

Algebra som språk

Håkan Lennerstad, Blekinge tekniska högskola och Cecilia Kilhamn, Göteborgs universitet

Att ha ett språkligt perspektiv på algebra innebär att ta vara på de många likheter som faktiskt finns mellan algebrans språk och naturliga språk (språk som är modersmål för någon, t.ex. svenska). En förhoppning är att elever märker att de kan använda kunnandet i sitt modersmål för att ta till sig algebran.

I likhet med alla andra språk finns det i det algebraiska symbolspråket både syntax (språkregler) och semantik (betydelser). Algebrans syntax består av de räkneregler och konventioner som finns för tecknen, och man kan säga att algebrans semantik är som en bro mellan språket och världen. Liksom lärandet av ord i naturliga språk sker lärandet av algebrasymboler genom att man lär sig en definition eller ett synonym samt genom att se och använda dem många gånger. Vi kommer också senare att ta upp översättningar mellan algebrans språk och svenska för att synliggöra och lättare kunna diskutera algebrans betydelser.

Syntaxen avgör vilka algebraiska uttryck eller påståenden som är tolkningsbara och meningsfulla. Jämför följande symbolsammansättningar:

$b4c=+/8$ (en meningslös sammansättning symboler)

$4b + 3$ (ett algebraiskt uttryck innehållande två operationer, två tal och en variabel)

$4b + 3 = x$ (ett påstående som är sant för vissa värden på b och x , men falskt för andra)

$a + b = b + a$ (kommutativa lagen för addition, som är sann för alla värden på a och b)

Alla språk är verktyg att tänka med, varav modersmålet är det kraftfullaste. Just för matematik är det algebraiska symbolspråket särskilt effektivt, under förutsättning att man behärskar det. Elevers svårigheter med det algebraiska symbolspråket kan dels handla om semantik, det vill säga vad de olika symbolerna betyder, och dels om syntax, dvs. vad man kan göra med symbolerna.

Från aritmetik till algebra

I aritmetik har elever blivit vana vid att **lösa** matematiska problem. I algebra ägnar man sig mer åt att **representera**, det vill säga att uttrycka och beskriva. Här är ett exempel:

- På en gren satt 13 kråkor. 9 kom till och 6 flög iväg. Hur många kråkor fanns det kvar på grenen? Frågan fokuserar på antalet, det vill säga svaret (som är 16).
- På en gren satt 13 kråkor. 9 kom till och 6 flög iväg. Representera situationen med matematiskt språk för att ta reda på hur många som fanns kvar. Uppgiften fokuserar på representation av den matematiska situationen ($13 + 9 - 6$).
- På en gren satt 13 kråkor. x kråkor kom till och y kråkor flög iväg. Skriv ett uttryck för hur många fåglar som fanns kvar. Fundera på vilka värden x och y kan ha. Uppgiften fokuserar på den algebraiska representationen och handlar om att använda algebra för att skriva ett generellt uttryck ($13 + x - y$).

För att komma till denna generalisering behöver ni fokusera på att först representera (dvs. uttrycka problemet med matematiskt symbolspråk) och sen räkna ut och svara. Elever behöver förstå symbolspråket på ett mer medvetet sätt. Ett steg på vägen är att uppfatta likhetstecknet som ”samma värde på båda sidor”, snarare än ”blir” eller ”därefter får jag”. Det betyder till exempel att ” $3 + 8 = 11$ ” och ” $11 = 3 + 8$ ” är lika giltiga påståenden.

Flera språk: naturligt språk, symbolspråk och fackspråk

Matematiska symboler och formler förekommer aldrig ensamma, utan alltid tillsammans med naturligt språk. Varje text på svenska med matematiska tecken kan därför sägas vara tvåspråkig, svenska blandat med matematikens symbolspråk. Magnus Österholm har visat att universitetsstudenter läser löpande text på ett annat sätt om det finns symboler i texten, vilket kan förväntas gälla minst lika mycket för elever. De tenderar att inrikta sig på symbolerna, och kan missa vad själva texten säger (Österholm, 2006). På samma sätt fokuserar elever ofta på siffrorna (som är de mest grundläggande av matematikens symboler) i en problemuppgift och kan bortse från problemets formulering. Matematiken har också ett eget fackspråk (matematikens terminologi) som delar ett stort antal ord med vardagsspråket, ibland med helt olika betydelser. Några omedelbara exempel på det är volym (ljudstyrka), udda (ovanlig), tal (föredrag, prat), bråk (handgemäng), dividera (diskutera), lösning (vattenblandning). Vi har alltså i matematiken ett **symbolspråk** med en egen uppsättning symboler (ett särskilt alfabet), och även **naturligt språk** och **fackspråk**, där de två sistnämnda ofta delar ord fast med olika betydelser.

Naturligt språk har både synonymer (lukt och doft betyder samma sak) och dubbelbetydelser (lag betyder både en samling personer som samarbetar och en förordning vi måste följa). Båda typerna finns också i symbolspråket och i matematikens fackspråk, och kan så klart vålla svårigheter. Exempelvis kan multiplikation skrivas med flera olika symboler: \cdot , \times , eller $*$ (vanligt i datorprogrammeringsspråk), eller med ingen symbol alls, som i uttrycket $2x$. I vissa länder skriver man $2\cdot3$ som $2(3)$. Minustecknet är

en symbol med en dubbelbetydelse som kan orsaka svårigheter. Dels betyder det subtraktion (ex: $5 - 3$: operator mellan två tal) och del används det för att ange att ett tal är negativt (ex: -3 : egenskap hos ett tal). Vid ett uttryck som $-3 - 4$ bör det första minustecknet tolkas som en del av talet -3 , och det andra som en subtraktion mellan talen -3 och 4 .

Vad som kan göras med ett uttryck som $-3 - 4$ kan diskuteras på ett teckenmässigt sätt (Vad får man göra med minustecknen?) och på ett mer innehållsmässigt sätt (Är detta en subtraktion, är talen negativa eller positiva?).

Elever som klippte ut trianglar i papper lär ha sagt: ”En triangel har alltid två sidor, framsidan och baksidan!” Det är en bra illustration till att fackspråket inte alltid är konsistent. Man säger att en kub har åtta hörn, tolv kanter och sex sidor, där ”sida” ju betecknar en yta (som mäts med area). Samtidigt säger man att en kvadrat har fyra sidor. I två dimensioner (kvadrat, triangel) är sidan en sträcka, men i tre dimensioner (kub) används ”kant” för detta, och här är en ”sida” en yta.

Bokstäver har i vanligt språk endast ett ljudvärde, och får betydelse som en del av ett ord där ordet har betydelse och inte bokstaven. Detta är helt annorlunda i algebra där alla bokstäver kan användas, och där de då alltid har en numerisk betydelse. Bokstäver används som förkortningar av enheter (m, g, s, ...) där de representerar ett visst bestämt mått, en kvantitet (längden på en meter, vikten av ett gram, ...). Bokstäver förekommer också för speciella tal, till exempel (den grekiska bokstaven pi som är ett irrationellt tal) eller som prefix där bokstaven anger ett tals storlek (k som i kilo betyder tusen, m som i milli betyder tusendel ...). Men den vanligaste användningen av bokstäver i algebra och matematik i allmänhet, är för att beteckna ett obekant tal eller storhet. Det är viktigt att eleverna förstår att det alltid finns ett tal bakom varje bokstav som förekommer i en matematisk beräkning. Bokstaven står för ett värde, den har en numerisk betydelse.

En annan stor skillnad mellan naturligt språk och symbolspråk är hur parenteser används. I det naturliga språket betecknar de något som kan utelämnas, medan de i algebran markerar vad som ska prioriteras, det vill säga beräknas först.

Att översätta mellan språken

Vid problemlösning formulerar man ofta ett matematiskt problem från praktiska exempel, och återvänder till det igen när problemet är löst. Detta brukar kallas modellering och tolkning.

Om Lasse är tre år äldre än Anna, kan detta översättas till formeln $L = A + 3$. Det är då viktigt att L och A är tydliga numeriska storheter. Lasse och Anna är inga numeriska storheter, det är däremot Lasses ålder och Annas ålder. När vi skapat formeln $L = A + 3$

har vi nått in i matematiken och har tillgång till alla dess verktyg och resonemang. Men $L = A + 3$ kan också översättas till naturligt språk som inte har med åldrar att göra, till exempel som ”ett tal som vi kallar L är alltid tre enheter större än ett annat tal, som vi kallar A”.

Man kan alltså tala om översättning mellan en praktisk situation och algebra, men också om översättning mellan algebra och naturligt språk, där någon praktisk situation inte finns med. Syftet med den första är att lösa ett praktiskt problem med hjälp av matematik. Syftet med den senare är att förstå matematiken lättare.

Matematiska symboler har aldrig särskilt långt till svenska (eller andra språk), och detta beror på att de alltid kan översättas. Det finns dessutom olika matematiska översättningar, som lyfter fram olika sidor av ett matematiskt samband. Här är exempel på olika översättningar av operationen $4 + 5 = 9$:

- Fyra plus fem är lika med nio (läser ut vad symbolerna heter)
- Addera fyra och fem så får du nio (beskriver beräkningsproceduren)
- Summan av de två talen fyra och fem är lika mycket som nio (beskriver strukturen)

Översättningarna är exempel på retorisk matematik – matematik som skrivs utan symboler. Fram till 1600-talet var all skriven matematik retorisk. Det symboliska språket är alltså mindre än 400 år gammalt. Att förkorta naturligt språk med hjälp av symboler var en stor drivkraft bakom denna utveckling. Det innebar också andra vinster för matematiken: den blev mer internationell, mer oberoende av skilda tolkningar och speciella tillämpningar, och mer effektiv och lämplig för sitt särskilda syfte. Men ur elevers och studenters synvinkel tog den även längre avstånd från vardagsspråket, och fick större behov av förklaring och översättning. Men retoriska motsvarigheter finns alltid kvar i bakgrunden – det går alltid att översätta.

Ibland kan det vara bra att göra olika översättningar och att diskutera dessa. En generell beskrivning av den distributiva lagen, $(x + y)z = xz + yz$ gäller alltid, kan exempelvis översättas på följande något skilda sätt.

- Produkten av en summa av två tal och ett tredje tal har alltid samma värde som summan av produkterna av de två talen med det tredje.
- Om man har ett tal gånger en parentes som innehåller två tal, så kan man ta bort parentesen om man multiplicerar det första talet med de båda andra talen var för sig.

Den första översättningen är mer algebraisk genom att den beskriver produkter och summor, matematikens semantiska innehåll, och därmed handlar mer om förståelse av

dessa begrepp. Den andra är mer teckenorienterad (och därmed mer syntaktisk), genom att den mer beskriver hur tecknen används och fungerar.

Genom att diskutera olika översättningar kan man få ett samtal både om de matematiska betydelseerna, (operationerna, strukturen), och om hur tecknen används. En elev kan mycket väl förstå det ena utan att ha fått grepp om det andra. Elever bygger upp förståelse kring både semantik och syntax om de vänjer sig vid att diskutera sina egna översättningar.

En översättning är ofta betydligt klumpigare och otydligare än motsvarande formulering på symbolspråk. Detta är ett indirekt sätt att visa symbolspråkets effektivitet – när det väl behärskas. Fördelen med en översättning är att en översättning är ett sätt att *undersöka* ett matematiskt uttryck bit för bit, dess funktion granskas, genom att varje del översätts. På det sättet kan förståelse och intuition flytta över från den associationsrika svenskan till det vanligen associationsfattiga symbolspråket. Slutligen kan gemensamma översättningar öka möjligheterna till meningsfull dialog om matematik mellan lärare och elever (se mer i Ljungblad & Lennerstad, 2012).

Att formulera en algebraisk regel

Algebran är mer än ett symbolspråk, det är också ett speciellt sätt att resonera och argumentera, och ett verktyg för att uttrycka generaliseringar. För att det algebraiska symbolspråket ska bli meningsfullt för eleverna behöver de först ägna tid åt att formulera generella påståenden med hjälp av naturligt språk, och även argumentera för att dessa generella påståenden gäller.

Med naturligt språk kan det vara lättare för elever att formulera en algebraisk regel eftersom modersmålet generellt är det kraftfullaste tankeverktyget. Ett exempel på det kan vara att läraren ställer frågan: Kan man förklara varför $16+16=15+17$ utan att behöva räkna ut vad varje sida blir? I ett exempel svarar Laura, åk 5 (Cai & Knuth, 2011, s. 54–55):

Laura: ”Ena talet bara skickar över ett till det andra talet. Ena 16 gav bort 1 och blev 15 och den andra tog den och blev 17”. Laura visar med ett nytt exempel: $8+8=7+9$. Efter en stunds samtal formulerar hon följande generalisering: ”Det funkar inte bara för 1. Man kan ta bort vilket tal som helst bara jag också lägger till samma tal till det andra talet. Då ändras inte summan”. Här uttrycker Laura i naturligt språk och matematiskt fackspråk ett generellt algebraiskt samband som är användbart i många situationer. Så småningom kommer Laura förhoppningsvis att kunna uttrycka följande generella påstående: $a + a = (a-x) + (a+x)$ för alla a och x som är naturliga tal.

Hur lärs språk?

Modersmålet lär sig ett barn på ett spontant sätt genom lyssnande, imitation och anpassning, vi kan kalla det för att barnet tillägnar sig språket. I denna process lär sig barn använda grammatiken korrekt oftast utan att vara medvetna om de språkliga reglerna. Detta är en helt annan lärprocess än hur man senare kan lära sig ett språk med hjälp av en språkkurs. Det är mycket ovanligt att man lär sig ett nytt språk lika väl som ett som man tillägnat sig.

Vid ett naturligt samtal är det oftast inte språket som samtalet handlar om. Vi kan tala om vår frukost, en ishockeymatch, hur arbetsplatsen fungerar, en bok vi läst – språket är vårt medel till allt och används till stor del på ett oreflekterat sätt eftersom vi i sådana sammanhang då tänker på frukosten, ishockeymatchen, och så vidare. Ändå tränar vi samtidigt språket och utökar vår språkliga förmåga. Men språket är, utanför språkkurserna, naturligt oreflekterat. På liknande sätt är symbolspråket ofta oreflekterat, endast ett medel för matematiska resonemang, vilket kan vara ett problem vid elevers lärande eftersom det fungerar på ett annat sätt än naturliga språk. Detta är ännu ett skäl för att regelbundet göra översättningar. Som lärare kan man naturligtvis fokusera på de vanligaste svårigheterna i det ”nya” språket.

Den process barn använder när de lär sig sitt modersmål, genom att babbla, prata strunt, pröva, bli förstådda och missförstådda, har också sin plats för att finna säkerhet i det matematiska symbolspråket. Det gäller även innehållet: för att lära sig logik behöver man *pröva* och *testa* vilka resonemang som kan gälla, för att tydligt se var och varför de eventuellt spårar ur.

Användning av matematisk terminologi – viktigt men varsamt

Att använda en korrekt matematisk terminologi (fackspråk) är viktigt. Lika viktigt är det att symbolerna används på ett korrekt sätt. Både för att det är en del av den kunskap skolan syftar på, men också för att det framtida lärandet blir lättare. Dock kan det bli alltför mycket fokus på terminologin. Om det är svårt för elever att både förstå matematiken och terminologin, så kan stort fokus på terminologin leda till att den tar all uppmärksamhet, och att det inte blir något utrymme kvar till kreativitet och förståelse. Det matematiska innehållet kan då försvinna. Elever kan också bli mycket tysta och passiva om de är rädda att använda terminologin felaktigt. Därför är det viktigt att vara försiktig med hur man korrigerar terminologin. Det kan vara bra att lägga fokus på den matematiska tanken, och möjligtvis indirekt kommentera terminologianvändningen.

Som lärare kan man föregå med gott exempel genom att använda rätt terminologi, så eleverna ofta får höra och se den. Att sätta ord på saker är en viktig del av att förstå dem. Ska eleverna kunna föra matematiska resonemang behöver de ha matematiska fackord

såsom dividera, subtrahera, udda, jämna, summa, differens, produkt, term, faktor, likhet, variabel, ekvation och så vidare. som en del av sitt aktiva ordförråd. Vid en lektion som handlar just om terminologi, snarare än om matematiska problem, kan man i högre grad kommentera terminologianvändningen. En elev som precis har lyckats lösa ett eller flera problem som denne finner svåra är ofta mer mottaglig för information om rätt terminologi.

Även en matematiker använder ofta den matematiska terminologin inkorrekt när ett forskningsproblem diskuteras, även om man förstås vet vad som är korrekt och är mycket noga med att skriva korrekt i sina rapporter. De flesta av oss bortser från stavfel och grammatiska fel när vi tar anteckningar på en föreläsning eller skriver en minneslapp, men är noga med det när vi skriver formella texter. Eleverna behöver få uppleva båda sorters språkanvändning i algebraklassrummet. Dels situationer där matematiken, de algebraiska resonemangen, är i fokus och terminologi hamnar i bakgrunden, och dels situationer då matematiska resonemang och slutsatser skrivs upp och redovisas på ett formellt korrekt sätt.

Referenser

Cai, J., & Knuth, E. (Red.). (2011). *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives*. Springer.

Ljungblad, A.-L., & Lennerstad, H. (2012). *Matematik och respekt – matematikens mångfald och lyssnandets konst*. Liber Förlag.

Österholm, M. (2006). *Kognitiva och metakognitiva perspektiv på läsförståelse inom matematik*. [Doktorsavhandling, Linköpings universitet].