

Problemlösning, åk 7–9

Problemlösning har en särskild ställning i matematikundervisningen. Läroplanen beskriver problemlösning både som en förmåga och som ett centralt innehåll. I den här modulen fokuserar vi på matematikundervisning genom problemlösning. Det ger stora möjligheter att lyfta alla förmågor och att få alla elever att bli delaktiga, utmanas, utvecklas och bidra till varandras lärande. Problemlösning är alltså både mål och medel i matematikundervisningen. Men det är också en stor pedagogisk utmaning. Syftet med modulen är att ge dig stöd och verktyg för att ta dig an den utmaningen.

Modulens delar

Problemlösningensmodulen består av åtta delar som bygger på varandra:

1. Matematikundervisning genom problemlösning
2. Givande helklassdiskussioner
3. Förutseende och överblick av elevlösningar
4. Urval, ordning och sammankoppling av elevlösningar
5. Klassrumsnormer och delaktighet
6. Interaktion, kommunikation och resonemang
7. Formativ undervisning
8. Lektionsplanering och framåtblick

Del 1 ägnas åt en introduktion kring matematikundervisning genom problemlösning och fokuserar särskilt på att sätta lektionsmål och välja problem. För att göra det mer hanterbart att hålla givande klassdiskussioner utifrån elevernas olika lösningar kommer ni att få en modell presenterad för er med fem steg: att förutse, överblicka, välja ut, ordna och koppla ihop elevlösningar. I del 2 introduceras denna modell och de olika stegen fördjupas sedan under del 3 och 4. Under resterande delar tillkommer sedan ytterligare viktiga aspekter som klassrumsnormer (del 5), interaktion (del 6), formativ undervisning (del 7) och lektionsplanering (del 8). Varje del innehåller en lektionsaktivitet.

Verktygsbanken

Till varje del finns ett verktyg som ni kan ha som stöd vid planeringen och genomförandet av lektionsaktiviteten. Vi har samlat alla verktygen i Verktygsbanken, finns i "Se även". I varje del förklaras och beskrivs verktyget i de texter ni läser.

Problembanken

Varje lektionsaktivitet är en problemlösningsslektion där ni utgår från ett problem som ni gemensamt väljer och anpassar ur Problembanken, finns i "Se även". Den är framtagen speciellt för denna modul. Problemen behöver inte behandlas i någon särskild ordning och kan efter lite anpassning användas i er elevgrupp i sjuan, åttan eller nian.

Att tänka på

I flera av delarna kommer ni att få se lektionsfilmer där problem ur Problembanken behandlas. Lärarna och eleverna i dessa filmer är vana vid att arbeta med problemlösning på det sätt som föreslås i den här modulen. Tänk på att det kan ta tid att få till stånd ett sådant diskussionsklimat och att det kräver ett medvetet arbete.

Vi vill uppmuntra er att besöka varandras lektioner om ni har möjlighet till det. Om ni har sett varandra i klassrummet kan era diskussioner bli ännu mer givande. Vi vill också påminna er om att redan från början föra anteckningar över vad ni gör, era reflektioner och upplevelser.

Ansvariga för modulen

Mälardalens universitet, i samarbete med Örebro universitet.

Del 1. Matematikundervisning genom problemlösning

Vad kan det innebära att undervisa matematik genom problemlösning? Hur kan en problemlösningslektion läggas upp? Vad kan man tänka på när man väljer problem och hur sätter man lämpliga mål för arbetet med problemet?

I den här första delen får du en bakgrund till matematikundervisning genom problemlösning och vilka möjligheter den kan ge för att utveckla elevernas matematiska förmågor. Vi diskuterar vad som ligger i själva begreppet problem och hur olika strategier och uttrycksformer kan användas vid problemlösning.

Vi föreslår ett arbetssätt som innebär att lektionerna följer fyra faser: introduktion av problemet, enskilt arbete, arbete i smågrupper (eller par) och gemensam klassdiskussion. Här i del 1 beskriver vi de olika faserna men betonar också en viktig del av förberedelsearbetet: att formulera mål samt att välja och anpassa problem i förhållande till målet.

Du kommer tillsammans med dina kollegor att få välja ett utmanande problem ur det läromedel ni använder och sedan genomföra en problemlösningslektion med de fyra faserna. Under lektionen får du särskilt fokusera på vilka uttrycksformer eleverna använder sig av när de löser problemet.

Mål för dig som lärare

Målet med den här delen är att du ska fördjupa dina kunskaper om vad matematikundervisning genom problemlösning kan innebära, om du arbetar enligt de fyra faserna. Du ska dessutom utveckla dina färdigheter i att sätta mål och välja lämpligt problem samt i att särskilja olika uttrycksformer i dina elevers lösningar.

Del 1: Moment A – individuell förberedelse

Se föreläsning

Föreläsningen "Problemlösning i matematikundervisning" ger en kort bakgrund till matematikundervisning genom problemlösning och introducerar översiktligt modulens innehåll. Vilken roll spelar problemlösning i din matematikundervisning idag?

Läs

Texten "Undervisa i matematik genom problemlösning" lägger särskilt fokus vid att sätta mål och välja problem, vilket utgör själva grunden för undervisning genom problemlösning.

I "Aktivitetsprotokoll" finns en tabell där du kan bokföra vilka problem som du valt ut att använda i modularbetet.

Texten "Till läraren" är en övergripande beskrivning av vad som kan vara bra att veta inför arbetet med modulen.

Se och lyssna på presentation

Lyssna på den ljudsatta presentationen "Ett problem – många olika lösningar". Här presenteras ett arbetssätt där alla elever arbetar med samma problem – på olika sätt – för att möjliggöra gemensamma diskussioner. I fördjupningen finns en ljudsatt presentation med elevlösningar till problemet "En brakmiddag" där du kan höra eleverna förklara dem utförligt.

Välj ut uppgifter

I texten "Undervisa i matematik genom problemlösning" framgår det vad uppgifter som ställer höga krav på elevernas tänkande innebär. Gå igenom ert läromedel och välj ut sådana uppgifter. Anteckna uppgifterna och ta med dig anteckningarna till mötet med kollegorna i moment B. Då väljer ni tillsammans ut ett av era problem att genomföra i era klasser.

Material



Undervisa i matematik genom problemlösning

Maria Larsson



Aktivitetsprotokoll

Andreas Bergwall



Till läraren

Andreas Bergwall, Maria Larsson



Problemlösning i matematikundervisning

Filformatet kan inte skrivas ut.

Mälardalens högskola



Ett problem – många olika lösningar

Filformatet kan inte skrivas ut.

Undervisa i matematik genom problemlösning

Maria Larsson, Mälardalens universitet

Att hjälpa barn att bli bättre problemlösare är inte bara ett utomordentligt viktigt mål, det är också den mest spännande utmaningen en lärare kan få. Om jag bara fick ge ett enda råd till en lärare som har tänkt att börja med problemlösning, så skulle det vara: Kom ihåg att barn är problemlösare av naturen. Lärarens arbete är att försöka utveckla denna naturliga förmåga så långt det går [...]. (Lester, 1996, s.91)

Problemlösning och matematiska förmågor

Undervisningen i matematik ska ge eleverna förutsättningar att utveckla sin förmåga att formulera och lösa problem med hjälp av matematik och värdera valda strategier (Skolverket, 2022). Då är det problemlösningsförmågan vi talar om. Genom att eleverna får lösa och diskutera utmanande matematiska problem kan faktiskt **alla** matematiska förmågor utvecklas. Om eleverna arbetar med samma problem och diskuterar sina olika lösningar får de uppleva att det finns många olika sätt att tänka kring ett problem. De får kommunicera, resonera, utveckla sina räknefärdigheter och sin begreppsförståelse.

Genom att eleverna får möjlighet att arbeta med utmanande problem får de också uppleva vad det kan innebära att utöva matematik. Matematikern George Pólya betonade att en naturlig del av att utöva matematik är att brottas med centrala matematiska idéer (Pólya, 1945/1957). Forskning visar också (Lester & Cai, 2016; Hiebert & Grouws, 2007) att elever som utmanas med problem och aktiviteter som kräver att de brottas med viktiga matematiska idéer utvecklar sin problemlösningsförmåga och sin begreppsförståelse. Dessutom pekar mycket forskning på att de kan prestera ungefär lika bra eller rentav bättre även på rena rutinuppgifter än elever som enbart följer mer ”traditionell” undervisning där man huvudsakligen övar på det som har demonstrerats av läraren. Det har också visat sig att elever som tränar sin räknefärdighet i en miljö som fokuserar på begreppslig utveckling blir mer flexibla och kan i högre grad anpassa sina färdigheter till att lösa nya uppgifter.

Vad är ett problem och vad är en lösning?

Pólya (1945/1957) delar upp elevernas arbete med ett problem i att förstå problemet, att göra upp en plan, att genomföra planen och att se tillbaka och kontrollera resultatet. Det sista steget får inte glömmas bort. Du som lärare kan hjälpa eleverna att ställa sig frågor

som: Är det rimligt? Stämmer det jag kom fram till med förutsättningarna som gavs i problemet? Hur kan jag kontrollera resultatet?

När vi talar om ett matematiskt problem avser vi en matematisk uppgift som personen inte från början vet hur han/hon kan gå tillväga för att lösa (jfr Lester & Cai, 2016). Det krävs ansträngning för att lösa ett problem. Det innebär också att det är individuellt vad som är ett problem. En uppgift som är ett problem för en person behöver inte vara det för en annan person. Något som är ett problem för en person idag kan senare bli en rutinuppgift för samma person. Det innebär dessutom att en textuppgift inte behöver vara ett problem och att en rent matematisk uppgift utan kontext kan vara ett problem. Med lösningen till ett problem menar vi hela resonemanget och inte enbart svaret.

Hagland med flera (2005) har tagit fram ett antal kriterier för ett rikt problem. Ett rikt problem är ett problem som:

- introducerar viktiga matematiska idéer eller strategier
- alla elever kan arbeta med på sin nivå
- kräver att eleverna anstränger sig och ska få ta tid
- kan lösas på många olika sätt med olika strategier och representationer
- kan samla hela klassen i en diskussion baserad på elevernas olika lösningar
- kan knyta samman olika matematiska områden
- kan inspirera till skapandet av egna, liknande problem.

För att ett problem ska passa alla elever i en klass behöver problemet både ha en låg tröskel och samtidigt ett djup så att alla elever kan få lagom utmaning av det. För att uppnå detta kan man bryta upp ett problem i ett antal olika delproblem som i problemet ”Kramar” nedan, se även Problembanken:

Kramar

Ellinor har bjudit hem sina tjejkompisar till en filmkväll. Alla som är på filmkvällen kramar varandra. Alla kramarna är mellan två personer i taget. Hur många kramar blir det totalt om det är:

- 4 personer på filmkvällen?
- 5 personer?
- 10 personer?
- 20 personer?
- n personer på filmkvällen?

- Hitta på ett eget liknande problem och lös det.

Tröskeln i problemet är låg eftersom man först frågar hur många kramar det blir om det är 4 personer. Vill man sänka tröskeln ytterligare skulle man kunna börja med 3 personer innan man frågar efter antalet kramar för 4 personer och 5 personer. Därefter blir det en betydligt större utmaning när man frågar efter antalet kramar för 10 personer och 20 personer. Man skulle också kunna fråga efter 100 personer och 1000 personer innan man frågar efter den generella formeln för det totala antalet kramar för n personer.

En problemlösningslektions faser

De fyra faser som vi tänker oss i en problemlösningslektion är:

- introduktion
- enskilt arbete
- arbete och diskussioner i smågrupper/par
- klassdiskussion

Du introducerar först problemet och ser till att alla elever förstår problemställningen, varefter eleverna arbetar tyst och enskilt med problemet en stund innan de får arbeta vidare och diskutera sina lösningar i smågrupper eller par. Till sist leder du en gemensam klassdiskussion utifrån elevernas olika lösningar och gör en summering av viktiga aspekter.

Självklart finns det olika varianter av de här faserna. Man behöver ju inte alltid låta eleverna arbeta både enskilt och i smågrupper, men det kan finnas stora fördelar med det jämfört med att direkt låta eleverna sätta sig i smågrupper. Det kan bidra till mångfalden av olika lösningar i klassen. Eleverna har oftast hunnit komma igång med problemet och har med sig sina egna tankar in i grupparbetet. Även de elever som tar lite längre tid på sig att komma igång har då chansen att bidra i gruppdiskussionen. Eleverna kan välja att arbeta vidare på en av lösningarna eller att ta idéer från olika lösningar och smälta samman.

Ofta kan det vara lagom med 5–10 minuter för det enskilda arbetet för att eleverna ska ha kommit en bit på väg med sin lösning innan de arbetar vidare och diskuterar i smågrupper. Beroende på gruppens nivå kan det dock behövas längre tid.

Klassdiskussionen ligger oftast sist, men ibland kan det även behövas en kort klassdiskussion mitt i elevernas arbete för att samla tankarna. Om du har möjlighet till halvklass ibland kan det också vara ett alternativ.

Ibland kan man behöva ägna flera lektioner åt ett problem. För att du i lugn och ro ska hinna sätta dig in i elevernas olika lösningar innan klassdiskussionen kan du vänta med

klassdiskussionen till dagen efter. Då kan du samla in elevlösningarna efter elevernas arbete. En annan variant är att bara ta en rast innan klassdiskussionen. Fördelen med det är att eleverna har sina tankar i färskt minne när klassdiskussionen kommer. Naturligtvis kan du också ta alla faserna i ett svep under en enda lång lektion. Det ställer ganska höga krav på att du ska hinna skaffa dig en överblick över alla elevers olika lösningar medan de arbetar, men det kan vara ett mål på sikt.

När det gäller sammansättningen av smågrupper så visar forskning att det är bra med heterogena grupper så länge skillnaderna inte är för extrema. Blanda gärna medelpresterande med hög- eller lågpresterande elever, men undvik att sätta samman de mest högpresterande med de mest lågpresterande eleverna. Det är bra om grupperna inte består av mer än 2–3 elever för delaktighetens skull.

Sätta mål och välja problem

Om vi går tillbaka till ett övergripande plan så är huvudmålet med undervisning genom problemlösning att eleverna utvecklar djup förståelse för matematiska begrepp och metoder genom att lösa problem. En nyckel till förståelse är elevernas egna engagemang och meningsskapande. Eleverna kan lära sig att arbeta matematiskt genom att lösa problem, och det har de nytta av i alla matematiska situationer.

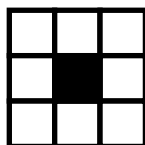
Du som lärare behöver avgöra vilka problem som ska väljas, vad som ska lyftas fram i klassdiskussionen utifrån elevernas olika idéer och vilka frågor som kan ställas för att utmana och stötta eleverna utan att tänka åt dem (Lester & Lambdin, 2007).

När det gäller val och anpassning av problem så måste problemet passa alla elever i klassen och bygga på den kunskap de redan har. För att anpassa ett problem kan man exempelvis lägga till eller ta bort delproblem, ändra problemets kontext, anpassa språket eller de ingående talen. I problemet ”Kramar” skulle man till exempel kunna ändra kontexten till att handla om handskakningar eller ta bort delproblemet med n personer.

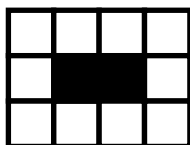
Matematikinnehållet, alltså de begrepp och procedurer som ska studeras, måste finnas inbäddat i problemet. Problemet väljs i relation till lektionsmålen. Ett långsiktigt mål för all matematikundervisning är ju att utveckla elevernas förmågor med hjälp av det centrala innehållet. För att tydliggöra vilka kunskaper och förmågor som eleverna ska ges förutsättningar att utveckla under arbetet med ett problem behöver man som lärare konkretisera de långsiktiga målen. Nu ska vi ge ett exempel på hur målen kan sättas för arbetet med problemet ”Lägga plattor runt rabatter” (Figur 1):

Figur 1

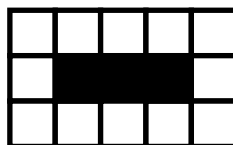
Lägga plattor runt rabatter



figur 1



figur 2



figur 3

Eva och Ali lägger vita plattor runt rabatter som bilden visar.

- Hur många vita plattor går det åt i:
 - figur 4?
 - figur 5?
 - figur 14?
 - figur 54?
- Beskriv med ord hur mönstret är uppbyggt!
- Hur många vita plattor går det åt i figur n ?
- Hitta på ett eget liknande problem och lös det.

Mål för en klass som arbetar med problemet i samband med **mönster** kan vara att eleverna utvecklar sin förmåga att:

- visualisera ett mönster på olika sätt
- använda figurens nummer som variabel för att uttrycka en explicit regel för antal plattor
- göra kopplingar mellan olika visualiseringar av mönstret och olika, ekvivalenta sätt att uttrycka en formel
- argumentera för och jämföra sina egna och andras algebraiska formler utifrån den grafiska representationen

Mål för en annan klass som arbetar med problemet i samband med **funktioner** kan vara att eleverna utvecklar sin förmåga (Smith & Stein, 2014) att:

- se att linjära funktioner växer med konstant hastighet
- uttrycka en explicit regel som definierar sambandet mellan de två variablerna på flera olika, ekvivalenta sätt
- uttrycka förändringstakten hos en linjär funktion med olika representationsformer:

- som skillnaden mellan efterföljande y -värden i en tabell
- som k -värdet i räta linjens ekvation $y = kx + m$
- som lutningen hos funktionens graf

Målen i det här fallet skiljer sig en hel del från målen i det första exemplet, trots att det är samma problem vi utgick ifrån. Lärare behöver välja problem med omsorg och matcha problemen med målen för elevernas lärande. Olika problem ger ju eleverna olika möjligheter att lära sig och utöva matematik.

Uppgifter som ställer högre eller lägre kognitiva krav

Forskarna Stein och Smith med kollegor särskiljer mellan uppgifter som ställer högre eller lägre krav på elevernas kognitiva förmåga. I uppgifter som ställer **lägre** krav ligger fokus på att producera korrekta svar istället för på att utveckla matematisk förståelse. Det kan handla om:

- att återge memorerad fakta.
Exempel: Skriv som procent och i decimalform: $\frac{1}{4} = _ = _$
- att en algoritmisk procedur kan användas utan koppling till begreppen eller betydelsen som ligger bakom proceduren. Det krävs inga förklaringar (eller förklaringar som enbart fokuserar på att beskriva proceduren).
Exempel: Beräkna $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$

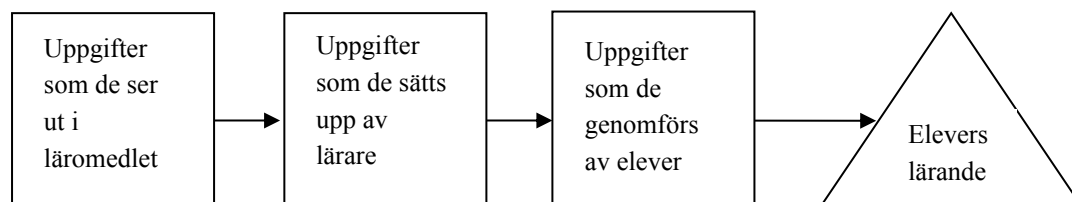
I uppgifter som ställer krav på **högre** nivå ligger fokus på att utveckla matematisk förståelse. Det kan vara uppgifter som:

- kräver komplext och icke-algoritmiskt tänkande och att eleverna utforskar och förstår matematikens karaktäristiska begrepp, processer eller samband.
Exempel: Lägga plattor runt rabatter (se ovan).
- föreslår breda vägar att följa som har nära kopplingar till bakomliggande begreppsliga idéer.
Exempel: Beräkna $\frac{2}{3}$ av $\frac{3}{4}$. Rita figurer och förklara din lösning.

Även om uppgiften som den ser ut i läromedlet ställer krav på högre nivå är det inte säkert att den höga nivån bibehålls under arbetet med problemet. Forskarna Stein och Smith med kollegor har utvecklat ett ramverk för analys av hundratals lektioner i ett stort projekt. Deras ramverk ser ut så här (Stein et. al., 1998):

Figur 2

Ramverk för analys av lektioner



Faktorer som bidrar till att problemets nivå sjunker under arbetets gång är att

- läraren ”tar över” tänkandet och resonemangen och talar om för eleverna hur man löser problemet,
- läraren byter fokus från meningsskapande, begrepp och förståelse till huruvida svaret är korrekt,
- för lite eller för mycket tid ges till problemet,
- det finns svårigheter med att leda klassrumsarbetet,
- problemet inte passar eleverna,
- bristfälliga förklaringar accepteras.

Faktorer som bidrar till att en högre nivå bibehålls har visat sig vara att

- läraren stöttar elevernas tankar och resonemang
- elever får verktyg för att hålla koll på sina egna framsteg,
- läraren eller andra elever visar på resonemang på hög nivå,
- läraren ser till att det alltid finns förväntningar på tydliga förklaringar,
- uppgiften bygger på elevers tidigare kunskap,
- läraren ofta gör begreppsliga kopplingar,
- det finns tillräckligt med tid att utforska (inte för lite och inte heller för mycket).

Referenser

Cai, J., & Lester, F. K. (2016). Can mathematical problem solving be taught? Preliminary answers from 30 years of research. I P. Felmer et al. (Red.), *Posing and solving mathematical problems, Research in Mathematics Education* (s. 117–135). https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3_8

Hagland, K., Hedrén, R., & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem – inspiration till variation*. Liber.

Hiebert, J., & Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students’ learning. I F. K. Lester (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 371–404). Information Age Publishers.

Lester, F. K. (1996). Problemlösningens natur. I *Matematik – ett kommunikationsämne*. Nämnaren TEMA. NCM.

Lester, F., & Lambdin, D. (2007). Undervisa genom problemlösning. I *Lära och undervisa matematik – internationella perspektiv*. NCM.

Pólya, G. (1945/57). *How to solve it*. Princeton University Press.

Skolverket (2022). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet*.

Smith, M. S., & Stein, M. K. (2014). *5 undervisningspraktiker i matematik för att planera och leda rika matematiska diskussioner*. Natur & Kultur.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. A. (2009). *Implementing standards-based mathematics instruction – a casebook for professional development*. Teachers College Press and NCTM.

Aktivitetsprotokoll

Andreas Bergwall

Nedanstående tabell kan användas vid planering av lektionsaktiviteterna. Det finns två rader för datum eftersom man alltid kan välja att dela upp problemlösningsaktiviteten på två lektioner.

Del	Datum	Elevgrupp	Problem	Anm.
1.			Uppgift i läroboken:	
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.			Samma som i Del:	
8.				

Till läraren

Andreas Bergwall, Örebro universitet och Maria Larsson, Mälardalens universitet

Här kommer vi att ta upp sådant som vi tror är extra viktiga att du är medveten om redan från början. Bakgrunden är de synpunkter som vi fått in från andra som har arbetat med modulen.

Modulens övergripande upplägg

Att tydliggöra matematiska kopplingar mellan matematiska idéer, strategier och representationer hjälper eleverna att se matematiken som en sammanhängande helhet. Att engagera eleverna i utmanande matematiska aktiviteter som synliggör matematiska kopplingar är ett genomgående tema i den här modulen. Det kommer du att få göra i alla delar och för att underlätta ditt arbete kommer du att få olika verktyg. I den modell av Stein med flera (2008) som genomsyrar denna modul har matematiska kopplingar en central plats. Strukturerade, logiskt sammanhängande diskussioner av de centrala idéerna i matematik är en nyckel för att utveckla elevernas begreppsförståelse. Att leda givande helklassdiskussioner utifrån elevernas olika lösningar till ett utmanande problem är således en viktig aspekt och kommer att ges mycket utrymme i denna modul.

En av grundbultarna i arbetet med modulen är det kollegiala lärandet. Du och dina kollegor kommer att få många tillfällen att diskutera matematikdidaktiska frågeställningar med nära koppling till er egen matematikundervisning.

Lektionsaktiviteten består i att genomföra en problemlösningsslektion med följande fyra faser:

- introduktion av ett problem,
- enskilt arbete,
- arbete och diskussion i smågrupper/par, samt
- gemensam klassdiskussion.

Som ett stöd för att planera och hålla givande klassdiskussioner så kommer du att få använda dig av 5-stegsmodellen. De fem stegen består av att:

1. **förutse** elevlösningar,
2. **överblicka** elevernas arbete,
3. **välja ut** elevlösningar,
4. **ordna** de utvalda elevlösningarna för gemensam diskussion, samt
5. **koppla ihop** elevlösningar med varandra och med centrala matematiska idéer.

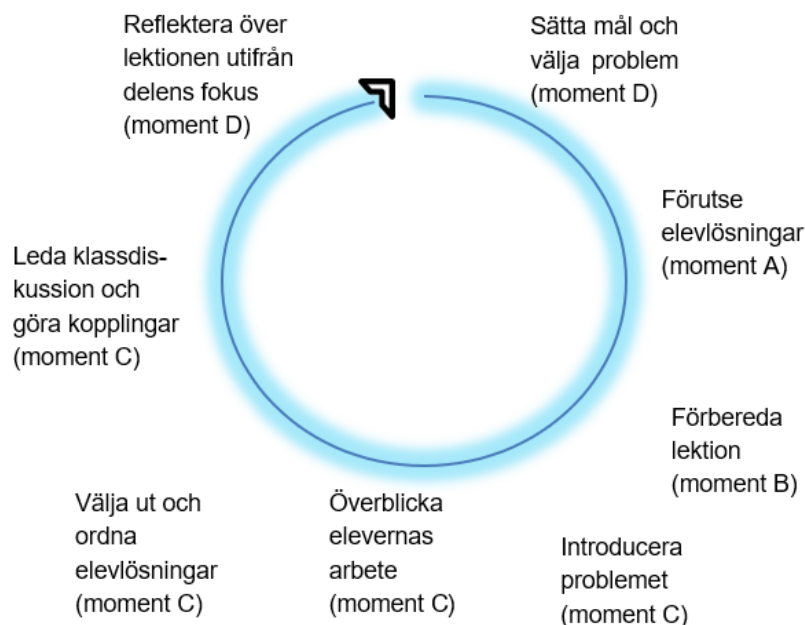
Detta arbetssätt presenteras i del 1–4. Senare i modulen lyfts andra aspekter av arbetet med problemlösning såsom klassrumsnormer, interaktion, formativ undervisning och lektionsplanering. Alla modulens delar bygger på varandra.

Att förbereda och genomföra problemlösningslektioner

Problemlösningelektionerna genomförs under ordinarie matematiklektioner. Antingen kan du välja att genomföra merparten av dem i samma elevgrupp eller att fördela dem mellan flera olika elevgrupper. Om du genomför de flesta problemlösningelektionerna i en och samma elevgrupp så kan du få se hur just dessa elever utvecklas över tid. Om du istället fördelar lektionerna mellan ett par olika elevgrupper så kan du använda samma problem flera gånger, eventuellt med vissa anpassningar. Då kan du känna dig ännu bättre förberedd på vilka lösningar eleverna kan komma med och på hur du kan använda dig av dem för att skapa en givande klassdiskussion.

Som hjälp för planering av lektionsaktiviteterna finns ett Aktivitetsprotokoll där du kan notera datum, elevgrupp och val av problem. För att det kollegiala utbytet ska bli så stort som möjligt så är det önskvärt att du och dina kollegor arbetar med samma problem.

Ni kommer att förbereda lektionsaktiviteterna tillsammans i moment B. Men redan i moment A kommer du att få påbörja förberedelsearbetet på egen hand. För att detta ska vara möjligt så kommer ni tillsammans att få välja problem för aktiviteten redan i moment D i delen innan. Varje del av modulen följer det cykliska upplägg som visas i bilden nedan.



Att börja undervisa genom problemlösning

Att genomföra en problemlösningslektion kan vara en utmaning. Det behövs en lång lektion på 60-80 minuter, eller två 40-minuterslektioner, för att genomföra hela aktiviteten. I början av arbetet med modulen rekommenderar vi följande:

- Försök att ta en paus mellan elevernas grupparbete och klassdiskussionen. Då kan du i lugn och ro välja ut och ordna elevlösningar till den gemensamma diskussionen. Om du använder två lektioner så kan du introducera problemet och låta eleverna arbeta med det under den första lektionen och vänta med klassdiskussionen till den andra.
- Genomför om möjligt de första problemlösningslektionerna i halvklass. Då blir det lättare att överblicka elevernas arbete och att hantera den gemensamma diskussionen. Däremot kan mångfalden av elevlösningar bli mindre.
- Återanvänd gärna problemen i nya elevgrupper. Då kan du dra nytta av dina förberedelser och känna dig väl förberedd, vilket ofta gör att klassdiskussionen blir mer givande.
- Börja gärna med ett enklare mönsterproblem som till exempel ”Lägga plattor runt rabatter” eller ”Buskar på rad”. Även elever som är ovana vid problemlösning brukar kunna sätta sig in i sådana problem och engagera sig i dem.

Att etablera nya normer

Problemlösningslektioner med klassdiskussioner kan vara utmanande även för eleverna då det kan vara ett helt nytt arbetssätt för dem. Om eleverna är ovana vid detta arbetssätt så bryter det mot de rådande klassrumsnormerna och det kan ta tid att ändra på dessa normer.

Om filmerna

I några av delarna finns det lektionsfilmer att titta på. Både lärare och elever i filmerna är vana vid att jobba med problemlösning på detta sätt. Du kan kanske inte förvänta dig att allt ska fungera lika bra från första början i ditt eget klassrum. Däremot intygar de lärare som arbetat med modulen att de faktiskt upplevt framgångar redan under den tid som modularbetet pågått.

Problembanken och Verktygsbanken

Problembanken innehåller problem som är konstruerade för att kunna användas i olika årskurser och av elever som kommit olika långt i sin matematiska utveckling. Som stöd

för att välja problem finns en sammanställning över vilket centralt innehåll de olika problemen fokuserar på.

I Verktygsbanken har vi samlat underlag som kan vara till hjälp för dig när du planerar och genomför lektionsaktiviteterna. Underlagen blir även ett stöd för dig att fokusera på delens mål. Vi kallar ett sådant underlag för ”ett verktyg” och det finns i varje del i modulen.

Följande verktyg finns till de åtta delarna:

1. KLAG-modellen för uttrycksformer
2. 5-stegsmodellen för givande klassdiskussioner
3. Tabell för att förutse och överblicka elevlösningar
4. Tabell för att förutse, överblicka, välja ut och ordna elevlösningar
5. Handlingar för att främja elevernas delaktighet i lektionens olika faser
6. Frågetyper
7. Nyckelstrategier för formativ undervisning & mall för kamratbedömning
8. Lektionsplaneringsfrågor

Problembanken och Verktygsbanken hittar du under rubriken ”Se även” i Lärportalen.

Anteckna och spara

Både du och dina elever kommer att lägga ner mycket arbete på varje problemlösningslektion. Spara problem, elevlösningar och dina egna reflektioner så att du kan dra nytta av ditt arbete när du senare vill återanvända problemen. Ett förslag är att skapa en mapp i datorn för varje problem du arbetar med, där du kan spara fotograferade eller inskannade elevlösningar och dina egna anteckningar rörande problemet. Med tiden får du då en bank av material som kan vara användbart, både för dig själv och dina kollegor.

För eleverna kan det vara bra att ha särskilda häften i A4-format som de använder när de löser problem. I dessa häften kan eleverna klistra in problemen och skriva sina lösningar. Samla in häftena för att ha som underlag vid era kollegiala diskussioner.

Du behöver också kontinuerligt föra anteckningar över dina egna reflektioner. Skriv ner några punkter efter varje lektionsaktivitet och som sammanfattning av de kollegiala diskussionerna.

Till sist, varmt lycka till med arbetet!

Del 1: Moment B – kollegialt arbete

Diskutera

- Hur arbetar ni med problemlösning i nuläget?
- Hur brukar ni använda er av olika elevlösningar i klassdiskussioner?
- Vad ser ni för möjligheter och utmaningar med faserna introduktion, enskilt arbete, arbete i smågrupper/par samt klassdiskussion?
- Hur resonerar ni när ni sätter samman eleverna i smågrupper/par?

Förbered en aktivitet

- Diskutera det urval av uppgifter ni har gjort ur ert läromedel i moment A. Vad utmärker de uppgifter som ställer krav på högre nivå?
- Välj tillsammans ett problem ur ert läromedel att genomföra i era olika klasser. Problemet ni väljer ska ställa krav på högre nivå.
- Lös tillsammans problemet på så många olika sätt som möjligt, med olika uttrycksformer och strategier.
- Formulera mål för lektionen. Hur ska era elever ges möjlighet att utveckla sina matematiska förmågor genom arbete med det valda problemet? Med vilket centralt innehåll ska detta ske? Målen kan variera mellan olika årskurser och elevgrupper.
- Anpassa problemet så att det passar för era olika elevgrupper (anpassa kontexten, språket, de ingående talen, skapa fler delproblem med mera). I olika elevgrupper kan det innebära att använda olika utformningar av problemet.
- Diskutera vilka elevlösningar (uttrycksformer och strategier) ni ser som troliga av just era elever och anteckna dessa.

Del 1: Moment C – aktivitet

Genomför

Genomför det valda problemet enligt faserna:

- introduktion
- enskilt arbete
- arbete och diskussion i smågrupper/par
- klassdiskussion

Introducera problemet på det sätt du har planerat. Låt eleverna arbeta enskilt med problemet en stund innan de får arbeta och diskutera tillsammans i de smågrupper eller par som du har satt ihop. Håll en gemensam hel- eller halvklasdiskussion där du har valt ut några av elevernas lösningar till diskussion. Hjälps åt, tillsammans med eleverna, att få så tydliga förklaringar som möjligt. Ni kan också diskutera likheter och skillnader mellan olika lösningar samt värdera olika lösningar. Samla in och spara elevernas lösningar.

Uppmärksamma särskilt

Uppmärksamma särskilt vilka uttrycksformer och strategier som dina elever använder sig av när de arbetar med problemet. Se KLAG-modellen för uttrycksformer i Verktogsbanken.

Del 1: Moment D – gemensam uppföljning

Ta med elevernas lösningar till den kollegiala diskussionen.

Diskutera

- Hur fungerade problemet i era olika klasser i relation till lektionens mål?
- Hur introducerade ni problemet i era olika klasser?
- Hur påverkades problemlösningsaktiviteten av att eleverna arbetade enskilt och i smågrupper/par?
- Vilka uttrycksformer och strategier använde era elever? Lyft fram några särskilt intressanta elevlösningar.
- Hur kunde ni använda era elevers olika lösningar under klassdiskussionen?
- Valde ni medvetet ut vissa elevlösningar till klassdiskussionen och vad baserade ni i så fall det urvalet på?
- Var det någon elev som överraskade er positivt under problemlösningen? Hur i så fall?

Välj problem till nästa del

- Bläddra tillsammans igenom Problembankens elevsidor och välj ett problem att genomföra i era olika klasser i nästa del.
- Formulera mål för lektionen. Hur ska era elever ges möjlighet att utveckla sina matematiska förmågor genom arbete med det valda problemet? Med vilket centralt innehåll ska detta ske? Målen kan variera mellan olika årskurser och elevgrupper.
- Anpassa problemet till era olika elevgrupper (ni kan anpassa kontexten, språket, de ingående talen, skapa fler delproblem med mera). I olika elevgrupper kan det alltså bli frågan om att använda olika utformningar av problemet.
- Om ni hinner kan ni redan nu börja förutse hur ni tror att era elever kommer att lösa problemet.

Fördjupning

Del 1. Fördjupning

I presentationen "En brakmiddag – elevers egna förklaringar till sina olika lösningar" förklarar ett antal elever i Cecilia Christiansens sjätteklass sina olika lösningar. Detta är en fristående fortsättning på den ljudsatta presentationen i del 1.

Referenslitteratur

Larsson, M. (2007). 32 rika problem i matematik. Liber.

Lägga grunden – sätta mål och välja ut uppgifter. Kapitel 2 i boken 5 undervisningspraktiker i matematik för att planera och leda rika matematiska diskussioner (s. 30–42). M. S. Smith och M. K. Stein (2014). Stockholm: Natur o. Kultur.

Material

Material



En brakmiddag – elevers egna förklaringar till sina olika lösningar
Filformatet kan inte skrivas ut.