6 2-hjulingar och 5 3-hjulingar.
- b) Ja. Ju fler av cyklarna som är 3-hjulingar, ju fler hjul blir det. Det kan bara vara en av fordonsblandingarna som har rätt antal hjul.
- c) Första talet är antal 2-hjulingar, andra 3-hjulingarna:

$$(12, 1), \quad (9, 3), \quad (6, 5), \quad (3, 7), \quad (0, 9)$$

(Den sista kan diskuteras.)

- d) En klassiker här är bondgård med höns och grisar, där man ger antal djur och antal ben. (Om man bara hugger till med siffror där kan det bli olösligt – bensumman måste vara jämn.)

8.3 Svar till utvidgningarna

Det stora förrådet

- 61 2-hjulingar och 56 3-hjulingar.

Det olösbara problemet

- Antingen för få hjul, så att det inte räcker till 2 hjul per cykel, eller för många hjul, så att det blir mer än 3 hjul per cykel. Annorlunda uttryckt: medelantalet hjul per cykel ligger inte mellan 2 och 3.

Enklare variant

- 15 3-hjulingar skulle ha 45 hjul. 50 hjul är för mycket, om vi inte har trampbilar också!

Algebra

- Kalla antal 2-hjulingar för x och antal 3-hjulingar för y . Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ 2x + 3y = 27 \end{cases}$$

antingen beräkningsvägen eller grafiskt, genom att tolka ekvationerna som linjer.

Enhjulingar

a) Möjliga lösningar:

$$(0, 6, 5), \quad (1, 4, 6), \quad (2, 2, 7), \quad (3, 0, 8)$$

(Man kan diskutera om den första och sista är godtagbara. Även om förskolan äger cyklar av alla tre sorterna är det ju inte säkert att allihop står i förrådet.)

b) Om man har en möjlig lösning med flera stycken 2-hjulingar kan man få en annan genom att byta en 2-hjuling mot en 1-hjuling och en annan mot en 3 hjuling. Både antalet cyklar och antalet hjul är oförändrat om man gör detta. (Då det bara fanns två sorters cyklar gick det inte att byta en sort mot en annan utan att samtidigt ändra hjulantalet.)

Mer algebra

- I det här fallet får vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + z = 11 \\ x + 2y + 3z = 27 \end{cases}$$

som inte har entydig lösning. Man kan få något i stil med $x = z - 5$, $y = 16 - 2z$, ur vilket man kan tabellera upp lösningar för olika antal z . För geometrisk tolkning, se *Lösningsstrategier*

Ett realistiskt problem

- Se *Lösningsstrategier*

8.4 Matematiskt innehåll

Förkunskaper

Absolut nödvändigt:

- Addition, subtraktion, multiplikation.

Användbart:

- Division
- Medelvärde
- Ekvationer
- Negativa tal
- Linjära samband
- Ekvationssystem
- Räta linjen

Utbyte

Exakt vad man får för utbyte beror både på vilka förkunskaper man startade med och vilka av utvidgningarna man gick in på. Man bör få en delmängd av nedanstående:

- Taluppfattning
- Mönsterigenkänning
- Formulering av verklighetsproblem i matematiska termer (modellering)
- Flera korrekta svar
- Begrepp:**
linjära samband,

ekvationssystem, grafisk tolkning av ekvationssystem,
räta linjen,
delbarhet,
heltalslösningar.

8.5 Lösningsstrategier till grundproblemet

Dessa gäller främst första deluppgiften:

Ostrukturerat testande Dra till med ett antal, och se om det fungerar. Om inte: prova något annat. Kan efter ett par steg övergå till mer strukturerat arbete, med analys av om man bör öka eller minska antalet 2-hjulingar.

Eftersom en rimlig startgissning är "ungefär lika många av varje" är det inte helt osannolikt att den som gissar hamnar rätt i första försöket. Då blir det dock svårare att argumentera för att det faktiskt bara finns ett svar, vilket kräver att man analyserat problemet lite djupare. Det kan också vara bra att be gruppen gå vidare med *Det stora förrådet*.

Systematiskt testande Ställa upp tabell med olika antal, och se vad som fungerar. Kan se ut som

cyklar	11 + 0	10 + 1	9 + 2	8 + 3	7 + 4	6 + 5	5 + 6	4 + 7	3 + 8	2 + 9	1 + 10	0 + 11
hjul	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33

Det hela kan brytas då man kommit fram till lösningen som ger 27 hjul. Alternativt kan man se mönstret, och utgående från det hoppa över ett antal icke-fungerande möjligheter.

Några kommer antagligen i första vändan inte på att det räcker att titta på antal som summerar till 11, utan gör upp en stor tabell med ena antalet som kolumner och andra antalet som rader. Denna tabell kan vara bra för att besvara delfrågan som inte specificerade antal cyklar.

Test med felanalys Om alla 11 cyklarna vore 2-hjulingar skulle vi ha 22 hjul, vilket är 5 färre än vad vi vill ha. Byter man en 2-hjuling mot en 3-hjuling så ökar antalet hjul med 1. Byt 5 av de 11 2-hjulingarna mot 3-hjulingar, så blir antalet hjul rätt.

Statistiskt tänkande 27 hjul på 11 cyklar ger i medeltal $27/11 \approx 2,4545 \dots$ hjul per cykel. Bör innebära att lite mindre än hälften av dem har 3 hjul. Testa med 6 2-hjulingar och 5 3-hjulingar, vilket funkar.

Algebraisk teknik Sätt antal 2-hjulingar som x och antal 3-hjulingar som y . Vi har då de två ekvationerna $x + y = 11$, $2x + 3y = 27$.

Man kan lösa ut $y = 11 - x$ och sätta in i andra ekvationen, vilket ger:

$$2x + 3(11 - x) = 27$$

$$2x - 3x + 33 = 27$$

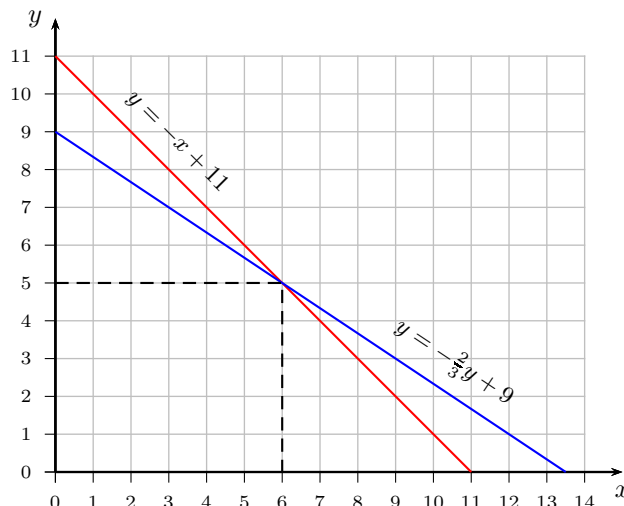
$$-x + 33 = 27$$

$$33 - 27 = x$$

$$x = 6$$

vilket ger $y = 11 - 6 = 5$. (Går lika bra att lösa ut x , och man kan lika gärna använda den andra ekvationen, vilket dock ger bråkräkning.)

Man kan också tolka ekvationerna som uttryck för räta linjer, och skriva om dem som $y = -x + 11$, $y = -\frac{2}{3}x + 9$. Lösningen motsvaras av skärningen mellan dessa linjer:



Lösningarna på frågan som inte angav totalantalet motsvarar heltalspunkterna på den mindre branta linjen.

8.6 Lösningsstrategier till utvidgningarna

Det stora förrådet

Poängen med denna är att "osystematiskt testande" har mycket liten chans att fungera då talen är så här pass stora, så man är tvungen att hitta någon mer systematisk metod. De andra metoderna (utom möjligen "statistiskt tänkande") fungerar bra även på det här problemet.

Det olösbara problemet

Hur man motiverar här beror helt på vilken lösningsmetod man valde för det ursprungliga problemet. Alla metoderna utom "osystematiskt testande" kan användas som utgångspunkt. Grundresonemanget är att antalet hjul inte kan vara mindre än 2 gånger antalet cyklar, och inte heller mer än 3 gånger större. Ger någon ett problem som bryter mot detta så är problemet olösligt. (Försöker man lösa det algebraiskt så får man ändå en lösning – men det ena antalet blir negativt, vilket ett antal cyklar i ett förråd inte kan vara. Kan bli intressant diskussionsfråga, som dock förutsätter att eleverna behärskar räkning med negativa tal.)

Man kan fråga sig om det alltid finns en lösning om antalet hjul är minst dubbla antalet cyklar och högst tre gånger antalet cyklar. Det gör det, ty

$$\begin{cases} x + y = a \\ 2x + 3y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3a - b \\ y = b - 2a \end{cases}$$

vilket ger att x och y blir heltal om a och b är det. (Dock blir något av dem negativt om man går utanför det tillåtna intervallet.) Detta kan visas vara en konsekvens av att 2 och 3 är relativt prima tal, utan gemensamma faktorer. I klassikerexemplet *Bondgård* på sidan 79, där man arbetar med talen 2 och 4 som har faktorn 2 gemensam, blir alla problem där totalsumman av benen är udda olösliga (om man inte tillåter halva hönor...).

Algebra

Det är fullt möjligt att eleverna spontant väljer ett algebraiskt arbetssätt – det beror på vad man senast jobbat med i den ordinarie undervisningen.

Har man arbetat med ekvationssystem och/eller linjer så är den här lösningen i kombination med de andra en mycket bra illustration av att dessa lite abstrakta matematiska tekniker mycket väl kan representera något ytterst konkret. Att samma svar gick att få med andra metoder gör också resultatet av denna beräkning mer trovärdigt.

Enhjulingar

Ostrukturerat testande kan fortfarande fungera. Systematiskt testande blir mer komplicerat; för att få med alla tänkbara kombinationer av antal måste man ha 2-dimensionell tabell. Felanalysens idé; att byta ut en sort mot en annan, går bra. Statistiskt tänkande är inte till så stor hjälp.

Det här problemet innehåller en mycket viktig sak: flera olika korrekta svar. Att det ofta finns flera olika korrekta lösningsmetoder har eleverna förhoppningsvis hunnit ta till sig, men det här att det kan finnas flera svar kan vara överraskande.

Mer algebra

Den här uppgiften bör man nog bara gå in på om eleverna självmant går i den riktningen. (Om de löst två-variabelsproblemet algebraiskt är det rimligt att de också försöker sig på tre-variabelsvarianten med samma metod.)

Man får ekvationerna $x + y + z = 11$, $x + 2y + 3z = 27$, där x är antal 1-hjulingar, y antal 2-hjulingar och z antal 3-hjulingar. Man kan lösa ut $x = 11 - y - z$, vilket insatt i den andra ekvationen ger

$$(11 - y - z) + 2y + 3z = 27 \quad \Leftrightarrow \quad y = 16 - 2z$$

Detta insatt i första uttrycket ger

$$x = 11 - (16 - 2z) - z = z - 5$$

Genom att prova sig igenom z -värden från 0 och uppåt får man fram möjliga värden på y och x . Det här kan leda till diskussion om när ekvationssystem egentligen har entydig lösning och när de har alternativa lösningar. (För linjära ekvationer, som vi har här, gäller ju att man måste ha minst lika många ekvationer som obekanta för att det ska kunna finnas en entydig lösning.)

En del elever kan bli nyfikna på geometrisk tolkning av dessa ekvationer, i analogi med linjetolkningen av det första problemet. Här kommer man in på 3D-geometri, eftersom en ekvation typ $ax + b + cz = d$ motsvarar ett plan i rummet (precis som en ekvation $ax + by = c$ motsvarar en linje i planet). Skärningen mellan två plan är en linje; alla icke-negativa heltalspunkter på denna linje motsvarar möjliga cykelkombinationer. Här är man plötsligt inne på matematik på högskolenivå (vilket man ju kan tala om för eleverna).

Ett realistiskt problem

Ett exempel:

Vi har 11 personer på arbetsplatsen, och 27 arbetsuppgifter som ska utföras. Om vi försöker dela ut dem så rättvist som möjligt så kommer ändå en del personer få två uppgifter att utföra och andra tre. Hur många blir det av varje?

Kommentar: Ett stort problem med tillämpade matematikuppgifter är att de ofta(st) är fullständigt orealistiska, och det kan ge intrycket att matematiken egentligen inte har några tillämpningar. Att leta efter riktiga tillämpningar kan vara nyttigt!

(Och inte så lätt – jag fick tänka länge för att komma på den här. *Hillevi Gavel*)

9 Staketet

Det här är två grundläggande optimeringsproblem som återfinns i stort sett alla läroböcker i differential- och integralkalkyl. De metoder som används där är ju inte tillgängliga på den här nivån, men frågorna är ändå möjliga att titta på.

9.1 Användbart material

- Rutat papper (gärna A3 eller större), pennor, linjal.
- Snöre, något underlag där man kan sätta i nålar för att spänna upp snöret alternativt tyngder med "hörnstolpar" i.
- Passare.
- Miniräknare.

Man kan minska staketlängden om man tycker att 90 centimeter (som väl är den enklaste nedskalningen av storleken) är för mycket att jobba med. Men man bör ta ett värde som inte är delbart med fyra – det är en poäng i att det optimala svaret inte är ett heltal.

9.2 Svar till grundproblemet

Del 1

- a) Hagar som är ungefär lika breda som de är långa har större area än långsmala.
- b) $L = 45 - B$
- c) Kvadratisk, med 22,5 meters sida.

Del 2

- a) En halv kvadrat, med två sidor 22,5 meter och en sida (parallell med vattnet) på 45 meter.
- b) Dubbelt så stor.

9.3 Svar till utvidgningarna

- a) Sämre med icke-räta vinklar.
- b) Bättre med många kanter.
- c) Cirkeln.

9.4 Matematiskt innehåll

Förkunskaper

Till grundproblemet:

- Längd, area
- Variabelbegreppet
- Algebraiska omskrivningar
- Formelsamband
- Geometriska definitioner

Till utvidgningarna:

- Vinkelbegreppet

Utbyte

- Formulering av verklighetsproblem i matematiska termer (modellering)
- Tolkning av grafer
- **Begrepp:**
 - area,
 - icke-linjära samband,
 - optimering,
 - kvadratkomplettering,
 - algebraisk formel,
 - maximum/minimum,
 - cirkel,
 - polygon,
 - extrempunkt

9.5 Lösningsstrategier till grundproblemet

Del 1

Rita och mät Sitter ju som första deluppgift, men en del tar antagligen och fortsätter på det spåret.

Tabellera Gå igenom möjliga längd-bredd-kombinationer. Eftersom längden kan vara allt mellan 0 och 45 meter kan det bli en ganska stor tabell, om man inte inser att man kan ta större hopp mellan värdena än 1 meter.

Bredd (m)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
Längd (m)	45	40	35	30	25	20	15	10	5	0
Area (m ²)	0	200	350	450	500	500	450	350	200	0

Det ser ut som att maximum ligger mitt emellan bredd 20 och 25. (Här gäller det att inse att längder inte behöver vara heltal.) Den som hoppar med 10 meter kan här dra den felaktiga slutsatsen att 20 meters bredd ger maximum.

Formel Arean är bredd gånger längd, och längden halva staketet minus bredden. Ger formeln $A = B \cdot (45 - B) = 45B - B^2$. Denna formel kan vara bas för tabellen.

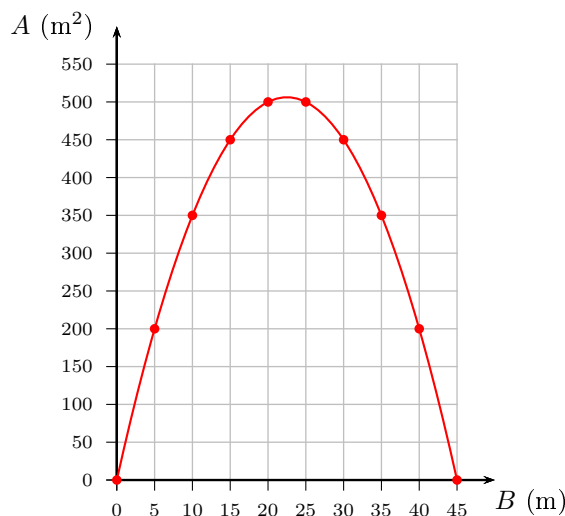
Graf Baserat på tabellen kan man rita en graf (se nästa sida) över förhållandet mellan bredd och area. Man får tänka igenom skalan, så att man får en bra bild. Också bilden pekar på att maximum ligger vid $B = 22,5$ meter. Om man inte ritat grafer innan kan det bli diskussion om ifall punkterna ska bindas ihop med raka streck eller om man bör rita något böjt. Där kan man ju prova med båda och så beräkna det exakta värdet mellan två punkter och se om den rätta linjen eller bågen passar in bäst.

Man kan tala om att den här kurvan kallas *parabel*.

Aritmetisk serie – bakvänt Det går att få syn på en aritmetisk serie i tabellen om man tittar på skillnaden mellan värdena: den minskar med 50 i varje steg.

(Det gäller för alla parabler att skillnaden mellan värdena ändras med en konstant i varje steg. Vet man om detta kan man rita upp hela kurvan baserad på tre punkter, vilket är vad som behövs för att man ska kunna bestämma konstanten. Det kan spara tid.)

Kvadratkomplettering (Det är inte särskilt troligt att någon hittar denna vidareutveckling av formeln, men om någon vill ha vattentätt bevis för att det hittade svaret verkli-



gen är maximum kan den vara bra att visa.)

Formeln för arean kan skrivas om enligt

$$\begin{aligned} A &= 45B - B^2 = 2 \cdot 22,5B - B^2 = 22,5^2 - 22,5^2 + 2 \cdot 22,5B - B^2 \\ &= 506,25 - (B^2 - 2 \cdot 22,5B + 22,5^2) = 506,25 - (B - 22,5)^2 \end{aligned}$$

En kvadrat kan aldrig bli negativ; det minsta värde den kan få är noll. Det här uttrycket är som störst, 506,25, då $B - 22,5 = 0$, dvs. då $B = 22,5$.

Även om man inte riktigt hänger med i omskrivningen som leder till det kvadratkompletterade uttrycket kan man bekräfta att det stämmer att det uttrycket kan förenklas tillbaka till areaformeln.

Förändringshastighet Vad händer med arean $A = 45B - B^2$ om vi ökar B lite grand, säg med h ? Den nya arean blir

$$\begin{aligned} A_{\text{ny}} &= 45(B + h) - (B + h)^2 \\ &= 45B + 45h - B^2 - 2Bh - h^2 \\ &= 45B - B^2 + h(45 - 2B) - h^2 \\ &\approx \underbrace{45B - B^2}_{\text{gamla arean}} + h(45 - 2B) \end{aligned}$$

för om h är ett mycket litet tal så är h^2 ännu mycket mindre och kan försummas. Så arean ökar så länge $45 - 2B > 0$, dvs. så länge $B < 22,5$ m, och minskar då $B > 22,5$ m. Stämmer bra med grafen.

(Detta är i princip ett derivataresonemang.)

Giltig lösning? En del elever kommer antagligen att protestera mot svaret, eftersom ”det är en kvadrat och inte en rektangel”. Det kan leda till diskussion om definitioner i största allmänhet och fyrhörningar i synnerhet. Kvadrater är ju ett specialfall av rektangel, inte en annan kategori. Människan verkar spontant föredra att dela upp begrepp i disjunkta kategorier, och diskussion om hur detta inte alltid ger en korrekt bild kan vara bra.

Del 2

Samma metoder som i del 1 kan utnyttjas; formeln blir $A = B(90 - 2B)$. Men det finns också möjligheter att resonera utgående från föregående lösning:

Utnyttjande av föregående lösning – felaktig Eftersom det var en kvadrat som var bäst i det förra problemet så bör det vara så nu också. Så en kvadrat med sida 30 meter ska det vara.

Detta stämmer inte, kan man kontrollera bara genom att jämföra mot en hage med andra mått.

Utnyttjande av föregående lösning – korrekt Om en kvadrat bäst utnyttjar ett staket med viss längd borde en halv kvadrat bäst utnyttja ett hälften så långt staket, om man inte ska ha något staket på den ”kapade” sidan.

9.6 Lösningsstrategier till utvidgningarna

Vinklar

Man kan hålla snöret som en rektangel, uppspant mellan deltagarnas händer och så experimentera med att ”av-rektangularisera” den. Arean minskar, och man får samtidigt anledning att fundera på hur arean hos en parallelogram beräknas.

Dessutom får man anledning att fundera på att allting inte nödvändigtvis är rätvinkligt! (Arbete med rutat papper, legobitar och liknande kan lätt leda till den uppfattningen⁵.)

Sidor

Både en liksidig triangel och en regelbunden sexhörning med givna sidor är lätta att konstruera med passare och linjal; triangeln är också mycket lätt att konstruera med snörets hjälp. Sedan kan man kontrollera arean antingen genom beräkningar eller genom att räkna rutor (eller bara använda ögonmått).

Också den här uppgiften betonar att räta vinklar inte är det enda som finns.

Form

Om det är bra med många sidor så ska man väl ta så många som möjligt! Regelbundna polygoner blir allt mer lika cirkeln ju fler sidor man tar. (Detta är en form av gränsvärdesresonemang.)

Man kan också fundera på hur verkligheten ser ut. Om man tog ett tätt staket och ställde på ett halt underlag och så fyllde hagen med vatten så skulle vattnet försöka breda ut sig över så stor area som möjligt. Vilken form kommer det hela att anta? (Går att göra med ett staket i form av ett pappersband och ”vatten” i forma av ärtor eller något liknande.)

9.7 Kommentarer

- Areabegreppet är betydligt svårare att få en känsla för än längd och volym, som är lätta att manipulera. För många blir begreppet bara ”något som man beräknar med en formel”. Det är därför det står att man både ska räkna rutor och räkna teoretiskt i

⁵ Arbete med renovering av gamla hus med sättningsskador lär en att räta vinklar inte existerar i verkligheten. *Hillevi Gavel*, byggnadsingenjör

första uppgiften; det beräknade svaret motsvarar antalet rutor.

- Optimering är en viktig problemtyp, inte bara för matematiken. Det är bra med stor längd, det är bra med stor bredd, men det går inte att få båda utan man får göra en kompromiss.

De flesta samband är inte linjära, utan en kurva som först går upp och sedan ner är mycket vanligt. Det kan vara bra att äta kosttillskott om man lider av näringsbrist, men om en tablett om dagen är bra så är det inte tio gånger så bra att äta tio tabletter – snarare riskerar man förgiftning! Detta kan vara bra att diskutera, för det här felresonemanget är vanligt och kan få allvarliga följder.

- I mer avancerade kurser löser man sådana här problem med hjälp av *derivering*, där man tar fram uttryck för kurvans lutning och letar rätt på de punkter där lutningen är noll (dvs. där kurvan är horisontell). I sådana punkter har kurvan oftast ett maximalt eller minimalt värde, och de kallas då *extrempunkter*. Man kan diskutera hur lutning och extremvärden hänger samman – toppen på kurvan är den punkt där man byter mellan att gå uppåt och att gå neråt.
- Parablar är kurvor med många intressanta egenskaper och tillämpningar. Om någon blir intresserad kan den få i uppdrag att ta reda på mer om parablar – det finns mycket att hitta.

10 Vinkelsumma

Ett i sanning klassiskt problem! Grundproblemet är här formulerat av Cecilia Christian-
sen. Tanken är att man gör del 1 vid ett tillfälle och del 2 vid ett annat. Därför upprepar
del 2 lite av innehållet i del 1.

10.1 Användbart material

- Papper, gärna färgat.
- Linjaler; saxar; pennor (gärna i flera färger).
- Gradskivor.
- Tejp.
- Miniräknare.
- Något man enkelt kan omforma till olika polygoner, t.ex. en tumstock.

10.2 Svar till grundproblemet

Del 1

- 180°
- 360°
- 540°
- 720°
- 1440°
- $(n - 2) \cdot 180^\circ$

Del 2

- 1440°
- $25 \cdot 180^\circ = 4500^\circ$
- $\frac{3060^\circ}{180^\circ} + 2 = 19$ hörn
- $180^\circ + 360^\circ + \dots + 720^\circ = \frac{180^\circ + 720^\circ}{2} \cdot 4 = 1800^\circ$.
- $180^\circ + 360^\circ + \dots + 4500^\circ = \frac{180^\circ + 4500^\circ}{2} \cdot 25 = 58\,500^\circ$
- $180^\circ + 360^\circ + \dots + (n - 2) \cdot 180^\circ = \frac{180^\circ + (n - 2) \cdot 180^\circ}{2} \cdot (n - 2)$

$$= \frac{(n - 1)(n - 2)}{2} \cdot 180^\circ$$

10.3 Svar till utvidgningarna

Icke-platt geometri

- Se *lösningar*.

Icke-konvexa polygoner

-
- 4 hörn. Det är omöjligt att göra en triangel med ett hörn med mer än 180° , eftersom man bara har 180° att fördela på de tre hörnen.
- Den kommer då att "gå ihop" med det som vi sagt var insida som *utsida*, med alla faktiska innervinklar mindre än 180° .
- Se *lösningar*.

10.4 Matematiskt innehåll

Förkunskaper

- Vinkelbegreppet
- Variabelbegreppet

Till del 2:

- Aritmetisk summa.

Utbyte

Exakt vad av detta man får beror på vilka lösningsmetoder man kommer på och vilka av utvidgningarna man går in på.

- **Begrepp:**
 - vinkel,
 - vinkelsumma,
 - polygon,
 - konvex/icke-konvex,
 - regelbunden polygon,
 - rekursion,
 - linjära samband,
 - algebraisk formel,
 - diagonal,
 - icke-euklidisk geometri

10.5 Lösningsstrategier till grundproblemet

Triangeln – mät Genom att mäta i ett antal olika trianglar kan man komma fram till att vinkelsumman är ungefär 180° . (Det kan vara intressant att se om någon kommer att tänka på att göra en trubbvinklig triangel.)

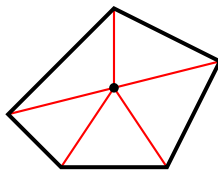
Triangeln – klipp och riv Genom att klippa ut ett antal trianglar, riva av hörnen och lägga ihop dem kan man se att det blir ungefär 180° .

Triangeln – varför? En del elever vill förmodligen (eller snarare: förhoppningsvis) inte gå vidare om de inte får ett vattentätt bevis för att vinkelsumman verkligen är *exakt* 180° . Man kan då tala om att det verkligen går att visa, åtminstone om man accepterar ett kanske mer självklart påstående som kallas *alternativvinkelsatsen*. (Det formella beviset står sidan 94.)

Större figurer Här kan man antingen mäta eller utgå från att triangeln redan är fixad och att man kan angripa de större figurerna genom att dela dem i trianglar. (Det kan vara intressant att se om någon kommer att tänka på att rita en icke-konvex figur.)

Det finns två grundsätt att gå till väga då man delar upp konvexa polygoner i trianglar: *Tårta* och *Diagonaler*:

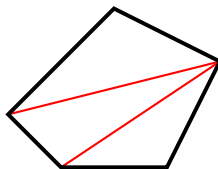
Tårta Sätt en punkt ungefär mitt i polygonen, och dela upp den i n tårtbitar:



Summan av triangelarnas vinklar är $n \cdot 180^\circ$. 360° av dessa sitter runt mittpunkten, resten utgör vinkelsumman i polygonen.

(I en konvex polygon kan man göra så här från vilken punkt som helst inne i polygonen. I en icke-konvex polygon är det inte säkert att man kan hitta någon punkt från vilken man når alla hörnen.)

Diagonaler Dra ett antal diagonaler i polygonen, tills den är uppdelad i trianglar:



I konvexa polygoner kan man alltid ställa sig i vilket hörn som helst, och så dra diagonaler till alla de hörn som hörnet inte redan är förbundet med. Det ger $n - 3$ diagonaler, som delar n -hörningen i $n - 2$ trianglar. Summan av deras vinkelsummor är vinkelsumman i polygonen.

(I en konvex polygon kan garanterat göra så här. I en icke-konvex polygon är det inte säkert.)

10.6 Lösningsstrategier till utvidgningarna

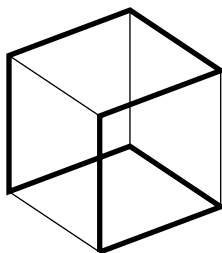
Icke-platt geometri

(Matematikern säger väl "icke-*plan* geometri", men *platt* är nog begripligare för den här gruppen elever. Man kan passa på att lära ut ordet *plan* när man ändå håller på.)

Detta är kanske mer *exempel* än *strategier*...

Det mest uppenbara exemplet är väl geometri i ordets sanna bemärkelse: mätningar på jordytan! Där kan det faktum att jorden inte är platt påverka. Om man startar på nordpolen, går rakt söderut ner till ekvatorn, följer den ca 1000 mil och återvänder till nordpolen så har man gått i en triangel med tre räta vinklar. Kan illustreras med hjälp av jordglob.

Sedan kan man få andra effekter vid räkning tredimensionellt: Om man tar 8 av de 12 kanterna på en kub så kan man säga att dessa 8 räta linjer bildar en sorts 8-hörning. Alla vinklarna är 90° , så vinkelsumman blir $8 \cdot 90^\circ = 720^\circ$, inte $6 \cdot 180^\circ = 1080^\circ$.

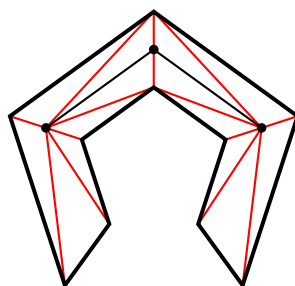


Finns säkert många andra intressanta exempel!

Icke-konvexa polygoner

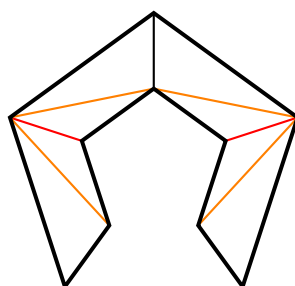
Den här frågan bör man helst inte visa förrän eleverna haft möjlighet att förutsättningslöst titta på grundproblemet, för den berövar dem möjligheten att själva inse att problematiken finns. Här visas tre sätt att angripa problemet; det finns med all säkerhet fler!

"Tårta-på-tårta" Även om det inte finns någon punkt som man kan nå *alla* hörnen ifrån så kan man alltid nå ett antal av dem. Om man tar flera stycken centralpunkter och förbinder dem med raka linjer så kan man dela upp polygonen i trianglar:



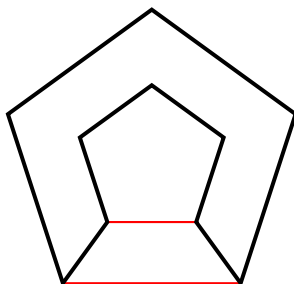
Här fick vi 14 trianglar; 10 som ansluter till de ursprungliga sidorna och 4 mot förbindelselinjerna mellan punkterna. Summerar vi triangelarnas vinklar får vi polygonens vinkelsumma plus 3 hela varv (runt punkterna). Så vinkelsumman är $14 \cdot 180^\circ - 3 \cdot 360^\circ = 1440^\circ$.

Rekursion Även om man inte kan nå *alla* hörn från något hörn så finns det åtminstone något hörnpar som man kan förbinda. (Detta är förvånansvärt svårt att bevisa!) Genom att dra det strecket har man delat upp n -hörningen i två mindre hörningar. Upprepa resonemanget på dem, tills allt är uppdelat i trianglar. Det kan ge en uppdelning enligt nedanstående; där man först delat 10-hörningen i 2 6-hörningar; sedan 6-hörningarna i 2 4-hörningar vardera; slutligen 4 hörningarna i trianglar.



Detta gav 8 trianglar; vinkelsumman är $8 \cdot 180^\circ = 1440^\circ$.

Slut figuren Vi vet hur man räknar på konvexa figurer. Lägg till lite streck:



Här har vi en yttre 5-hörning, en inre 5-hörning och en 4-hörning. 5-hörningarnas vinkelsummor är $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$. 4-hörningens är 360° . Summan av vinklarna på utsidan av den inre 5-hörningen måste bli $5 \cdot 360^\circ - 540^\circ = 1260^\circ$. (I varje hörn bildar vinkeln på insidan ihop med vinkeln på utsidan ett helt varv.) Om vi lägger ihop innervinklarna på yttre 5-hörningen med yttrevinklarna på den inre, och tar bort vinklarna i 4-hörningen borde vi få den ursprungliga figurens vinkelsumma: $540^\circ + 1260^\circ - 360^\circ = 1440^\circ$.

10.7 Kommentarer

Mätning och räkning

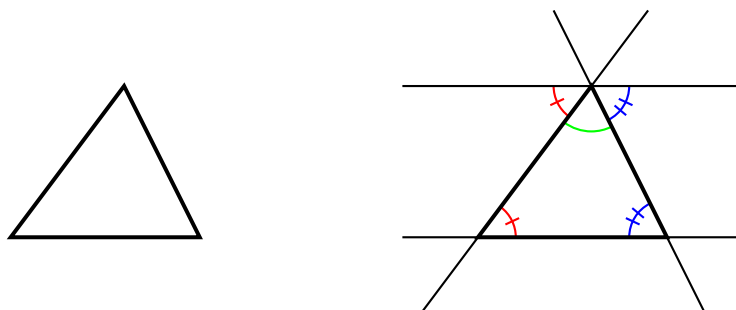
Man bör uppmuntra till att både mäta, pussla och räkna. Vinkelbegreppet är det många som inte riktigt uppfattat vad det egentligen är. Konkret hantering av det kan bidra till känslan för vad det faktiskt är som man mäter.

Det formella beviset för vinkelsumman i en triangel

Om några av ens elever vill få en ordentlig förklaring av varför vinkelsumman blir exakt 180° :

Beviset baseras på följande: om en linje skär två parallella linjer så blir skärningsvinklarna lika i båda skärningarna. (*Alternativinkelsatsen*.)

Vi kan börja med en triangel:



Om vi förlänger sidorna och dessutom ritar in en linje som är parallell med triangelns bas så ser vi att de två vinklarna markerade med ett streck är lika och att de två vinklarna markerade med två streck är lika.

De tre vinklarna tillsammans ger de oss en rät linje, det vill säga: summan av dem är ett halvt varv; 180° . Och de motsvarar vinklarna i triangeln.

Plan geometri

”Normal” geometri i planet kallas också *Euklidisk geometri*, eftersom det var den sortens geometri som Euklides *Elementa* behandlade. (Begreppet *Euklidisk geometri* har dock utvidgats, och det finns också t.ex. Euklidisk rymdgeometri. Så man bör vara lite försiktig med termen, och kanske hellre säga *Euklidisk plan geometri*.) Det här kan vara ett bra tillfälle att ta upp lite om matematikens historia, och hur den klassiska geometrin med sin bevisföring är upplagd.

11 Kulpåsen

Problemet är inspirerat av en uppgift som beskrivs i en artikel av Smith, Hughes, Engle och Stein (2009).

Problemet passar att använda i en klass som just ska börja med sannolikhetslära. Det kan då också hjälpa läraren att få en klar bild av var eleverna står. (Om man redan har hållit på med det senaste tiden så är detta en "rutinuppgift" och inte ett "problem", eftersom det lätt kan angripas med standardmetoder.)

11.1 Användbart material

- En större mängd av något som kan representera kulor. (Något som inte rullar är att föredra, så blir det inte alltför stor oreda om någon sveper ner det på golvet.)
- Ogenomskinliga påsar.
- Miniräknare (om man är rädd att resonemangen kan drunkna i sifferhanteringen).

11.2 Svar till grundproblemet

- a) Påse B .
- b) Där är $\frac{1}{4} = 25\%$ av kulorna är blå. (De andra påsarna har lägre andel.)
- c) —

11.3 Svar till utvidgningarna

Konkret test

- Det beror ju på slumpen. . . Förhoppningsvis får man ungefär 25 % blåa.

Fler färger

- Det blir ingen skillnad! (Man kan fortfarande se det som två färger: blå och o-blå.)

Fler dragningar

- a) Med återläggning. (Annars är chansen mindre i andra dragningen.)
- b) $(\frac{1}{5})^2 = \frac{1}{25} = 4\%$
- c) $\frac{1}{5} \cdot \frac{24}{124} = \frac{6}{155} \approx 3,87\%$
- d) 4 stycken (så att man har 16 blåa och 64 röda).
- e) Inte samma. Den är störst i påse A (där man bara tagit bort $\frac{1}{25}$ av de blå kulorna i första dragningen jämfört med B där man tagit bort $\frac{1}{16}$).

11.4 Matematiskt innehåll

Förkunskaper

Nödvändigt:

- Bråkräkning
- Sannolikhetsbegreppet

Bra att ha:

- Decimaluttryck
- Procenträkning
- Multiplikationsprincipen

Utbyte

- Förstärkning och sammanhang för allt som räknas upp under *förkunskaper*.
- **Begrepp:**
sannolikhet,
dragning med/utan återläggning,
bråk,
olikheter,
proportioner.

11.5 Lösningsstrategier till grundproblemet

På de metoder som innehåller bråkresonemang kan det vara intressant att se om eleverna väljer att starta med t.ex. bråket $\frac{20}{80}$ och sedan förenklar eller om de tar $\frac{1}{4}$ direkt.

Det är fullt möjligt att elever gör en beräkning enligt någon av de fungerande modellerna men sedan inte kan tolka resultaten utan övergår till något av de icke fungerande resonemangen.

Gällande felaktiga resonemang kan man få en intressant diskussion där man försöker hitta ett bra exempel som visar att resonemanget inte fungerar. (Detta fordrar dock att man bedömer att de som resonerat felaktigt inte kommer att bli sårade av det hela.)

Antalsresonemang 1 (felaktigt) Det måste vara påse A, för den har flest blå kulor.

Motexempel: Jämför en påse med en röd och 9 blå med en med 90 röda och 10 blå.

Antalsresonemang 2 (felaktigt) Det är flest kulor i påse C, då det måste vara störst chans där.

Här finns det anledning att misstänka att vederbörande inte förstått vad sannolikhet är för något. Motexempel kan vara att bedöma sannolikheten för två påsar med samma kulantantal men olika proportioner mellan sorterna. (Risken är dock att man då övergår till *antalsresonemang 1* istället.)

Överskottsresonemang (felaktigt)

- I påse A finns 75 fler röda än blå.
- I påse B finns 40 fler röda än blå.
- I påse C finns 80 fler röda än blå.

Då måste påse B vara bäst!

Här har man ju komplikationen ”felaktigt resonemang som ledde till korrekt svar”. En bra fråga kan vara hur förslagsställarna ställer sig till en påse D, som innehåller 1 blå kula och 11 röda.

Andelsuppskattning (delvis fel)

- Påse A är $\frac{1}{4}$ blå.
- Påse B är $\frac{1}{3}$ blå.
- Påse C är $\frac{1}{5}$ blå.

$\frac{1}{3}$ är mest så påse B är bäst.

Detta kan antingen ses som en felformulerad variant av nästa lösning, eller en fel utförd variant av lösningen därefter.

Proportionsuppskattning Förhållandet mellan kulsorterna är

- Påse A: 1 : 4.
- Påse B: 1 : 3.
- Påse C: 1 : 5.

1 : 3 ger störst sannolikhet för att få rätt sorts kula. Kan också formuleras enligt "4 gånger så många röda i påse A". Proportionen $n : m$ ger sannolikheten $n/(n + m)$.

Andelsuppskattning (korrekt)

- Påse A är $1/5$ blå.
- Påse B är $1/4$ blå.
- Påse C är $1/6$ blå.

$1/4$ är bäst.

Procentsatser Procent blåa i de olika påsarna:

- Påse A: $25/125 = 20\%$
- Påse B: $20/80 = 25\%$
- Påse C: $20/120 \approx 16,7\%$

25 % är bäst.

11.6 Lösningsstrategier till utvidgningarna

Konkret test

Testet finns det väl inga alternativa Lösningsstrategier för.

Fler färger

Finns inte så många olika metoder här heller – det som gäller är att inse att det fortfarande bara finns 2 kategorier.

Fler dragningar

Även de som inte klarar beräkningarna av sannolikheterna här bör kunna uttala sig om vilken av dem som blir störst. Om man inte bedömer att majoriteten av elevgruppen klarar räkningarna kan man stryka beräkningsfrågorna.

Av de som räknar kommer antagligen ett antal korrekt beräkna sannolikheterna i de två dragningarna men addera dem istället för att multiplicera. Fungerande motexempel där är ett par påsar där den adderade sannolikheten blir mer än 100 %.

På utbytet finns plats för ett antal felresonemang, där man försöker få *antalet* av antingen blå eller röda lika. Har man förstått att det relevanta är *andelen* och ser att 20 % av 80 är 16 är det ganska lätt.

Sista frågan är också en sådan som kan lösas av en del personer som inte klarar av räkningarna.

12 Prissättning

Problemet ges i tre varianter. Det är samma resonemang i allihop, men sifferhanteringen är olika svår. Tidigare har en utmärkt kontext för denna typ av problem varit mobiltelefonabonnemang, men numera finns det i princip inga sådana som passar in i den här enkla modellen.

12.1 Användbart material

- Vanligt rutat papper
- Millimeterrutat papper (gärna A3)
- Linjal
- Miniräknare
- Eventuellt: Grafitande miniräknare, om man har tillgång till dem och eleverna har erfarenhet av att använda dem.
- Eventuellt: GeoGebra, eller liknande datorprogram för att visualisera matematik. (De här två sista hjälpmedlen leder samtidigt eleverna mot en av lösningsmetoderna. Man får avgöra om detta är önskvärt eller inte.)

12.2 Svar

Datorspelet

- Abonnemang 1 (som kostar $0,25 \cdot 60 = 15$ kronor, medan det andra kostar $50 + 0,1 \cdot 60 = 56$ kronor).
- Abonnemang 2 (som kostar $50 + 0,1 \cdot 600 = 110$ kronor, medan det första kostar $0,25 \cdot 600 = 150$ kronor).
- Abonnemang 1 är bäst om man spelar upp till och med 333 minuter i veckan (5 timmar och 33 minuter), abonnemang 2 är bättre från och med 334 minuter (vilket i praktiken är allt som är mer än 333 minuter, eftersom man betalar per påbörjad minut).
- Ja, lite grand. Man betalar ju per påbörjad minut, och man avslutar troligen inte exakt på minutslaget. I medeltal blir det 30 sekunder per pass som man betalar för utan att spela. Så om de tio passen summerar till exakt 10 timmar får man antagligen betala för 10 timmar och 5 minuter.

Telefontjänsten

- Utan månadsavgift (vilket kostar $15 \cdot 4 = 60$ kronor medan det andra kostar $100 + 15 = 115$ kronor).
- Med månadsavgift (vilket kostar $100 + 60 = 160$ kronor medan det första kostar $60 \cdot 4 = 240$ kronor).
- Om man bortser från minutavrundning är det lika dyrt vid 33 minuter och 20 sekunder. Ska man prata upp till och med exakt 33 minuter lönar sig inte månadsavgift, mer än 33 minuter och det är värt att betala.
- Ja, lite grand. Man betalar ju per påbörjad minut, och man avslutar troligen inte exakt på minutslaget. I medeltal blir det 30 sekunder per samtal som man betalar för utan att använda. Så om de tio samtal summerar till exakt 30 minuter får man antagligen betala för 35 minuter.

Gymmet

- Utan medlemskap (vilket kostar $12 \cdot 150 = 1800$ kronor medan det andra kostar $1750 + 12 \cdot 50 = 2350$ kronor).

- b) Med medlemskap (vilket kostar $1750 + 52 \cdot 50 = 4350$ kronor medan det första kostar $52 \cdot 150 = 7800$ kronor).
- c) Vid 17 och ett halvt besök är det hugget som stucket. Halva besök kan man ju inte göra; upp till och med 17 besök på ett år (ungefär ett var tredje vecka) är det bäst att inte betala medlemsavgift, från och med 18 är det bättre att betala.

12.3 Matematiskt innehåll

Förkunskaper

Nödvändigt:

- De fyra räknesätten
- Tidsenheter
- Variabelbegreppet

Bra att ha:

- Linjära samband
- Grafisk tolkning av linjära samband
- Ekvationer
- Ekvationssystem

Utbyte

- Formulering av verklighetsproblem i matematiska termer (modellering)
- Fördjupad förståelse för de begrepp som räknas upp under *Förkunskaper*.
- **Begrepp:**
 - linjära samband,
 - ekvationer,
 - ekvationssystem,
 - räta linjen,
 - olikheter,
 - kontinuerlig/diskret variabel

12.4 Lösningsstrategier

De två första deluppgifterna finns det väl inga större möjligheter att variera lösningen på, men i de första varianterna kan man behöva tipsa om att allt ska räknas om till samma tidsenhet. I den sista kan man behöva tala om hur många veckor det är på ett år.

Det finns en viss risk att priset för alternativ 2 räknas ut som $(a + b)x$ även om det är korrekt uppskrivet som $a + bx$. (Förhoppningsvis reagerar man då på att svaret är orimligt stort.)

Enhetsbyte Oavsett vad man väljer för fortsatt strategi kan man i *Datorspelet* inleda med att skriva om sambanden till pris per timme istället. Det ger mindre värden att arbeta med och bättre överblick.

Tabellera, fullständigt Ställa upp en tabell för priserna, från 1 och uppåt. Man tröttnar förmodligen rätt fort! Om gruppen kör fast här kan man tipsa om att det går att gå i större steg.

Tabellera, översiktligt Tabellera, men med större steg. Då man identifierat det delintervall där skiftet sker kan man göra en mer fingraderad tabell för det området.

Intervallhalvering De första beräkningarna ger information att brytpunkten ligger någonstans mellan de testräknade värdena. Man kan då undersöka ett lättträknat värde ungefär mitt-emellan, och med ett par beräkningar sikta in sig på ett lämpligt delintervall. Där kan man sedan göra ett fingeraderad tabell.

Algebraisk lösning Kalla tiden/antalet besök x och priset y . Identifiera den (tid)punkt då betalningsalternativen är jämnbra, dvs. lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} y = 0,25x \\ y = 0,1x + 50 \end{cases} \quad \text{alt.} \quad \begin{cases} y = 4x \\ y = 100 + x \end{cases} \quad \text{alt.} \quad \begin{cases} y = 150x \\ y = 1750 + 50x \end{cases}$$

Både i den här lösningen och nästa har man anledning att diskutera att problemet egentligen arbetar med en diskret variabel – den går från 1 till 2 utan att passera några värden på vägen. Ekvationssystemet och grafen utgår från kontinuitet. (Det går ju att justera svaret med hänsyn till detta, men man måste vara medveten om komplikationen.)

Grafisk lösning Rita linjerna som ges i föregående uppgift och se var de skär varandra. (Kan göras på millimeterpapper eller grafitande räknare.)

Det kan bli problem beroende på olämplig skala; då kan man tipsa om möjligheten att ta annan gradering på axlarna.

Det kan också finnas anledning att diskutera hur mycket värden man behöver för att rita en linje; det räcker ju med en start- och slutpunkt – det behövs inte en utförlig värdetabell för alla värden däremellan. (Detta fordrar ju att man vet om att ett sådant här uttryck alltid ger en linje – vet man det inte så behöver man den utförliga tabellen, och kan då upptäcka det här med linje på köpet.)

13 Annas syskon

Problemet är taget ur *32 rika problem i matematik* av Maria Larsson, ○ Maria Larsson och Liber 2007. Återgivet med tillstånd.

13.1 Användbart material

- Pennor, papper, linjal.
- Något konkret i stort antal, som tändstickor.

13.2 Svar

- a) 12 år.
- b) 13 och 20 år *eller* 14 och 19 år *eller* 15 och 18 år.
- c) —

13.3 Matematiskt innehåll

Detta avsnitt är nyskrivet till problembanken.

Förkunskaper

- Medelvärde
- Median

Utbyte

- Förstärkning och sammanhang för det som räknas upp under *förkunskaper*.
- Insikt om att ett problem kan ha flera korrekta svar.
- **Begrepp:**
 - medelvärde,
 - median,
 - heltalslösning

13.4 Lösningsstrategier

Detta avsnitt är taget ur 32 rika problem i matematik.

Använd konkret material Ta fyra tändsticksaskar som representerar Annas fyra syskon och lägg $4 \cdot 17 = 68$ stickor i en hög framför askarna. Annas ask står tom till vänster. Medelvärdet för alla fem ska vara 16 år. Flytta därför 4 stickor från högen till Annas ask. Nu är medelvärdet för Annas fyra syskon 16 år. För att medelvärdet ska bli 16 år för alla fem syskonen måste man lägga i 12 stickor till i Annas ask. Lägg tillbaka de 4 lånade stickorna. Nu är det 12 stickor i Annas ask och alltså är Anna 12 år. För att ta reda på hur gamla Annas bröder är kan man ta 20 och 15 av de 68 stickorna i högen och lägga i Emmas ask som ligger längst till höger samt i Cecilias ask som ligger i mitten (medianen). Nu återstår 33 stickor som ska fördelas mellan Annas två bröder. Den yngre brodern kan vara max 15 år eftersom Cecilia är 15 år (medianen). Lägg 15 stickor i asken näst längst till vänster och resten ($33 - 15 = 18$) i asken näst längst till höger. Om den yngre brodern är 15 år är den äldre brodern alltså 18 år. Om den yngre brodern istället är 14 år är den äldre brodern ($33 - 14$) år = 19 år. Om den yngre brodern är 13 år är den äldre brodern ($33 - 13$) år = 20 år, vilket han kan vara om Emma bara är lite äldre än honom. Däremot kan den yngre brodern inte vara yngre än 13 år, för då skulle den äldre brodern vara minst 21 år. Det går inte eftersom Emma är äldst.

Ställ upp en ekvation Anta att Anna är x år och ställ upp en ekvation.

$$4 \cdot 17 + x = 5 \cdot 16$$

$$68 + x = 80$$

$$x = 12$$

Anna är alltså 12 år. I följande ekvation är Annas bröder y respektive z år gamla.

$$12 + y + 15 + z + 20 = 5 \cdot 16$$

$$y + z + 47 = 80$$

$$y + z = 33, y \leq 15, z \leq 20$$

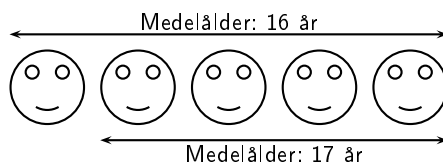
$$y = 13, z = 20$$

$$y = 14, z = 19$$

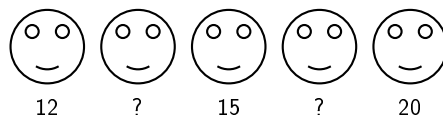
$$y = 15, z = 18$$

Summan av brödernas åldrar ska alltså vara 33 år. Den yngste brodern kan max vara 15 år och den äldste brodern max 20 år. Annas bröder kan alltså vara 13 år och 20 år, 14 år och 19 år eller 15 år och 18 år. ($y = 16$ och $z = 17$ är ingen lösning eftersom medianen ska vara 15 år.)

Rita en bild



Medelåldern för Annas fyra syskon är 17 år. Eftersom medelåldern minskar med 1 år när alla 5 syskonen räknas in måste Anna vara $(17 - 5) \text{ år} = 12 \text{ år}$.



I bilden ovan är det man vet om syskonens åldrar och placering i syskonskaran inritat. Bröderna kan vara 13 år och 20 år, 14 år och 19 år eller 15 år och 18 år.

Gissa och prova Om man börjar med att gissa att Anna är 10 år så blir medelvärdet för alla fem $\frac{78}{5} \text{ år} = 15,6 \text{ år}$ vilket är för lite. Om man sedan gissar att Anna är 13 år blir medelåldern för alla fem $\frac{81}{5} \text{ år} = 16,2 \text{ år}$ vilket är för mycket. Om Anna är 12 år blir medelåldern för alla fem $\frac{80}{5} = 16 \text{ år}$ vilket stämmer. Om man vet att Anna är 12 år kan man sätta upp en tabell för att ta reda på hur gamla Annas bröder kan vara (se nedan).

Sätt upp en tabell Om man har tagit reda på att Anna är 12 år med någon annan lösningsstrategi kan man sedan sätta upp en tabell för att ta reda på hur gamla Annas bröder kan vara:

Anna	Bror 1	Cecilia	Bror 2	Emma	Lösning?
12	12	15	21	20	Nej
12	13	15	20	20	Ja
12	14	15	19	20	Ja
12	15	15	18	20	Ja
12	16	15	17	20	Nej

14 Felblandad saft

Problemet är taget ur *32 rika problem i matematik* av Maria Larsson, © Maria Larsson och Liber 2007. Återgivet med tillstånd.

Ytterst realistiskt, med många Lösningsvarianter. Man kan tänka sig andra kontexter för problemet, men den här – med saft – är nog en som alla i den här åldern kan relatera till!

14.1 Användbart material

- Rutat papper och pennor.
- Eventuellt: miniräknare.
- Om man vill: Saft som ska späs 1 till 3, så att man kan provsmaka resultatet och jämföra med den korrekt blandade versionen.

14.2 Svar

- a) $\frac{1}{10}$ koncentrerad saft.
- b) $\frac{1}{4}$ koncentrerad saft.
- c) 2 delar.
- d) $\frac{1}{2}$ del.
- e) —

14.3 Matematiskt innehåll

Förkunskaper

För att över huvud taget kunna göra något med uppgiften:

- Bråkräkning.
- Volymsbereppet.

Bra att ha:

- Procent
- Proportionalitet
- Volymsmått
- Ekvationslösning

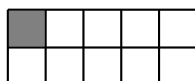
Utbyte

- Formulering av verklighetsproblem i matematiska termer (modellering)
- Tillämpad bråkräkning
- Tillämpad ekvationslösning
- **Begrepp:**
 - volym,
 - bråk,
 - proportioner,
 - ekvation.

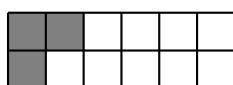
14.4 Lösningsstrategier

Detta avsnitt är taget ur *32 rika problem i matematik*.

Gissa och prova (rita en bild) Målet är att få saften blandad med 1+3 delar. Det betyder att andelen koncentrerad saft ska vara $\frac{1}{4}$. 1+9 delar betyder att $\frac{1}{10}$ är koncentrerad saft. Häller man i en del koncentrerad saft till blir andelen koncentrerad saft $\frac{2}{11}$, vilket är för lite. Häller man i en del till blir andelen $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$. Då är saften blandad "1 + 3". För att istället få blandningen 1 + 6 delar av den felblandade saften kan man först prova att hälla i en del koncentrerad saft. Då är andelen koncentrerad saft $\frac{2}{11}$, vilket är för mycket. Om man istället håller i $\frac{1}{2}$ del koncentrerad saft får man 1,5 av 10,5 delar. Andelen koncentrerad saft blir då $\frac{3}{21} = \frac{1}{7}$, vilket motsvarar 1 + 6 delar.



1 + 9 delar



Tillsätt 2 delar
saft och få
1 + 3 delar



Tillsätt $\frac{1}{2}$ del
saft och få
1 + 6 delar

Sätt upp en tabell

Andel konc saft från början	Antal delar konc saft som tillsätts	Andel konc saft efteråt
$\frac{1}{10}$	1	$\frac{2}{11}$
$\frac{1}{10}$	2	$\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$
$\frac{1}{10}$	3	$\frac{4}{13}$
$\frac{1}{10}$	4	$\frac{5}{14}$
$\frac{1}{10}$	5	$\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$
$\frac{1}{10}$	0,5	$\frac{1,5}{10,5} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$

För att få saften blandad "1+3" kan man först hälla i en del koncentrerad saft. I tabellen ser man att det blir för svag saft. Om man håller i en till del koncentrerad saft andelen koncentrerad saft $\frac{1}{4}$, vilket betyder att den är blandad "1 + 3". Fortsätter man att hälla i fler delar koncentrerad saft blir saften för stark (se tabellen). För att få saften blandad "1 + 6" ska man hälla i färre delar koncentrerad saft än för att få saften blandad "1 + 3". Om man håller i en del koncentrerad saft ser man i tabellen att saften blir för stark. Om man istället håller i 0,5 del koncentrerad saft blir andelen $\frac{1}{7}$, vilket betyder att den är blandad "1 + 6".

Ställ upp en ekvation Anta att x är antal delar koncentrerad saft som man ska tillsätta för att få blandningen "1 + 3" och att y är antal delar koncentrerad saft som man ska tillsätta för att få blandningen "1 + 6".

$$\begin{aligned}\frac{1+x}{10+x} &= \frac{1}{4} \\ 4+4x &= 10+x \\ 3x &= 6 \\ x &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1+y}{10+y} &= \frac{1}{7} \\ 7+7y &= 10+y \\ 6y &= 3 \\ y &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Resonera logiskt Den felblandade saften är blandad $1 + 9$ delar. Saften ska bli blandad $1 + 3$ delar, vilket är samma sak som att blanda den $3 + 9$ delar (förlängning med 3). Om man jämför $1 + 9$ delar med $3 + 9$ delar ser man att om man tillsätter 2 delar koncentrerad saft så blir saften rätt blandad. När den felblandade saften med $1 + 9$ delar ska bli blandad $1 + 6$ delar så är det samma sak som att saften ska bli blandad $2 + 12$ delar (förlängning med 2). Om man jämför $1 + 9$ delar med $2 + 12$ delar ser man att om man tillsätter 1 del koncentrerad saft och 3 delar vatten så blir saften rätt blandad. Istället för att göra det kan man hälla i en halv del koncentrerad saft. Det beror på att saften ska bli blandad $1 + 6$ delar (eller $0,5 + 3$ delar). Om man hoppar över att hälla i tre delar vatten måste man samtidigt hoppa över att hälla i en halv del koncentrerad saft, så då blir det bara en halv del koncentrerad saft kvar att hälla i. Gör man det så blir saften blandad $1,5 + 9$ delar, vilket är samma sak som att blanda den $1 + 6$ delar (förkortning med 1,5).

15 Alla möjliga summor

En kombinatorisk klassiker, som man kan snubbla på i olika sammanhang... (Bakgrundshistorien är autentisk.)

Detta problem innehåller en hel del matematisk terminologi. Det bästa verkade vara att inte ta med definitionerna i frågan, utan överlåta åt läraren att efter eget omdöme gå igenom vad klassen kan tänkas behöva.

Att som här räkna även uttryck som "3" som en summa kan ju diskuteras. (Man brukar göra så då man arbetar med summatecknet, eftersom det förenklar resonemangen.) Man får lov att fastslå att "vi gör så i det här problemet"; det blir mycket svårare annars.

15.1 Användbart material

- En större mängd av någonting som går lätt att lägga ut i en rad och som ligger stilla (stenar, klossar, suddgummin...), för att kunna representera talet 10 på ett konkret sätt.
- Miniräknare (om man inte tycker att det är ett egenvärde i att beräkna 2^9 för hand).

15.2 Svar till grundproblemet

- $2^2 = 4$ sätt (som "1 + 1 + 1", "2 + 1", "1 + 2" och "3")
- $2^3 = 8$ sätt (som "1 + 1 + 1 + 1", "2 + 1 + 1", "1 + 2 + 1", "3 + 1", "1 + 1 + 2", "2 + 2", "1 + 3" och "4")
- $2^9 = 512$ sätt
- 2^{n-1} sätt
- Förmodligen "som summa av två termer". Finns 9 sådana; 1:a termen kan vara allt mellan 1 o h 9.

15.3 Svar till utvidgningarna

Speciella termer

- $2^4 = 16$
- Inga, om n inte är delbart med k . Annars $2^{n/k-1}$.

Andra sorters tal

- Det finns plötsligt hur många sätt som helst, för om inte annat kan man lägga till "+0" eller "+1 + (-1)" hur många gånger man vill.
- Även då blir det hur många sätt som helst. Har man en summa kan man få en ny summa genom att bryta isär termerna i mindre delar.

Utan ordning

- Här är en tabell som ger antalet sätt att skriva ett tal som en summa där ordningen mellan termerna saknar betydelse:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	5	7	11	15	22	30	42

15.4 Matematiskt innehåll

Förkunskaper

- Potensräkning

Utbyte

- Taluppfattning
- Mönsterigenkänning
- Matematisk argumentation
- Kombination av Lösningsstrategier kan ge nya insikter
- **Begrepp:**
 - rekursion,
 - potenser,
 - geometrisk talföljd,
 - summa av geometrisk talföljd,
 - heltal,
 - termer,
 - ordning mellan termer

15.5 Lösningsstrategier till grundproblemet

Om eleverna har svårt att komma igång kan man tipsa om att det kan vara värt att titta på även 1 och 2; går snabbt att undersöka och ger mer material att söka mönster i. Man kan också fortsätta med 5 och kanske 6; det ger också mer material.

Rekursivt / icke rekursivt Det icke rekursiva är att lösa varje fall som ett nytt problem, det rekursiva att på något sätt utnyttja de redan lösta fallen. De flesta börjar antagligen icke rekursivt, men kan efter några steg (delvis av ren lättja) övergå till rekursiv analys.

Det finns ett antal olika rekursiva lösningar, se nedan.

Brute-force Försöka skriva upp alla sätt man kommer på, mer eller mindre systematiskt. Om man *inte* arbetar systematiskt blir det här mycket svårt att argumentera för att man inte har missat någon möjlighet då man är inne på 10. (Risken att råka ta med något flera gånger finns också – 512 alternativa lösningar är för många för att man ska ha överblick.)

De som håller på så här kan få som inledande tips att försöka hitta på något system för hur de skriver summorna, och efter ett tag tipset att se om de på något sätt kan utnyttja de redan lösta talen. Att se om man kan hitta något smart sätt att ta fram uppdelningarna av 5 kan leda vidare.

Mönsterigenkänning Efter att ha löst de första fallen kan man ur 1, 2, 4, 8 börja mistänka att det blir fördubbling i varje steg. Läraren bör då uppmana eleverna att försöka hitta en förklaring till det uppkomna mönstret.

Rekursivt 1: sista termen Försök se ett system:

- 1 kan skrivas som 1; 1 sätt.
- 2 kan skrivas som $1 + 1$ eller som 2; 2 sätt.
- 3 kan skrivas som $1 + 1 + 1$, $2 + 1$, $1 + 2$; 3; 4 sätt.

- 4 kan skrivas som $1 + 1 + 1 + 1$, $2 + 1 + 1$, $1 + 2 + 1$, $3 + 1$, $1 + 1 + 2$, $2 + 2$, $1 + 3$, 4 ; 8 sätt.

Det verkar bli dubbelt så många möjligheter varje gång. Varför?

Om man tittar på summorna för 4 så är de 4 första 3:s summor utökade med "+1". Man inser att det för varje tal går att lägga på "+1" på samtliga summor för föregående tal, och det finns därför precis lika många summor som slutar "+1" som det fanns summor totalt för föregående tal. (Man kan lika gärna titta på vilka summor som börjar med "+1".)

De andra summorna, de som inte slutar "+1", kan man få genom att istället öka sista termen med 1, så att t.ex. $1 + 1 + 1$ ändras till $1 + 1 + 2$. Alla summor som slutar på något annat än 1 går att åstadkomma den vägen. Så det finns lika många av den sorten också. Detta förklarar varför det blir dubbelt så många i varje steg. För 10 blir det $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^9 = 512$ varianter. För talet n blir det 2^{n-1} varianter.

Rekursivt 2: lägg på en term Lös problemet för mindre tal och försök se ett system:

- 1 kan bara skrivas som 1; 1 sätt.
- 2 kan skrivas som $1 + 1$ eller som 2; 2 sätt.
- 3 kan skrivas som $1 + 1 + 1$, $2 + 1$, $1 + 2$, 3; 4 sätt.
- 4 kan skrivas som $1 + 1 + 1 + 1$, $2 + 1 + 1$, $1 + 2 + 1$, $3 + 1$, $1 + 1 + 2$, $2 + 2$, $1 + 3$, 4 ; 8 sätt.

Om vi nu skulle vilja summera ihop 5 så kan vi lägga på "+1" på någon av 4-summorna, "+2" på någon av 3-summorna, "+3" på någon av 2-summorna, "+4" på 1-summan, eller skriva bara 5. Det ger att det finns $8 + 4 + 2 + 1 + 1 = 16$ sätt att ta fram 5.

Samma resonemang ger $16 + 8 + 4 + 2 + 1 + 1 = 32$ sätt att ta fram 6, $32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 + 1 = 64$ sätt att ta fram 7, $64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 + 1 = 128$ sätt att ta fram 8, $128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 + 1 = 256$ sätt att ta fram 9 och $256 + 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 + 1 = 512$ sätt att ta fram 10.

Om man noterar att de sista termerna i summan är de termer som man i förra steget använde för att ta fram den första termen kan man inse att varje tal blir det föregående fördubblat.

Om man kopplar ihop den här lösningen med föregående ser man att man har hittat sambandet $2^n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2^2 + 2^1 + 2^0 + 1$, eller $2^n - 1 = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2^2 + 2^1 + 2^0$. Detta är ett exempel på summan av en geometrisk serie, och visar också på nyttan av att ge flera lösningar till samma problem. (Jämför hur man ur två lösningar till *Glassarna* kan ta fram formeln för summan av en aritmetisk serie.)

Rekursivt 3: antal termer För talet n finns som minst en enda term och som mest n termer, 1:or allihop. Analysera alla antalen var för sig.

För 10 blir denna analys enligt

- 1 term går bara på 1 sätt: "10".
- 10 termer går bara på 1 sätt: alla termerna 1.
- 2 termer: första är mellan 1 och 9, andra får bli det som behövs för att summan ska bli 10: 9 sätt.
- 9 termer: måste vara 8 1:or och en 2:a. 2:an kan stå på något av 9 ställen: 9 sätt.
- Andra termantal: Blir ganska komplicerat.

Detta är en systematisk metod som är mycket naturlig att testa, men som är svår att få

att leda någonstans.

Ett sätt att komma vidare är att inse att man kan få t.ex. en summa som blir 10 med 5 termer genom att antingen utgå från en summa som blir 9 och har 4 termer och lägga på en 5:e term som är 1 eller utgå från en summa som blir 9 och har 5 termer och öka den sista med 1. (Den första metoden ger summor som slutar "+1", den andra summor som slutar på annat sätt.) Man kan tabellera upp det här sambandet, vilket fordrar att man tar reda på alla sätt att summera fram alla tal till och med 10. Tabellen blir

					1					
					1		1			
				1	2		1			
			1	3	3		1			
		1	4	6	4		1			
	1	5	10	10	5		1			
	1	6	15	20	15	6	1			
	1	7	21	35	35	21	7	1		
	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	

och man får antalet sätt att summera fram 10 genom att summera nedersta raden, vilket ger 512.

(En lärare känner väl igen detta som Pascals triangel, som innehåller binomialtalen. Ett sätt att komma fram till det är en variant på det konkreta resonemanget. Om man vill skriva 10 som summa av 5 termer så motsvarar det att lägga 10 stenar i rad och välja 4 av de 9 mellanrummen att dela upp talet i. Detta är ju ingenting som en grundskoleelev kan förutsättas bekant med, men om någon grupp spontant drar iväg åt det här hållet kan man haka på.)

Konkret och kombinatoriskt Lägg ut 10 stenar på rad. I denna rad finns då 9 mellanrum. För varje mellanrum har vi två alternativ: dela av talet där eller dela inte av talet där. Dessa beslut kan fattas helt oberoende av varandra. Därför finns det $2^9 = 512$ sätt att göra detta.

Vill man öka chansen att några kommer på denna metod kan man vid presentationen av problemet representera 10 som 10 prickar, som en konkretisering av hur man visar talet för en 7-åring.

Kommentar Här har man ett exempel på lite "bakvänd" matematisk modellering – problemet löses genom att gå från abstrakt till konkret, motsatsen mot det vanliga. Om inte annat därför bör man visa den här lösningen även om ingen grupp kommit in i de banorna.

15.6 Lösningsstrategier till utvidgningarna

Speciella termer

- Ta en summa som blir 5 och fördubbla alla termerna – ger en summa med jämna termer som blir 10.
- Ta en summa som blir n/k (vilket fordrar att detta är ett heltal) och multiplicera alla termerna med k .

Andra sorters tal

Här finns förmodligen inga större möjligheter att variera förklaringarna. Men framför allt frågan om vad som händer om man inte kräver att det ska vara heltal kan leda till diskussion. Här är man ju inne på skillnaden mellan den diskreta och den kontinuerliga matematiken och olika talområden. Det här problemet är bara meningsfullt i heltalsvariant. Detta kan också ge en chans att fånga upp de som ännu inte riktigt förstått att det finns annat än heltal.

Utan ordning

En sådan här uppdelning kallas en *partition*, och det här problemet är verkligen *mycket* krångligare. Man måste ta hänsyn till både hur många termer man har och hur många av dem som är lika. De som är olika spelar det roll om man byter plats på, de som är lika spelar det ingen roll. Om man med $p(n)$ betecknar antalet partitioner av n så gäller följande rekursiva formel:

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + p(n-15) - p(n-22) - p(n-26) + \dots$$

Denna formel kallas *MacMahons rekursion*. Att förklara den ligger på nivån avancerad högskolematematik.

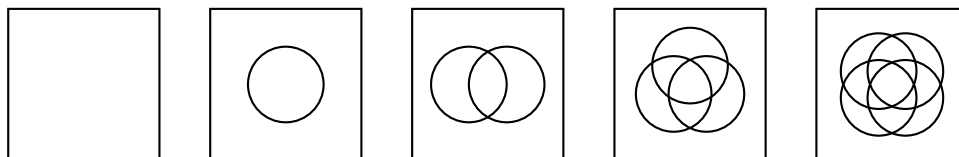
15.7 Vidare diskussion

Det här problemet kan leda vidare till en viktig diskussion om matematisk argumentation. Det blir troligen ett antal som efter de första stegen kommer fram till "det blir tydligen dubbelt så mycket i varje steg" utan att försöka förklara varför.

Men det är viktigt att vara medveten om att bara för att en formel har fungerat i samtliga fall som man har testat så är det ändå inte givet att den fungerar i de fall som man *inte* har testat. Man måste ha en förklaring av varför den fungerar för att kunna känna sig säker.

Om man har svårt att få fram detta kan man exempelvis titta på funktionen $f(x) = \frac{4}{3}x - \frac{1}{5}x + \frac{1}{6}x^3$. De första värdena man får ur den är $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 4$ och $f(4) = 8$. Men om man gissar att värdena fördubblas i varje heltalssteg så har man fel – $f(5) = 15$, inte 16!

Ett annat bra fall att undersöka är Venndiagram ur mängdläran: Om man har en ruta och i den ritar ett antal cirkel som skär varandra, hur många delområden kommer man då ha delat upp rutan i?



De fyra första delas i 1, 2, 4 respektive 8 delar. 5:e innehåller bara 14 delområden. Inte heller här handlar det om fördubbling, fast det verkar så om man bara tittar på de första stegen.

16 Klubbverksamhet

Detta problem finns väl i miljoner varianter, i allt från *Kamratposten* till tävlingen *Unga matematiker*. Här ges en halvvägs vettig kontext.

Uppgiften har mycket text, så det kan vara bra att gå igenom den ordentligt och kanske skriva upp själva kärnan på tavlan. Annars kan elever med lässvårigheter ha problem med att ta till sig vad det är som ska göras.

Det kan vara intressant att låta någon grupp göra den enklare varianten, eftersom det ger möjlighet att studera hur pass mycket svårare problemet blir då man ökar antalet mängder. Det finns också möjligheten att göra den enklare varianten vid ett tillfälle, o h den svårare nästa gång.

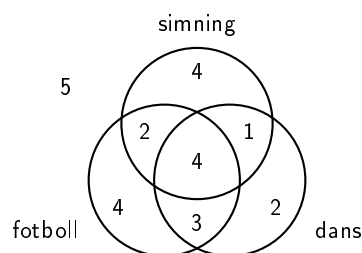
16.1 Användbart material

- Spelpjäser, tändstickor, eller något liknande, som kan representera eleverna. (Det behövs många!)
- Papper i A3 eller annat stort format.
- Miniräknare (eventuellt).
- *Om man kan hitta det:* En autentisk tidningsartikel där journalisten gör precis samma misstag som journalisten i historien. Sådana dyker upp med jämna mellanrum, och en vaksam lärare kan hålla utkik efter dem. Att analysera en sådan och försöka komma fram till var luckorna i resonemangen ligger och vilka slutsatser som man egentligen kan dra kan vara mycket givande, både som matematik och som en lektion i vikten av att betrakta information i media med ett kritiskt öga.

16.2 Svar till grundproblemet

Basvarianten

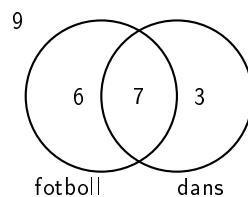
Klubb	antal
Ingen klubb	5
Bara simklubben	4
Bara fotbollsklubben	4
Bara dansklubben	2
Alla utom simklubben	3
Alla utom fotbollsklubben	1
Alla utom dansklubben	2
Alla klubbarna	4
Totalt	25



1. 4.
2. 10.
3. Se Lösningstrategier.

Den enklare varianten

Klubb	antal
Ingen klubb	9
Bara fotbollsklubben	6
Bara dansklubben	3
Båda klubbarna	7
Totalt	25



1. 7.
2. 9.
3. Se Lösningsstrategier.

16.3 Svar till utvidgningen

1. $2^4 = 16$
2. Om vi kallar klubbarna ABCD: ingen, A, B, C, D, AB, AC, AD, BC, BD, CD, ABC, ABD, ACD, BCD, ABCD.

16.4 Matematiskt innehåll

Förkunskaper

Nödvändigt:

- Addition och subtraktion

Bra att ha:

- Ekvation
- Ekvationssystem
- Grundläggande mängdlära

Utbyte

- Olika strategier för samma problem
- Formulering av verklighetsproblem i matematiska termer (modellering)
- Grundläggande mängdlära, speciellt överlappande mängder
- **Begrepp:**
 - mängd
 - disjunkt

16.5 Lösningsstrategier till grundproblemet

Strategierna beskrivs här för basvarianten av problemet, men samma metoder kan användas på den enklare varianten.

Konkret lösning med trial-and-error Rita upp klubbarna och ta 20 spelpjäser eller något och försök placera in dem så att det blir lagom många i de olika områdena. Som bild behövs ett Venn-diagram med tre mängder, med tillräckligt stora områden för att spelpjäserna ska få plats.

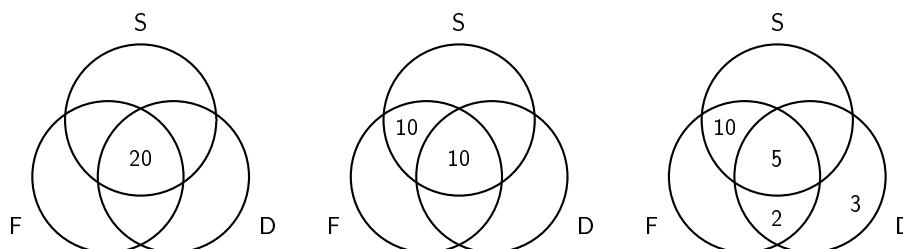
Alternativt representerar man personerna med prickar, som man försöker placera in på ett fungerande sätt. Det kan bli ganska kladdigt om man behöver ändra, förutom att det är svårt att med ögonmått bedöma exakt hur många prickar man har ritat. Om några försöker den vägen kan man tipsa om att det går att använda något som går att flytta istället.

Ytterligare ett alternativ är att skriva antal, som man kan ändra genom att stryka över och skriva ett nytt förslag.

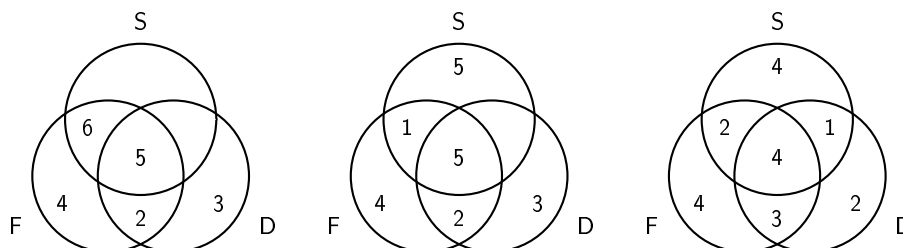
Konkret lösning, systematisk med start i korrekt antal Man startar med ett diagram och exempelvis allt i mitten, och flyttar sedan om enligt någon systematisk plan. (Också här kan personerna vara representerade med spelpjäser, prickar eller siffror.) Här följer

ett exempel på en sådan lösning:

Starta med allt i mitten, fokusera först på att få dansklubben rätt. Det är just nu 20 personer i den, ska bara vara 10. Flytta 10 markörer till skärningen mellan fotboll och simning. Det ska vara 5 personer i skärningen mellan simning och dans, och 7 i skärningen mellan dans och fotboll. Flytta 2 markörer till dans+fotboll, lämna 5 i mitten och flytta 3 till bara dans. Nu stämmer allt i dansklubben.



Nu tittar vi på simklubben. Just nu finns 15 personer i den cirkeln, och det ska bara vara 11. Dansklubben ska inte ha fler, så flytta 4 till bara fotboll. Nu är det 11 i fotboll+simning, ska bara vara 6. Flytta 5 till bara simning. Nu är allt rätt för både sim- och dansklubben. Men det är 12 personer i fotbollsklubben; ska vara 13. Den felande personen måste lånas från sim+dans. Om de får en gemensam medlem så har de fortfarande rätt antal. Men då blev det en person för mycket i deras skärning. Ta bort en ur centralgruppen. Fast nu är det plötsligt en person för lite i både sim och dans, och vi har två pjäser i handen. Lägg dem i skärningarna med fotboll så stämmer allt.



En del systematiska omflyttningsplaner leder till att man temporärt behöver placera ett negativt antal personer i ett visst område. Just där har siffror en fördel framför de andra representationsformerna, eftersom man med dessa kan representera negativa tal. (Att detta inte inträffade i det illustrerade exemplet beror på att man där startade med att få ordning på den *minsta* gruppen.)

Konkret lösning, systematisk med start i inkorrekt antal Man startar i diagrammet, och ställer 11 personer i "enbart simklubb", 13 i "enbart fotboll" och 10 i "enbart dans". Detta är ju för många, och man försöker enligt något system minska ner till rätt antal, t.ex. genom att flytta ett antal personer till en skärning mellan två mängder och i samband med det ta bort ett antal andra. Också här kan alla representationsformer användas, och också här kan man få negativa mellanresultat.

Resonemang utan bildstöd Börja med simklubben och fotbollsklubben. Av de 11 i simklubben är 6 också med i fotbollsklubben. Alltså är 5 inte med i fotbollsklubben. Av de 13 i fotbollsklubben är 7 inte med i simklubben. (Detta är en lösning av den enklare varianten av problemet.)

Tillsammans har simklubben och fotbollsklubben $5 + 6 + 7 = 18$ medlemmar. 20 personer är med i klubbarna, så det måste vara 2 som är med i dansklubben men inte någon av

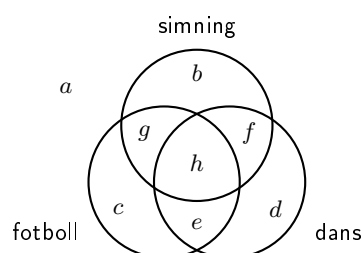
de andra.

Lägger man till dessa 2 att 7 också är med i fotbollsklubben och 5 i simklubben får man 14, vilket är 4 mer än vad dansklubben innehåller. 4 måste alltså tillhöra båda de andra klubbarna. Då är 3 av dem med i fotbollsklubben men inte simklubben, och 1 i simklubben men inte fotbollsklubben.

Denna typ av resonemang kan läggas upp på många sätt. Eftersom det blir ganska svåröverskådligt kan de som gör så här uppmanas att ställa samman resultatet i en tabell. Det är ganska stor risk att resonemanget börjar gå i cirklar eller missar någon aspekt.

Algebra Sätt namn på de olika alternativen:

Klubb	antal
Ingen klubb	a
Bara simklubben	b
Bara fotbollsklubben	c
Bara dansklubben	d
Alla utom simklubben	e
Alla utom fotbollsklubben	f
Alla utom dansklubben	g
Alla klubbarna	h



Med den givna informationen kan man nu ställa upp ett ekvationssystem:

$$\begin{cases} e + h = 7 \\ f + h = 5 \\ g + h = 6 \\ b + f + g + h = 11 \\ c + e + g + h = 13 \\ d + e + f + h = 10 \\ b + c + d + e + f + g + h = 20 \end{cases}$$

Med systematisk substitution kan detta 7-variablers linjära ekvationssystem lösas. (Förslagsvis börjar man med att uttrycka e , f och g i h och sätta in detta i efterföljande ekvationer, varvid b , c och d kan uttryckas i h . Allt detta insatt i sista ekvationen ger ett värde på h , med vars hjälp man nu kan ta fram de andra värdena.) Arbetar man osystematiskt är risken att man blir sittande hur länge som helst.

Inklusion–exklusion Om man lägger ihop klubbarnas medlemsantal kommer alla som är med i två klubbar ha räknats med två gånger. Det kan man rätta till genom att dra bort dem en gång. Fast de som var med i alla tre klubbarna kommer då ha räknats med tre gånger, och sedan dragits bort tre gånger. Det var en gång för mycket! Lägg till dem igen. Nu vet vi inte vad just det antalet är, så vi kan kalla det x . Vi har nu ekvationen

$$\begin{aligned} 11 + 13 + 10 - 6 - 7 - 5 + x &= 20 \\ 16 + x &= 20 \\ x &= 20 - 16 = 4 \end{aligned}$$

4 personer är med i alla klubbarna. Då är $6 - 4 = 2$ med i fotbolls- och simklubben men inte i dansklubben; $7 - 4 = 3$ med i fotbolls- och dansklubben men inte simklubben och $5 - 4 = 1$ med i dans- och simklubben men inte fotbollsklubben.

Då är $11 - 2 - 1 - 4 = 4$ med i bara simklubben; $13 - 2 - 3 - 4 = 4$ med i bara fotbollsklubben och $10 - 3 - 1 - 4 = 2$ med i bara dansklubben.

(Detta är den lösning som en kombinatoriker föredrar.)

Eget problem

Om man hinner med det egna problemet så kan det vara en utmaning att få eleverna att inte bara byta siffror och klubbverksamhet, utan försöka hitta en helt ny kontext. Det som följer här är kanske mer intressanta aspekter än Lösingsstrategier, men de fick stå under denna rubrik.

Lösbarhet Om man bara hugger siffror ur luften är risken stor att man sätter ihop ett olösbart problem, där någon kategori måste innehålla ett negativt antal personer. Ett sådant problem kan vara intressant att analysera, och kan leda till diskussion om i vilka sammanhang negativa tal är meningsfulla och i vilka de inte är det.

Vad är sökt? Det kan vara intressant att se om alla gör problem där det är den centrala skärningen som är okänd, eller om några inser att vilket som helst delområde kan vara det sökta. Det kan behövas uppfinningsrikedom för att hitta på dels en bra anledning till att man vill ha reda på den saknade informationen och dels en bra anledning till att den saknades.

Kontexter Exempel på vanliga kontexter för sådana här problem är först och främst kombinatorik, där man ofta är intresserad av antalet element i unionen av ett antal mängder eller antalet element utanför unionen, och där principen om inklusion-exklusion är standardtekniken. (Där är oftast alla de separata kategorierna någorlunda enkla att ta fram, och det är totalantalet som är det okända.)

Om man följer klubbmotivet så kan man vilja ha reda på om klubbarna har gemensamma medlemmar, eftersom det är relevant vid mötesplanering.

En bra kontext är då mängderna motsvarar språkkunskaper. Där kan man verkligen vilja ha reda på hur många det är i var kategori, och om det finns några personer i skärningarna (eftersom dessa då kan tjänstgöra som tolkar).

16.6 Lösingsstrategier till utvidgningen

Vennndiagram – felaktigt Rita upp ett Vennndiagram, men med fyra cirkulära mängder, och räkna delområdena. Tyvärr ger ett sådant diagram bara 14 av de 16 möjliga kombinationerna, enligt sidan 112. (Det går att göra ett korrekt Vennndiagram med fyra mängder, men man kan inte göra alla cirkulära.)

Kombinatorik För varje klubb gäller att man kan vara med eller inte. Det är två alternativ, och på 4 klubbar ger detta $2^4 = 16$ möjligheter.

Binomialtal Om man redan känner till begreppet binomialtal passar det här: att välja vilka klubbar man ska vara med i är ett ordnat urval utan återläggning. (Det spelar ju ingen roll vilken klubb man gick in i först, och man kan inte vara med i en och samma klubb flera gånger. Det enda viktiga är *vilka* av de fyra klubbarna man är med i.) Antalet sätt att vara med i ingen klubb är $\binom{4}{0} = 1$; i exakt en klubb $\binom{4}{1} = 4$; i två klubbar $\binom{4}{2} = 6$; i tre klubbar $\binom{4}{3} = 4$; och i alla fyra $\binom{4}{4} = 1$.

Lista Ett sätt att räkna antalet möjligheter är att börja med den andra uppgiften och sedan räkna hur många alternativ man fick. Listan kan sedan tas fram på olika sätt.

Ostrukturerat listande Man försöker skriva upp alla versioner man kommer på, utan något speciellt system. Eftersom 16 är mer än vad som är lätt överblickbart är det både risk för att man missar alternativ och att man råkar ta med något flera gånger (kanske med klubbarna i olika ordning). Om man representerar klubbarna med fullständiga namn istället för med en bokstav blir det ännu mer överskådligt. (Där kan man ju tipsa om att förkorta namnen till en bokstav och att skriva bokstäverna i bokstavsordning; det förenklar.)

Lista efter antal klubbar Sortera alternativen efter vilket antal klubbar man är med i. (Det är så lösningsförslaget är uppställt.) 0, 1, 3 och 4 klubbar är lätt att analysera (åtminstone om man inser att "vara med i 3 klubbar" är samma sak som "inte vara med i 1 klubb"); 2 klubbar är lite knepigare, och motsvarar problem 1 på sidan 44 (där man ska sätta ihop en glass med 2 kulor valda bland 4 smaker). Olika lösningsstrategier finns beskrivna i analysen av det problemet.

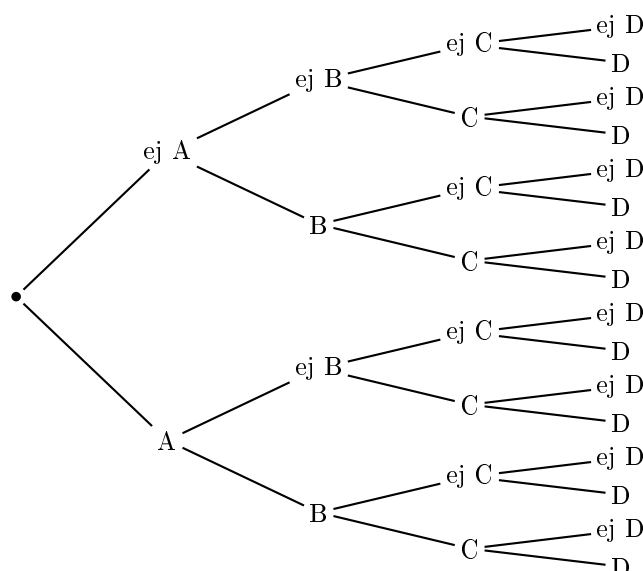
Lista efter tillhör/tillhör inte Listan blir något iden här stilen:

A	B	C	D
nej	nej	nej	nej
nej	nej	nej	ja
nej	nej	ja	nej
nej	nej	ja	ja
nej	ja	nej	nej
nej	ja	nej	ja
nej	ja	ja	nej
nej	ja	ja	ja
ja	nej	nej	nej
ja	nej	nej	ja
ja	nej	ja	nej
ja	nej	ja	ja
ja	ja	nej	nej
ja	ja	nej	ja
ja	ja	ja	nej
ja	ja	ja	ja

Listan kan erhållas genom att man systematiskt försöker skriva ner möjligheterna, men den kan också erhållas genom rekursivt resonemang: Oavsett om man är med i A eller inte så följs det av samma möjligheter för de andra klubbarna. Man kan därför konstruera den listan och kopiera, och fylla på med information. Samma resonemang gäller för del-listorna. Detta är något som man om inte annat kan inse *efter* det att man satt ihop listan, och då inser man att om man insett det tidigare så skulle man sparat en massa jobb.

(Om man har arbetat med binära tal så kan man notera att om man betecknar *nej* med 0 och *ja* med 1 så har man här talen 0–15 i binärnotation. Det är så kombinatoriker brukar gå till väga om de vill ta fram alla de möjliga kombinationerna, eftersom binärtalen är lätta att ta fram och kopplingen till de olika alternativen är enkel.)

Beslutsträd Har man tidigare sett beslutsträd så passar den tekniken att använda. Besluten är då ifall man ska gå med i klubb x eller inte. Ett sådant här träd kan bli resultatet:



Det här trädet är i princip samma sak som tabellen; enda skillnaden är egentligen att man skrivit upp "inte A" en gång istället för 8 gånger.

Det som kan vara knepigt med beslutsträd är att avgöra vilka beslut det egentligen är som ska fattas.

16.7 Kommentarer

Ett mycket viktigt begrepp som denna uppgift tar upp är *icke-disjunkta* kategorier. Journalisten i historien utgick från att de tre klubbarna bestod av olika personer, och det fanns det ju ingen anledning till att de skulle göra. Detta är ett mycket vanligt felresonemang. Att få upp vaksamheten för det här är användbart inom i stort sett alla ämnen.

17 Schackbrädet

Ett välkänt knep-och-knåp-problem i två versioner.

Man kan behöva klargöra att det inte handlar om *samtidigt* möjliga kvadrater; ett 4×4 -bräde kan ju delas upp i fyra 2×2 -kvadrater, men tillåter man att kvadraterna överlappar så ryms nio.

Problemet är så pass avancerat att det inte är lämpligt att inleda med; gruppen bör ha löst några enklare problem med mönsteranalys tidigare.

En del metoder att angripa problemet ger aritmetiska summor som mellanresultat. Om man tidigare hållit på med sådana kan man då snabbt gå igenom vad man kom till förra gången, så att eleverna kan lägga tiden på de nya aspekterna i det här problemet.

17.1 Användbart material

- Rutat papper.
- Olika slags pennor, i olika färger.
- Linjal.
- (Inte nödvändigt) Schackbräde.
- Miniräknare.
- (Eventuellt, om man gör *En formel*;) Klossar och häftmassa.
- (Om man gör *Andra "bräden"*;) Papper med triangulärt rutnät.
- (Om man gör *Andra "bräden"*;) Klossar.

17.2 Svar till grundproblemet

Basversionen

1. $2 \cdot 2 = 4$
2. $3 \cdot 3 = 9$
3. $6 \cdot 6 = 36$
4. $1^2 + 2^2 + \dots + 8^2 = 204$
5. $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$
6. Se *lösningsstrategier*.

Varianten

1. $1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$
2. $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$
3. $1^2 + 2^2 + \dots + 8^2 = 204$
4. $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$
5. Se *lösningsstrategier*.

17.3 Svar till utvidgningarna

En formel

1. Mittenformeln erhålls om man sätter vänstra formeln på gemensamt bråkstreck eller multiplicerar ihop faktorerna i den högra.
2. Formeln *bör* ge rätt svar.
3. Se *Lösningsstrategier*.
4. Se *Lösningsstrategier*.

Andra "bräden"

1. $((1+2+3+4) + \underset{\text{spets uppåt}}{(1+2+3)} + (1+2) + 1) + ((1+2+3) + \underset{\text{spets neråt}}{1}) = 24$
2. $((1+2+\dots+n) + \dots + (1+2) + 1) + ((1+2+\dots+(n-1)) + (1+2+\dots+(n-3)) + \dots)$
3. $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 = 1296$

17.4 Matematiskt innehåll

Förkunskaper

Nödvändigt

- Kvadrater
- Variabelbegreppet

Bra att ha

- Andra potenser
- Aritmetiska summor

Utbyte

Grundproblemet:

- Mönsterigenkänning
- Icke-aritmetiska summor
- Kvadratiske samband
- Formelsamband

Utvidgningarna

- Algebraiska omskrivningar
- Icke rätvinklig geometri
- 3D-geometri

17.5 Lösningsstrategier

Ostrukturerat letande Försöka ringa in alla kvadrater man hittar, utan systematik. Kan leda till mer systematiskt arbete, då man börjar se ett mönster i hur markeringarna är placerade. Räknar man utan att markera trasslar man förmodligen in sig totalt. (Ett tips kan då vara att markera det man räknat, så att man inte räkar ta det flera gånger.)

Resultat utan mönsterigenkänning Den som letar ordentligt kan komma fram till att svaret är $1+4+9+\dots$, men kanske ändå inte identifiera talen som de jämna kvadraterna. Det gör det svårt att generalisera formeln.

Resultat med mönsterigenkänning men utan motivering En del som hittar $1+4+9+\dots$ känner igen detta som summan av kvadraterna, men har ingen ordentlig motivering av varför det blev så.

Rekursivt resonemang (Inträffar troligast om man arbetar med varianten, och också troligast om man löst andra problem där rekursion var en bra idé.) Alla kvadrater som fanns i närmast mindre kvadrat finns fortfarande. Så exempelvis 3×3 innehåller alla 5 kvadraterna från 2×2 . Frågan är bara vilka ytterligare kvadrater den innehåller.

Kvadraten kan ses som den mindre kvadraten med en rad rutor pålagd i över- och hö-

gerkant. De nya kvadraterna måste ligga så att de ingår i denna kant. Största möjliga kvadrat kan bara ligga på ett sätt. Närmast mindre kan placeras i nya hörnet, eller skjutas ett steg åt vänster eller ett steg neråt, 3 möjligheter. På samma sätt finns det 5 möjligheter för den därefter. Ger att det blir $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$ nya kvadrater förutom de gamla.

Följer man upp det här landar man på formeln

$$1 + (1 + 3) + (1 + 3 + 5) + \dots + (1 + 3 + \dots + (2n - 1))$$

som är fullt korrekt men lite klumpig. Den kan förenklas med hjälp av formeln för aritmetisk summa tillämpad på delsummorna. Den kan också skrivas om genom att man samlar ihop identiska termer, vilket ger

$$n \cdot 1 + (n - 1) \cdot 3 + (n - 2) \cdot 5 + \dots + 1 \cdot (2n - 1)$$

Denna lösning ger också svaret på sista frågan; den förklarar resultatet.

Systematisk analys I en $n \times n$ -kvadrat gäller följande:

- En $n \times n$ -kvadrat kan bara placeras på ett sätt.
- Närmast mindre kvadrat kan placeras på 2 sätt i horisontalled (utmed överkant och utmed underkant) och 2 sätt i vertikalled (utmed vänsterkant och utmed högerkant). Totalt $2 \cdot 2 = 4$ möjliga placeringar.
- Närmast mindre kvadrat kan placeras på 3 sätt på båda ledderna; $3 \cdot 3 = 9$ möjliga placeringar.
- Och så vidare!

Summering ger totala antalet möjligheter. Också denna lösning förklarar resultatet.

Aritmetisk summa – felaktigt tillämpad Om man tidigare löst problem med aritmetiska summor så kommer en del förmodligen efter att ha kommit fram till en korrekt summa beräkna dess värde med formeln för aritmetisk summa. Den formeln är så frestande enkel, och det är lätt att bortse från att den härleddes under bestämda förutsättningar.

17.6 Lösningsstrategier för utvidgningarna

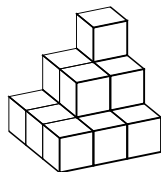
En formel

Standardmetoden att visa en formel av det här slaget är induktion, vilket ju ligger långt över svårighetsgraden för grundskolekursen (men är en teknik som ett barn som är intresserat av matematik och logik mycket väl kan komma på på egen hand).

Formelns korrekthet

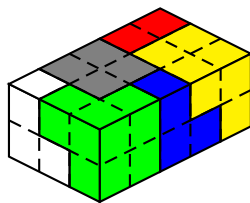
Bakvänd induktion En variant som fångar induktionens idé är att kontrollera hur stor skillnad det blir på de värden som formeln levererar för två på varandra följande tal. Om det blir en jämn kvadrat så vet man åtminstone att formeln hela tiden ger den korrekta ökningen, och eftersom den ger rätt svar för de första värdena så kommer den fortsätta att ge korrekta värden.

Geometri Man kan också försöka sig på en tredimensionell version av det geometriska beviset för den aritmetiska summan. $1^2 + 2^2 + \dots$ motvarar antalet klossar i en sådan här konstruktion:



Av sex sådana byggnader kan man pussla ihop ett rätblock med sidlängder n , $n + 1$ och $2n + 1$ och ur detta får man svaret.

Att göra detta generellt är nog väl svårt, men har man ett antal klossar kan man sätta ihop sex tredimensionella pusselbitar bestående av $5 = 1^1 + 2^2$ klossar, ihopfogade med häftmassa (eller lim om man vill använda pusslet flera gånger), och försöka lägga ihop dem till ett rätblock. Det blir ett ganska utmanande tredimensionellt pussel. Här är en bild av lösningen:



Varför heltal?

Argumentation från formelns innebörd Själva problemet handlar ju om *antal*, och sådana kan inte vara annat än (icke-negativa) heltal. Så om den här formeln korrekt beskriver problemet så kan den inte ge annat än heltal som resultat.

Delbarhet Om man får ett heltal som resultat så måste täljaren i uttrycket innehålla faktorn $6 = 2 \cdot 3$. Den är helt säkert jämn, dvs. innehåller 2 som faktor, eftersom om n är udda så är $n + 1$ jämnt, och tvärtom, och båda dessa tal ingår som faktorer i täljaren i högra versionen av formeln. Samma typ av resonemang måste gå att använda för att bevisa att även 3 ingår. Om n är en multipel av 3, t.ex. 9, så är saken klar, eftersom n är första faktor i uttrycket. Om n är ett steg under multipel av 3, t.ex. 8, så blir andra faktorn, $n + 1$, en multipel av 3. Och om n är ett steg över multipel av 3, t.ex. 10, så blir $2n$ två steg över, och $2n + 1$ då en multipel av 3. (Och fler sorters heltal än så finns inte.)

Det går att göra ett liknande resonemang på mittenformeln, men det är betydligt krångligare.

Övrigt

Generalisering av summaformel Uppmärksamma elever kan notera att då man la ihop tal upphöjda i ett (den aritmetiska summan) så fick man ett svar med en kvadrat, och då man la ihop tal upphöjda i två (som här) så får man ett svar med en kubik, och undra om det alltid är så att lösningen på en summa är en grad högre än termerna man adderade. Svaret på det är "ja", men beviset ganska krångligt.

Ett annat bräde

Här kan man tillämpa någon av de strategier som man använde på det kvadratiske brädet, med modifikationer.

Trianglar Enklarest är nog att separaträkna trianglar med spetsen uppåt och trianglar med spetsen neråt. Den största triangel med spets upp som man kan trycka in i på ett bräde med sidlängd n är brädet självt. Den största med spetsen ner har sidlängd motsvarande halva brädets sidlängd, avrundat neråt till heltal.

Kuber *Systematisk analys* från det kvadratiske brädet går lätt att generalisera till ytterligare en dimension.

17.7 Kommentarer

Det här problemet innehåller samma komplikation som exempelvis problem 15, *Alla möjliga summor*: Många kommer att se ett mönster och inte se något behov av att motivera det. Diskussionen i avsnitt 15.7 på sidan 112 kan vara värd att titta igenom, för det är samma tankegångar.

18 Likheter och liknande

Detta är taget ur den diskreta matematiken, område relationer med koppling mot logik. Den här typen av resonemang kan synliggöra delar av matematiken som ofta tas för givna, och kan leda till en plötslig aha-upplevelse för personer som missat tanken bakom andra beräkningar.

Problem 1 och problem 2 har så pass mycket gemensamt att det verkade bäst att sätta dem ihop. Man bör nog inte göra mer än ett av dem i taget, men det spelar ingen roll vilket man börjar med.

Problem 1 är i sig så pass omfattande att man kanske inte vill ta alla relationerna på samma pass. Det är bara att klippa bort de man inte vill ha. Man bör dock se till att man på ett och samma pass alltid har med både relationer som är transitiva och sådan som inte är det.

Man bör då man presenterar problemet gå till botten med det faktum att $=$ är transitivt, så att alla har klart för sig exakt vad det är som man diskuterar.

18.1 Användbart material

- Pennor, papper, och linjaler.
- Eventuellt: miniräknare (kan snabba upp experimenterande).

18.2 Svar

Problem 1

Egenskapen som undersöks här kallas som sagt *transitivitet*.

1. Ja. "Mindre än" betyder ju "ligger till vänster om på tallinjen", och i en hel sekvens tal där varje tal ligger längre åt höger kommer det första talet garanterat att ligga till vänster om det sista.
2. Nej. Oftast blir det ju så, men det är inte säkert. Exempelvis är $4 \neq 5 \neq 4$, men inte är första och sista talet i den kedjan olika!
3. Nej. Om talen exempelvis allihop avviker åt samma håll kan man få en stor ackumulerad avvikelse mellan första och sista⁶.
4. Ja. "Parallell med" kan ju definieras som "avståndet är konstant, oavsett var man mäter". (Summan av två konstanter är konstant.)
5. Nej. Golvet är vinkelrätt mot väggen som är vinkelrätt mot taket, men golvet och taket är inte vinkelräta.
6. Ja. Likformig är ju i princip omskalad och/eller vriden, och två omskalningar efter varandra med faktorerna x och y motsvarar en omskalning med faktorn xy , och en vridning på α° följt av en på β° motsvarar en vridning på $(\alpha + \beta)^\circ$.
7. Nej. Ens kusiner på modernet är släkt med en själv, som är släkt med kusinerna på fädernet. Men vanligtvis är de två kusinskarorna inte släkt med varandra.
8. Ja. ("Kortare än" är ju samma sak som $<$ tillämpat på längder, så samma resonemang gäller.)
9. Här går det att plocka rent matematiska saker som $>$, $\leq$, $\geq$, men också vardagliga exempel som *syskon till* och hybrider som *yngre än*.

⁶ Jag är säkert inte ensam om att ha sagt bräda 2 ungefär lika lång som bräda 1, bräda 3 ungefär lika lång som bräda 2 osv. för att sedan upptäcka att skillnaden på bräda 1 och bräda 20 var ganska stor... *Hillevi*

Problem 2

1. Nej. Exempel: Om det man gör är att multiplicera med noll blir de nya sakerna lika. Om man multiplicerar med något negativt vänds förhållandet. (Ett exempel för de som inte arbetar med negativa tal: vänder man positiva tal "upp-och-ner" vänds förhållandet; $2 < 3$ men $1/2 > 1/3$.)
2. Nej. Oftast blir det så, men inte alltid. Exempel: Om det man gör är att multiplicera med noll blir de nya sakerna garanterat lika. (Andra operationer ger likhet för en del tal; exempelvis är $-2 \neq 2$ men $(-2)^2 = 2^2$.)
3. Nej. Oftast blir det så, men inte alltid. Det beror ju lite på hur man har definierat "ungefär lika med", men det går alltid att hitta någon operation som förstärker skillnaderna så pass mycket att man inte längre kan klassa resultaten som "ungefär lika". (Om man definierar "ungefär" som "skiljer med högst 10%" är $10 \approx 11$ men $10^2 \not\approx 11^2$.)

Kommentar Det är ju lite ovanligt med tre ja/nej-frågor som alla har svaret "nej", men just det här resonemanget fungerar verkligen bara för likheter (men det är mycket vanligt att det används i alla möjliga situationer).

18.3 Matematiskt innehåll

Förkunskaper

Nödvändigt:

- Likhetsbegreppet
- Större-än/mindre-än-begreppet
- Ungefär lika med

För de geometriska delarna av uppgift 1:

- Parallellitet
- Vinkelräthet
- Likformighet

För uppgift 2:

- Ekvationslösning

Användbart:

- Negativa tal

Utbyte

- Fördjupad förståelse av främst likhetsbegreppet, men även av de andra relationer som tas upp.
- Fördjupad förståelse för de resonemang som ligger bakom de flesta former av beräkningar.
- Fördjupad förståelse för de resonemang som ligger bakom ekvationslösning.
- **Begrepp:**
likhet,
olikhet,
större än, mindre än,
parallellitet, vinkelräthet,
likformighet

18.4 Lösningsstrategier

De är i princip desamma för båda problemen.

Uttala sig tvärsäkert baserat på intuition Detta brukar vara ganska vanligt på den här typen av frågor. Man kan få diskutera fram och tillbaka ganska många varv angående att om det är sant så måste det gå att motivera.

Experimentera Testa sig fram och se vad som verkar gälla. Det här kan sedan följas upp på olika sätt. Om något av experimenten gav svaret "nej" är man ju framme; det är inte *säkert* att det blir som i frågan. Men om allihop gav svaret "ja" är det svårare.

Förhastade uttalanden baserade på experiment Om alla experimenten gav resultatet "ja" är det naturligt att misstänka att svaret är "ja", och många kommer då också säga att det *är* "ja". Men det är inte säkert; man kanske inte råkat testa något som leder till "nej".

Uppföljning baserad på experiment Om alla experimenten gav resultatet "ja" kan man försöka hitta en ordentligt förklaring till varför det blir "ja".

Försöka motbevisa Mer systematiskt experimenterande, där man letar efter något som ska leda till svaret "nej". Hittar man det så är saken klar. Hittar man det inte så kan man ofta se vad det var som gjorde att man misslyckades. (Bara det att man misslyckats visar ingenting.)

Resonera Tänka igenom vad begreppen verkligen betyder, och vad det har för konsekvenser. Detta kan följa på någon av de andra versionerna, eller vara det man direkt startar med.

19 Smultronasken

Detta är precis som problem 9, *Staketet*, ett klassiskt optimeringsproblem som återfinns i de flesta läroböcker i differential- och integralkalkyl. Måtten på kartongbiten är valda så att optimum inte blir i ett heltal.

19.1 Användbart material

- Tjockt papper eller tunn kartong, färdigskuret i kvadratiske bitar av rätt mått, vilket är avkortad A4. (Ska vara tillräcklig stadigt för att inte kollapsa, tillräckligt tunt för att vara lätt att klippa i.)
- Saxar, tejp, häftapparat.
- Linjaler och pennor, gärna vinkelhakar.
- Risgryn, sand eller något, att fylla lådorna med för att kontrollera att den verkliga volymen stämmer med den beräknade. Skopor eller något att ösa detta material med.
- Mått.
- Sopborste och skyffel.
- Miniräknare.
- Grafritande räknare eller program.

19.2 Svar

1. —
2. —
3. $14 \times 14 \times 3,5$ cm (vilket väl får sägas vara "bred och låg"). Volymen är 686 cm^3 .
4. —
5. $12 \times 12 \times 3$ cm.

19.3 Matematiskt innehåll

Förkunskaper

- Längd, area, volym
- Variabelbegreppet
- Algebraiska omskrivningar
- Formelsamband
- Potenser
- Geometriska definitioner

Utbyte

- Formulering av verklighetsproblem i matematiska termer (modellering)
- Tolkning av grafer
- **Begrepp:**
 - area,
 - volym,
 - icke-linjära samband,
 - optimering,
 - algebraisk formel,
 - maximum/minimum,
 - extrempunkt

19.4 Lösningsstrategier

Gissningar "Något mitt-emellan" är väl den troligaste gissningen, för det brukar vara rätt. "Kub", lika hög som bred, kan räknas som en mitt-emellan-lösning, och en ganska trolig gissning. (Det besläktade problemet "gör en låda med lock med minimal area" har en kub som svar.) "Halv kub" är också en trolig gissning, speciellt om man tidigare har gjort *Staketet* där "halv kvadrat" var den optimala lösningen. (Den avbildade asken har de måtten.) Sannolikheten att någon gissar rätt är ganska låg, för svaret är en smula kontra-intuitivt.

Om man är tröttnad att några i klassen drar sig för att gissa därför att de inte vill göra bort sig genom att ha fel kan man samla in gissningarna på papper och skriva upp på tavlan anonymt.

Insamlande av data

Ostrukturerat datasamlande Eftersom det är så pass arbetsamt att sätta ihop askar med olika mått tar de flesta nog och nöjer sig med de som de gjorde allra först, och tar och gör pappersberäkningar för övriga storlekar. En metod är att utgå från de data man har efter askbygget, och komplettera med lite storlekar utan något större system. En sådan lösning kan sedan vidareutvecklas till en tabell.

Man kan dela ut miniräknare då gruppen har beräknat en ask korrekt för hand; det är mycket räkningar i det här problemet.

Tabellera – endimensionellt En tabell är en mer strukturerad uppställning av data. Dessa kan göras med eller utan formel; om man börjar utan kan man efter ett tag inse att alla beräkningarna blir precis likadana och därvid formulera beräkningsprincipen.

Oavsett om man arbetar med beräkning med eller utan formel kan man utgå från antingen bredden eller höjden på asken. Det mest naturliga är att starta med att gå hela centimeter. Höjden ger följande tabell:

höjd (cm)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
bredd (cm)	19	17	15	13	11	9	7	5	3	1
volym (cm ³)	361	578	675	676	605	486	343	200	81	10

och bredden följande lite större tabell:

bredd (cm)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
höjd (cm)	10	9,5	9	8,5	8	7,5	7	6,5	6	5,5
volym (cm ³)	10	38	81	136	200	270	343	416	486	550

bredd (cm)	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
höjd (cm)	5	4,5	4	3,5	3	2,5	2	1,5	1	0,5
volym (cm ³)	605	648	676	686	675	640	578	486	361	200

Man behöver givetvis inte gå i 1-cm-steg.

Tabellera – tvådimensionellt Ett alternativt sätt att ställa upp tabellen är med bredden horisontellt och höjden vertikalt (eller tvärtom). Detta ger en ganska stor tabell, där majoriteten av värdena tillhör askar som inte stämmer med den kartongbit som man ska utgå ifrån. (Det är relativt troligt att man inser detta innan man fyllt i *hela* tabellen.)

Man kan, om man ställt upp tabellen så här, nöja sig med att fylla i de positioner som motsvarar möjliga askar (dvs. de där $b + 2h = 21$).

Formel Om man kallar höjden för h och bredden för b beräknas volymen enligt formeln $V = b^2 h$. Denna formel kan sedan skrivas om till en formel med bara en variabel. Beroende på vad man tar som oberoende variabel får man ettdera av nedanstående uttryck:

$$V(h) = (21 - 2h)^2 \cdot h = (441 - 84h + 4h^2) \cdot h = 441h - 84h^2 + 4h^3$$

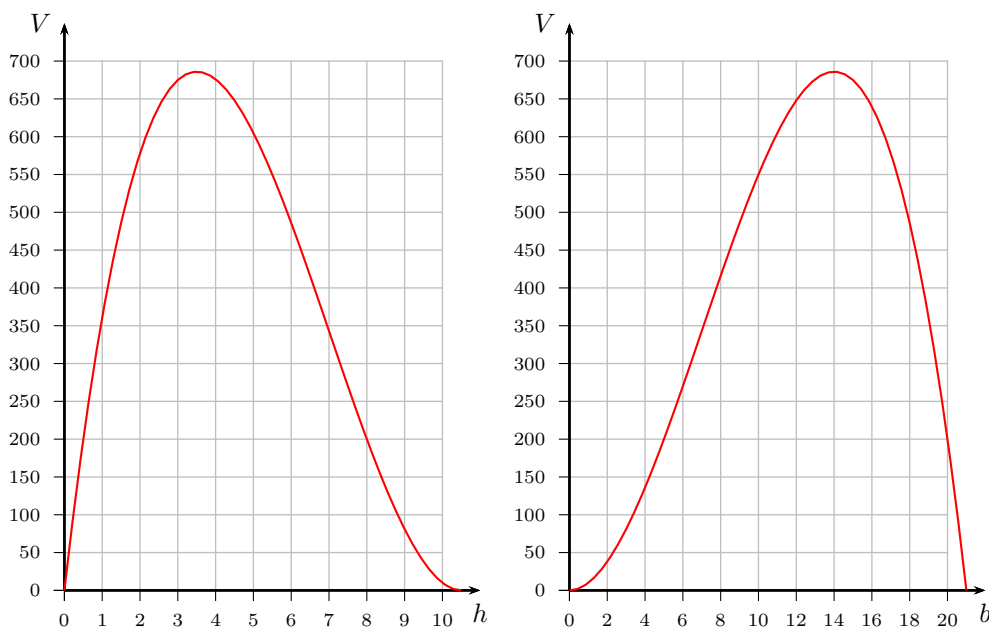
$$V(b) = b^2 \cdot \frac{21 - b}{2} = \frac{21b^2 - b^3}{2}$$

I den första av formlerna finns risk för att kvadraten inte utvecklas med hjälp av andra kvadreringsregeln utan att man istället "distribuerar in" kvadraten, och också att man missar att både 2:an och h :et ska kvadreras. I den andra varianten kan det hända konstigheter om b^2 multipliceras upp på bråkstrecket. Om några sätter ihop en felaktig variant av formeln kan man uppmana dem att testa den på de askar som man redan har räknat ut och kontrollmätt. Ger formeln inte rätt svar där är den nog inget att ha för andra mått heller.

Analys av data

Tvårsäkert uttalande – felaktigt eller korrekt Baserat på de data man har kan man säga att den av de undersökta askarna som gav det största svaret är den optimala lösningen. Om man har med asken med bredden 14 cm bland sina mätdata så är ju detta svar korrekt, men det är lika lite underbyggt som det felaktiga 676 cm^3 som man kan utläsa ur tabellen som är baserad på höjden.

Graf Om man har tillgång till grafitande hjälpmedel kan man rita upp grafen för sambandet:



Det är uppenbart att toppen ligger *ungefär* vid $h = 3,5 \text{ cm}$, $b = 14 \text{ cm}$, men det är svårt att läsa av helt exakt. (Ur rent praktisk synvinkel får väl problemet anses vara löst, för då man klipper kartong spelar det ingen större roll om man ska klippa 3,5 cm från hörnet eller 3,500001 cm. Men teoretiskt kan det vara intressant att se hur exakt svar man kan få.)

Vidare undersökning Använder man grafitande redskap kan man zooma in på toppen, men det blir ändå svårt att se exakt var högsta punkten ligger – grafen går ungefär horisontellt i området.

Beräkningsmässigt kan man ta området mellan $h = 3$ cm och $h = 4$ cm (eller motsvarande område i variabeln b) och kontrollräkna det med millimeterupplösning, vilket fortfarande kommer att peka på att $h = 3,5$ cm, $b = 14$ cm är optimum. Vill man vara än mer noga kan man välja ett 2 mm brett område och kontrollräkna på 10-dels millimeter när, och så vidare tills man tröttnar eller räknarens precision inte längre räcker till. (Om man inte är medveten om att detta kommer att inträffa kan det vara en intressant upptäckt.)

Förändringshastighet Hurdan blir volymen $V = 441h - 84h^2 + 4h^3$ om vi tittar på en punkt strax intill $h = 3,5$, låt säga $h = 3,5 + k$, där k är ett litet tal (positivt eller negativt)?

$$\begin{aligned} V(3,5 + k) &= 441(3,5 + k) - 84(3,5 + k)^2 + 4(3,5 + k)^3 \\ &= 1543,5 + 441k - 1029 - 558k + 84k^2 + 171 + 147k + 42k^2 + 4k^3 \\ &= 686 - 42k^2 + 4k^3 \end{aligned}$$

Om $|k| < 1$ så är $|k^2| > |k^3|$, som blir alltmer försumbar ju närmre 0 k ligger. Så

$$V(3,5 + k) \approx 686 - 42k^2$$

k^2 är ju positiv oavsett om k är positiv eller negativ (dvs. oavsett om vi är till höger eller vänster om $h = 3,5$), så värdet här intill är mindre än värdet i $h = 3,5$, som alltså ger maximum.

(Det är väl inte så troligt att någon kommer på denna denna lösning, men det är möjligt. Och om någon vill ha en vattentät förklaring så är det den här. Undersökningen kan lika gärna göras baserad på b , och är i grunden ett derivataresonemang)

Derivata Om det här problemet hanteras i en gymnasieklass så har de tillgång till ett verktyg till: derivatan. Extremvärden kan bara inträffa i punkter där derivatan är noll, där derivatan är odefinierad och i ändpunkter. Här har vi ändpunkterna $h = 0$ cm och $h = 10,5$ cm, som båda ger volymen $V = 0$ cm³, vilket uppenbarligen inte är maximum. Derivatan blir (om vi räknar med h som variabel)

$$V'(h) = \frac{d}{dh}(441h - 84h^2 + 4h^3) = 441 - 84 \cdot 2h + 4 \cdot 3h^2 = 441 - 168h + 12h^2$$

Detta uttryck är definierat för alla värden på h ; återstår att se var det är noll:

$$\begin{aligned} 441 - 168h + 12h^2 &= 0 \\ h^2 - 14h + 36,75 &= 0 \\ h &= 7 \pm \sqrt{7^2 - 36,75} = 7 \pm \sqrt{12,25} = 7 \pm 3,5 = \begin{cases} 10,5 \\ 3,5 \end{cases} \end{aligned}$$

$h = 10,5$ cm har vi redan noterat att det inte kan ge maximum, så det måste vara $h = 3,5$ cm som gäller (eftersom det är uppenbart att det måste finnas ett maximum). Dubbelkoll kan göras antingen med förstaderivatetestet, där man tittar på derivatans tecken strax till vänster och till höger om den intressanta punkten:

h	3,5		
$V'(h)$	+	0	-
$V(h)$	↗	max	↘

eller med andraderivatatestet, där man tittar på andraderivatan i själva punkten:

$$V''(h) = \frac{d}{dh}(441 - 168h + 12h^2) = 0 - 168 + 24h = 24h - 168$$
$$V''(3,5) = 24 \cdot 3,5 - 168 = -84 < 0$$

Negativ andraderivata i kombination med förstaderivan noll innebär maxpunkt.

Ask nummer 2

Börja om från början Man kan göra om det man gjorde på den förra asken från första början, fast antagligen i högre tempo.

Likformighet Man kan inse att *måtten* egentligen inte spelar någon roll, det är *formen* som är det väsentliga. I det förra fallet skulle höjden vara $\frac{1}{6}$ av kartongbitens längd, och det måste gälla nu också. Asken ska alltså ha höjden $\frac{18}{6} = 3$ cm och bredden $18 - 2 \cdot 3 = 12$ cm.

Ett sätt att komma fram till detta är att övergå till att räkna i längdenheten $\frac{18}{21} = \frac{6}{7}$ cm. Då har kartongbiten sidlängden 21 enheter precis som förut, och alla beräkningarna kan övertas direkt.

19.5 Kommentarer

Det är viktigt att både bygga, mäta och räkna, så att alla är 100 % med på vad det egentligen är som man försöker maximera. Geometriska begrepp blir lätt något som "man räknar ut med en formel", och det är viktigt att konkretisera dem.

Kommentarerna om optimeringsproblem generellt, som står på sidan 89, gäller även här.