

Symboler för obekanta tal

Robert Gunnarsson och Annica Otterborg, Högskolan i Jönköping

Matematiken är full av olika symboler. I de första årskurserna handlar det i första hand om siffersymboler (0, 1, 2 ... 9), symboler för relationer (främst =, $\neq$, $>$ och $<$) och symboler för räkneseffekt (+, $-$, $\cdot$ och $\div$). Men tidigt börjar eleverna arbeta med enkla symboler för att beteckna det man inte vet. Sådana symboler kan vara streck, tomma rutor eller andra grafiska symboler (som exempelvis i $3 + _ = 7$, $3 + \square = 7$ eller $3 + \text{hand} = 7$). Som lärare talar man om ”vad som gömmer sig bakom” en viss symbol. Målet är att eleverna skall få möjlighet att utveckla sin förmåga att använda matematikens symbolspråk. Speciellt vill man att eleverna skall introduceras till att senare kunna räkna med bokstäver. Uppgifter som innehåller enkla symboler är därför vanligt förekommande i läromedlen. Men man har sett att elever inte uppfattar sådana symboler (som t.ex. fyrkanten i $3 + \square = 7$) som att de skulle ha något att göra med okända tal, utan snarare som ett sätt att skriva aritmetiska räkneuppgifter (Carpenter & Fennema, 1992).

Elevernas svårigheter att förstå symboler och bokstävers roll riskerar att leda till att de får svårt att hantera matematiska uttryck som är formulerade med sådant språk när de ska börja räkna med dem. Presentationen av detta innehåll syftar därför på att peka på vad som kan vara kritiskt för att eleverna skall kunna utveckla en förståelse för att symboler kan användas för att beteckna ett obekant tal.

Läroböcker innehåller uppgifter med en eller flera tomma rutor alternativt streck där eleverna förväntas fylla i de tal som saknas. Det kan till exempel stå $8 = \square + \square$. Elevernas uppgift är då att dela upp talet 8 i två delar. Eleven väljer själv hur talet 8 kan delas upp. Detta betyder det att i de två rutorna kan stå två lika eller två olika tal. Om exemplet istället hade varit med talet 9, hade det varit två olika tal i de tomma rutorna. I den här presentationen försöker vi istället fokusera på att eleven skall kunna se att en symbol representerar ett tal. I den fortsatta texten har vi därför valt att använda symbolen $\boxtimes$, som i $12 = \boxtimes + 3$, fast många andra symboler också kan vara lämpliga val.

Ofta pekas aritmetik ut som en lämplig ingång för att utveckla elevers förståelse för räkning med bokstäver. Hagland (2008) föreslår att elever i åk 1–3 ska utgå från sin aritmetiska kunskap, sin taluppfattning och sin förståelse för räkneoperationer. Hon varnar dock för att hålla fast för länge vid icke-matematiska tecken som tomma rutor eller streck i matematikuppgifterna, och menar i stället att eleverna tidigt behöver få

möta bokstavssymboler (som exempelvis $3 + x = 7$). Symbolen $\boxtimes$ kan vara ett hjälpmedel för att introducera till bokstavssymboler för eleverna och utifrån den utveckla sin förståelse för obekanta tal.

Det är grundläggande att eleven kan skilja på vad som menas med begreppen ”siffra”, ”tal” och ”uppgift”. Det är dock ett vanligt förekommande problem för elever att skilja på dessa. I en uppgift ($18 + 2$) ingår talen (18 och 2), vilka i sin tur representeras av siffrorna (1, 8 och 2). Det är speciellt viktigt att skilja på dessa begrepp när man handskas med något obekant tillsammans med två- eller flersiffriga tal.

Bokstäver eller symboler kan ha olika innebörd. I uttrycket $3 + \boxtimes = 7$ står symbolen för ett bestämt tal. Men om vi skulle beskriva att tre plus ett tal är lika mycket som ett tal plus tre (dvs. kommutativa lagen för addition), $3 + \boxtimes = \boxtimes + 3$, så kan symbolen representera vilket tal som helst. I båda fallen står symbolen för ett okänt tal, och beroende på situationen så är det ett bestämt tal eller vilket tal som helst. Men oavsett om symbolen representerar ett bestämt tal eller ett generellt tal, måste eleverna få möjlighet att erfara att det finns något som gömmer sig bakom symbolen – att symbolen representerar ett värde.

Ett vanligt förekommande sätt att introducera bokstäver i den tidiga algebraundervisningen är att låta föremål eller personer representeras av en bokstav som förkortning till att skriva ut hela namnet. Vi kan betrakta exemplet:

Du har plockat två päron och din kamrat har plockat sex päron.
Hur många päron har ni plockat tillsammans?

Vi kan skriva:

$$2 \text{ päron} + 6 \text{ päron} = 8 \text{ päron}$$

Ett annat sätt att skriva detta är att förkorta ordet ”päron”:

$$2p + 6p = 8p$$

Här är det meningen att ”p” skall representera päron. Med ett sådant skrivsätt kan man leda elever till att tolka bokstäver som förkortningar, som ord för objekt. Men det är en användning av bokstäver som inte är helt utan problem och ibland direkt felaktig. Bokstäver står ju för tal. Men i detta exempel står inte ”p” för ett tal utan används snarare som en enhet (antal päron). Ännu mer konstigt kan det bli, se till exempel följande exempel:

Du köper ett antal pennor och suddgummin, där p är priset på en penna och s är priset på ett suddgummi. Vad kan då $4p + 3s$ betyda?

Studier har visat att om elever ska förklara vad $4p + 3s$ betyder, kan svaret bli 4 pennor och 3 suddgummin i stället för att förklara att det anger priset för fyra pennor och tre suddgummin. Dessa två exempel belyser att det är viktigt att betona att bokstäverna står för tal när de införs i den tidiga algebraundervisningen.

Uppfattningen att en bokstavssymbol är en förkortning för ett ord bygger på att eleven knyter en speciell symbol till ett objekt. Man har också sett att elever kan ha uppfattningen att en bokstavssymbol har med bokstavens plats i alfabetet att göra. Man har sett att elever kan ha föreställningen att $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ osv. I båda fallen betraktar inte eleven bokstaven som utbytbar. Eleven tolkar alltså inte $12 - a = 4$ på samma sätt som $12 - b = 4$, fast båda uttrycken beskriver samma samband.

Olika studier pekar också ut vikten av att eleven får syn på att om symbolen förekommer flera gånger i en given uppgift så representerar den samma värde. Följande uppgift fanns i TIMSS 2007 (för åk 4):

$64 / \square = \square$
I denna uppställning står $\square$ för ett och samma tal. Vilket tal står $\square$ för?

(A) 4
(B) 8
(C) 16
(D) 32

Uppgiften är till för att testa elevens förståelse för att det skall stå samma tal i båda rutorna. Bara omkring en fjärdedel av eleverna markerade det korrekta svaret (8) på denna uppgift. Ungefär lika många svarade "32". Möjligen var det en följd av att många elever uppfattade uppgiften som $64 - \square = \square$. Slutligen var det ytterligare omkring en fjärdedel av eleverna som inte svarade på frågan alls. Här var det alltså mindre än hälften, och kanske bara omkring en fjärdedel av eleverna som kan tänkas ha erhållit förståelse för att samma tal kan stå i båda rutorna.

Sammantaget kan vi se att elevers problem med symboler för obekanta tal kan ligga på flera nivåer. Eleven måste kunna förstå att symbolen har en mening, att den representerar ett värde, ett tal. Eleven måste också ha fått syn på de speciella kritiska aspekter som har med bokstäver att göra.

Möjliga kritiska aspekter

1: Att siffra och tal är olika saker

Eleven måste få syn på att det är skillnad i betydelse mellan ordet "siffra" och

ordet "tal". Eleven måste känna till att ett tal kan ha olika många siffror. Om vi exempelvis ger uppgiften $1 + \square = 13$ så måste eleven se att rutan inte motsvarar siffran 3, utan att det som efterfrågas är ett tal (12).

2: Att en symbol representerar ett tal, att det har ett värde, men att värdet inte har med symbolen att göra.

Eleven måste få syn på att symbolen representerar något kvantifierbart. En vanlig uppfattning är att bokstäver i matematiska uttryck är förkortning för ett ord. Eleven måste därför erfara att det inte nödvändigtvis är sant, och att symbolen döljer ett värde. Eleven måste också få syn på att samma samband kan beskrivas med olika symboler.

3: Att en symbol kan representera ett bestämt tal eller flera olika tal

Eleven måste få syn på att symbolen kan representera ett bestämt värde eller vilket värde som helst, beroende på situation. I exemplet $\square + 3 = 3 + \square$ så representerar kvadraten många olika tal, men i uttrycket $20 = \square + 3$ representerar kvadraten bara ett bestämt tal.

4: Att om samma symbol förekommer flera gånger i ett uttryck så representerar det samma tal

Eleven måste upptäcka att i ett och samma uttryck står en symbol för samma värde (samma tal). I exemplet $\square + 4 = 3 \cdot \square$ måste eleven se att båda rutorna gömmer samma tal (i detta fallet 2), eller $64/\square = \square$, där båda rutorna står för samma tal (8).

Variationsmönster

Här ger vi exempel på möjliga variationsmönster för några av de kritiska aspekterna.

För att eleven ska få syn på de kritiska aspekterna att en symbol representerar ett tal och att det ibland kan representera flera olika tal kan vi använda exemplet med kommutativa lagen (den kan lämpligen först visas laborativt med t.ex. olidfärgade klossar):

$$1 + 9 = 9 + 1$$

Med dessa exempel vill vi visa att vi kan ersätta talen med en symbol. Som till exempel

$$1 + \square = \square + 1$$

Här betyder alltså symbolen $\square$ olika tal. För varje ny rad betyder emellertid symbolen samma tal. Vi kan sedan gå vidare och visa att symbolen inte betyder olika siffror (för i exemplen ovan kan symbolen riskera att tolkas som en siffra), utan betyder olika tal. Sedan kan vi exempelvis fortsätta med följande exempel:

$$1 + 10 = 10 + 1$$

Återigen kan vi ersätta de olika talen med $1 + \square = \square + 1$. Genom att hålla sambandet konstant och ställa dessa tal (med en, två eller tre siffror) i kontrast till siffrorna ovan vill vi göra synligt för eleverna att symbolen $\square$ inte representerar olika siffror, den

representerar olika värden eller olika tal (med hur många siffror som helst). Speciellt vill vi visa att $\square$ kan vara olika tal.

Vi kan nu kontrastera $1 + \square = \square + 1$ med uttrycket $1 + \square = 2 + 1$.

I det första exemplet står symbolen för vilka tal som helst. Men i det högra exemplet finns det bara ett tal som skulle kunna gömma sig bakom symbolen. För att ytterligare förtydliga att olika uttryck har olika okända tal, vill vi visa en generalisering genom följande exempel:

I uttrycket $1 + \square = 3$ är det okända talet ”2”.

I uttrycket $1 + \square = 4$ är det okända talet ”3”.

I uttrycket $1 + \square = 31$ är det okända talet ”30”.

I uttrycket $1 + \square = 123$ är det okända talet ”122”.

Hittills har vi använt exempel med uttryck där symbolen förekommer en gång för att visa att symbolen kan representera ett tal, och uttryck med två symboler två gånger för att visa att symbolerna kan representera vilka tal som helst. Men antalet gånger symbolen förekommer har inte att göra med hur många tal som symbolen representerar. För att visa att de inte har med varandra att göra kan vi diskutera följande exempel:

Vi kan visa exemplet $4 + \square = 3 \cdot \square$, där symbolen döljer ett tal (fast fyrkanten förekommer två gånger), och ställa det i kontrast till exemplet $1 + \square = \square + 1$ där symbolen står för alla möjliga tal (och där fyrkanten också förekommer två gånger). Vi kan också visa exemplet $1 + \square > 3$, där symbolen kan betyda hur många olika tal som helst (fast fyrkanten bara förekommer en gång), i kontrast till $1 + \square = 3$ där symbolen står för ett bestämt tal.

Referenser

Carpenter, T. P., & Fennema, E. (1992). Cognitively guided instruction: Building on the knowledge of students and teachers, *International Journal of Educational Research*, 17(5), 457–470. [http://dx.doi.org/10.1016/s0883-0355\(05\)80005-9](http://dx.doi.org/10.1016/s0883-0355(05)80005-9)

Hagland, K. (2008). Buss på ekvationen! *Nämnnaren*, 2, 38–42. NCM.