

Likheter och olikheter

Robert Gunnarsson och Annica Otterborg, Högskolan i Jönköping

Matematiken använder sig av ett stort antal speciella symboler, var och en med specifik innebörd i olika sammanhang. En viktig del av matematiken handlar om att jämföra tal, och sådana jämförelser kallas relationer. Förståelse för relationer och innebörden av relationernas symboler, är i sin tur viktig för att kunna utveckla förmågan att använda och analysera matematiska begrepp, men också för att utveckla förmågan att samtala om och argumentera för beräkningar och slutsatser. I denna text behandlas de vanligaste symbolerna där relationerna är likheter och olikheter. Symbolerna är $=$, $\neq$, $>$, $<$.

Symbolen $=$ betyder ”är lika med” och används i uttryck som exempelvis

 $=$  och $5 = 5$

för att beteckna att ett tal har samma värde som ett annat tal, eller att något är lika mycket som, eller samma antal som, något annat.

Symbolen $\neq$ betyder ”är inte lika med” och används till exempel i uttryck som

 $\neq$  $15 \neq 14$ och $4 \text{ kakor} \neq 2 \text{ kakor}$.

Symbolen används för att beteckna att två tal inte har samma värde, eller att något inte är lika mycket som, eller har samma antal som, något annat.

Symbolen $>$ betyder ”är större än” alternativt ”är fler än” och används när vi vill visa att ett tal är större än ett annat tal eller att ett antal är fler än ett annat antal. Symbolen kan användas exempelvis så här:

 $>$  > 1 eller $10 \text{ år} > 5 \text{ år}$.

Symbolen $<$ betyder ”är mindre än” alternativt ”är färre än” och används när vi vill visa att ett tal är mindre än ett annat eller att ett antal är färre än ett annat antal. Symbolen används exempelvis som här:

 $<$  < 143 eller $1 \text{ vecka} < 2 \text{ veckor}$.

Vi talar framförallt om två olika sorters relationer: likheter och olikheter. I en likhet används likhetstecknet, symbolen $=$, för att indikera att två enheter av en storhet är lika

stora eller att två grupper har samma antal av någonting. Motsatsen till en likhet betecknas med ett icke-likamedtecken, $\neq$. Denna symbol kan användas till exempel när de två grupperna inte har samma antal. När man vill påpeka att ett antal är fler än ett annat antal använder vi istället olikhetstecknet $>$. Om vi istället vet att, och vill påpeka att ett antal är färre än ett annat antal så använder vi olikhetstecknet $<$.

Olikhetstecknen benämns efter hur man läser dem i vanlig text, från vänster till höger. Alltså kallas $<$ för ”mindre än” (som t.ex. i $35 < 53$, som läses ”35 är mindre än 53”) och $>$ kallas för ”större än” (så utläses t.ex. $321 > 123$ som ”321 är större än 123”). Det är ganska vanligt att elever blandar ihop olikhetstecknen, och inte vet om att symbolen $>$ heter ”större än” eller att $<$ heter ”mindre än”. Det viktiga är inte alltid att det heter just ”större än” eller ”mindre än”. Det viktiga är relationen de beskriver. När vi vill byta uttrycksform från symboler till en mer retorisk form så måste vi kunna skilja på de båda olikhetstecknen också utifrån vad de heter. Vi tar ett exempel: Om vi har två grupper med fem personer i den ena gruppen (A-gruppen) och tre personer i den andra gruppen (B-gruppen), så är det fler i A-gruppen än i B-gruppen, men då måste det också logiskt vara färre i B-gruppen än i A-gruppen).

Beroende på hur vi skriver relationen $5 > 3$ eller $3 < 5$ så använder vi olika olikhetstecken, men det beskriver samma relation, se figur till höger.

Om vi däremot vill läsa det vi skrivit så måste vi kunna skilja på ”större än” eller ”mindre än”.

Olikheten $5 > 3$ kan läsas ut som ”fem är större än tre”, men kan inte läsas som ”fem är mindre än tre”. Här är det viktigt att kunna skilja på vad symbolerna kallas och inte bara vilken relation de representerar.

Olikheten $5 > 3$ kan illustreras



eller



Ett vanligt förekommande problem för elever är att skilja på olikhetstecknen när de inte står tillsammans med två tal utan bara tillsammans med ett tal. Flera elever har svårt att säga om till exempelvis ” < 25 ” står för ”mer än 25” eller ”mindre än 25”. Man har också sett att liknande problem uppkommer när elever skriver kedjor av olikheter. Man kan misstänka att sådana problem med att använda rätt olikhetstecken som i uppgiften nedan, ett tal större än 5 och mindre än 10, grundar sig i elevers problem med att se vad de olika olikhetstecknen innebär.

Ett tal är större än 5 och mindre än 10. Hur kan du skriva det?

a) $5 < \square > 10$

c) $5 > \square > 10$

b) $5 > \square < 10$

d) $5 < \square < 10$

Här är alternativ b) $5 > \square < 10$ ett lockande alternativ (med ett större än vid 5:an och ett mindre än-tecken vid 10:an). Men det är en felaktig kedja av olikheter, här står ju faktiskt att 10 är större än något som är mindre än 5.

Baserat på matematikdidaktisk forskning om hur elever uppfattar och använder symboler för likheter och olikheter kan vi därmed ställa upp ett antal tänkbara kritiska aspekter. Dessa aspekter är sådana som man kan anse att eleven måste få syn på för att lära sig förstå och kunna använda symbolerna för likheter och olikheter.

Den logiska bakgrunden till symbolerna och undervisning om olikheter

Det finns en logisk bakgrund till de olika tecknen för relationer. Vi har hittills behandlat fyra olika symboler ($=$, $\neq$, $>$, $<$). Men i grunden är det bara tre; lika med ($=$), större än ($>$) och mindre än ($<$). Det fjärde tecknet, ”inte lika med” ($\neq$), är motsatsen till likhetstecknet. De andra två tecknen är dock inte varandras motsatser. En vanlig missuppfattning är till exempel att ”större än” är motsatsen till ”mindre än”. Men om en mamma säger till sitt barn att ”du får inte ta fler än två kex”, då tar barnet förmodligen inte färre än två kex. Det mest troliga är att barnet kommer ta precis två. ”Inte fler än” betyder alltså inte ”färre än”. Med andra ord är motsatsen till ”fler än” inte ”färre än”. Mammans ord ”Inte fler än två” kan, som i det här exemplet, vara färre än två, men det kan också visa sig vara lika med två kex. Motsatsen till ”fler än” är alltså färre än eller lika med.

Beteckningen, att stryka över likhetstecknet för att symbolisera ”inte lika med”, är ett sätt att skriva som även återkommer i andra sammanhang inom matematiken. Till exempel betecknas motsatsen till ”större än”, det vill säga ”inte större än”, med ett överstruket större-än-tecken ($\nless$) och på samma sätt skrivs ”inte mindre än” med överstruket mindre-än-tecken ($\nless$). I praktiken används dock inte dessa ”icke-olikhetstecknen”. Istället används ofta ”större än eller lika med” ($\geq$) som motsats till ”mindre än”. Om barnet, enligt det tidigare exemplet, inte får ta fler än två kex så innebär det att barnet får högst två kex. En sådan relation brukar beskrivas med ”mindre än eller lika med” ($\leq$). I exemplet med barnet som får kex skulle vi kunna skriva med symboler: antal kex som barnet får ta ≤ 2 .

En diskussion kring den logiska bakgrunden till symbolerna är viktig för att eleverna skall kunna utveckla sin förmåga till att föra och följa matematiska resonemang och kunna dra slutsatser.

Undervisning om beräkningar som innehåller likheter

För att gynna en progression där eleverna från åk 1–3, genom åk 4–6 och till åk 7–9 ska kunna utveckla sin förståelse för beräkningar behöver de utveckla en djup förståelse för relationssymbolerna. Här pekar forskningen ut förståelsen för likhetstecknets innebörd som en viktig aspekt. Många elever har inledningsvis en uppfattning av likhetstecknet som en uppmaning att utföra en beräkning. En sådan uppfattning kan leda till att elever beräknar $3 + 4 + 5$ genom att skriva $3 + 4 = 7 + 5 = 12$ (vilket är ett missbruk av likhetstecknet, då det är bättre att skriva $3 + 4 + 5 = 7 + 5 = 12$). Man kan beskriva det som att eleven behöver erfara likhetstecknet som en symbol för en relation mellan två tal.

Det är en sådan erfarenhet av likhetstecknet som man vill förmedla genom att konfrontera eleverna med uppgifter där högerledet består av två termer varav den ena är okänd, som till exempel uppgiften $13 = \square - 4$. Matematikdidaktisk forskning menar att det är ett tecken på en outvecklad förståelse för likhetstecknets innebörd i de fall en elev svarar att rutan står för talet 9. I det nationella provet i åk 3 våren 2011 gavs just denna uppgift. Då svarade endast 59% av eleverna rätt, och det vanligaste felsvaret var just 9, som ca 18% svarade. Man kan därför befara att många elever kommer att få problem med beräkningar, och speciellt ekvationer (i åk 4–6 och senare), om de inte förstår att det som står på ena sidan om likhetstecknet är lika mycket som det som står på andra sidan.

Tänkbara kritiska aspekter

1: Se att relationen jämför kvantiteter.

Eleverna måste få syn på att symbolerna ($=$, $\neq$, $>$, $<$) jämför något som är kvantifierbart. Att de inte jämför andra egenskaper så som exempelvis färg, eller att det är otydligt om vi använder dem för att beskriva personer, som ”Edvin $>$ Ebba” (det är otydligt vilken egenskap vi egentligen jämför, om det är längd, ålder, eller antalet bokstäver i namnet).

2: Förstå varför tecknen har olika utseende och hur det hänger ihop med vad de kallas.

Eleverna måste förstå varför symbolerna ($=$, $\neq$, $>$, $<$) skiljer sig utseendemässigt, exempelvis se att de båda olikhetstecknen ($>$ och $<$) är vända åt var sitt håll för att de beskriver relationen mellan talen på båda sidor om dem. (I syfte att lära sig just de här tecknen används ju ibland symboliken med något, till exempel en krokodil, som gapar åt det största och vänder ryggen åt det minsta.). Eleverna måste också få syn på när det är viktigt att kunna skilja på ”större än” och ”mindre än”.

3: Se att symbolerna $>$ och $<$ betyder olika saker och vad tecknen innebär.

Eleverna måste få syn på att man inte kan använda vilket olikhetstecken som helst. Tecknen har en bestämd betydelse. De måste få syn på när de kan använda eller inte

använda respektive symbol, till exempel kan $5 > 4$ inte skrivas med det andra tecknet, det vill säga $5 < 4$ är inte korrekt. Eleverna måste också få möjlighet att erfara olikhetstecken med bara ett led, som till exempel hur " < 25 " skulle kunna tolkas.

4: Se att det finns en motsats till = som kan skrivas $\neq$, och när den kan användas.

Eleverna måste få syn på den logiska bakgrunden till symbolerna. De måste få syn på när de kan använda eller inte använda respektive symbol, till exempel $5 > 4$, men också $5 \neq 4$. Om vi har nio hela äpplen fördelade i två plastkassar så vet vi inte säkert att det är fler i den ena kassen än i den andra (det kan ju vara tvärtom). Det enda man säkert vet är att det inte är samma antal i båda kassarna.

Att använda variationsteorin för att låta eleven få syn på den kritiska aspekten

Enligt variationsteorins perspektiv kan olika slag av variation i de exempel man visar, ge möjlighet för eleven att få syn på den kritiska aspekten. Här ger vi exempel på möjliga variationsmönster för några av de kritiska aspekterna.

För att eleven ska få möjlighet att förstå att relationen jämför kvantiteter kan vi lyfta fram exempel som titeln på ett känt barnprogram "Fem myror är fler än fyra elefanter". Vi kan ställa frågan om man kan beskriva denna titel med uttrycket $5 \text{ myror} > 4 \text{ elefanter}$. Genom att utgå från ett och samma uttryck (hålla uttrycket **konstant**) kan vi visa en **variation** i hur uttrycket kan tolkas.

- Vi skulle kunna tolka $5 \text{ myror} > 4 \text{ elefanter}$ som "fem myror är fler än fyra elefanter", och då stämmer det ju.
- Vi skulle kunna tolka $5 \text{ myror} > 4 \text{ elefanter}$ som "fem myror väger mer än fyra elefanter", och då stämmer det ju inte.
- Vi skulle kunna tolka $5 \text{ myror} > 4 \text{ elefanter}$ som "fem myror är äldre än fyra elefanter", och då har vi ingen aning om det stämmer.

På detta vis vill vi lyfta fram att det öppnar för olika tolkningar om vi använder olika enheter på vardera sidan av relationen. Vi har svårt att jämföra myror med elefanter utan att precisera vilken egenskap (antal, vikt, ålder) hos grupperna myror och elefanter vi jämför.

Vi kan lägga till ytterligare ett exempel: "det är mindre barn i simhallen idag än igår". Vi skulle ha svårt att beskriva även detta med matematiskt symbolspråk. Uttrycket "barn i simhallen idag $<$ barn i simhallen igår" saknar bestämd mening. Det är oklart om barnen som var där igår var längre eller äldre än de barn som är där idag. I dessa fall, myror och elefanter respektive barn i simhall, är det matematiska symbolspråket olämpligt för att beskriva relationen.

Vi kan som **kontrast** till dessa två exempel diskutera vad $5 \text{ bollar} > 3 \text{ bollar}$ kan innebära. Så länge vi behandlar likvärdiga bollar så spelar det ingen roll om vi tolkar det som fler eller tyngre. Men vi kan få problem med betydelsen om vi menar 5 tennisbollar > 3 basketbollar. Däremot kan vi alltid säga att $5 > 3$ om talen 5 respektive 3 och på samma sätt stämmer det alltid att antalet 5 stycken är fler än 3 stycken.

För att hjälpa eleverna att få syn på den kritiska aspekten att de olika tecknen betyder olika saker, kan vi ge exemplet med sju tändstickor som fördelas i två tändsticksaskar. Låt en rektangel representera antalet tändstickor i en ask, och låt siffran beteckna att vi vet hur många tändstickor det finns i just den asken. Då kan vi be eleven att sätta rätt symbol mellan askarna.

- a)  
- b)  
- c)  
- d)  

I det första exemplet har vi alltså fem tändstickor i den ena asken och två i den andra. Det är alltså fler i den vänstra asken. I nästkommande två exempel måste eleven själv fundera över hur många det kan finnas i den andra asken. I det sista exemplet (d) så vet vi ju egentligen bara att det är olika antal i de båda askarna. Den enda symbol som i så fall kan användas är icke-likamedtecknet. Vi bör ställa frågan om vilka symboler som kan användas för att visa relationen mellan antalet i de båda askarna.

Med dessa exempel vill vi lyfta fram att olika symboler har olika betydelse och att vi inte kan använda både ”fler än” och ”färre än” samtidigt. Däremot kan vi använda ”icke-likamed” samtidigt som något av olikhetstecknen. Ur ett variationsteoretiskt perspektiv är denna typ av variation ett exempel på fusion, där flera kritiska aspekter lyfts fram samtidigt för att lyfta fram det som är själva lärandeobjektet.

Referenser

Hattikudur, S., & Alibali, M. W. (2010). Learning about the equal sign: Does comparing with inequality symbols help? *Journal of Experimental Child Psychology*, 107(1), 15–30. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2010.03.004>