

Göra lika i båda leden

Cecilia Kilhamn, Göteborgs universitet och Lucian Olteanu, Linnéuniversitetet

Ordet algebra kommer från det arabiska ordet al-djabr (الجبر) vilket betyder återförening eller koppling. Det syftar på förflyttning av termer från ena ledet i ekvationen till den andra för att skapa balans med den obekanta termen i ena ledet och ett tal i det andra ledet. Man brukar säga att ekvationen har ett vänsterled (VL) och ett högerled (HL) och att dessa hela tiden måste vara i balans, alltså att likheten mellan leden hela tiden gäller.

En enkel ekvation av första graden är en ekvation vars allmänna form är: $ax + b = 0$ med a och b som reella tal och x som den obekanta. När eleven löser ekvationen är målet att skapa en ekvivalent ekvation på formen $x = d$, med x som den obekanta och d som ett reellt tal. På så vis får eleven ekvationens lösning. Två ekvationer är ekvivalenta om de har samma lösning. Till exempel kan ekvationen $2x + 3 = 9$ skrivas om till ekvivalenta ekvationer på följande vis:

$$2x + 3 = 9$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

I den nedersta raden har vi ekvationens enklaste form och samtidigt dess lösning. Ekvationen är sann då $x = 3$.

Den stora utmaningen är hur man ska komma från en ekvation till nästa. En formell lösningsmetod är **att göra lika i båda leden**. I äldre läroböcker användes ofta så kallad **överflyttning**. Resonemanget i överflyttning är att man flyttar en term från det ena ledet till det andra och samtidigt byter tecken. Redan för över 30 år sedan visste man att detta sätt att resonera orsakade svårigheter för elever i skolan eftersom de inte visste varför de bytte tecken eller vilket tecken de skulle byta. I moderna läroböcker brukar man istället lära ut metoden **att göra lika i båda leden**. I själva verket är det så att om man utför samma operation i båda leden men inte bokför alla steg kan det se ut som om man flyttar över och byter tecken. Ett exempel:

$2x + 3 = 9$ subtrahera nu med 3 i båda leden (A)

$$2x + 3 - 3 = 9 - 3$$

$$2x = 9 - 3 \quad (\text{B})$$

$2x = 6$ dividera nu båda leden med 2 (C)

$$2x/2 = 6/2$$

$$x = 3$$

I (A) vet man att $+3 - 3 = 0$ så en van ekvationslösare kanske hoppar över att skriva det ledet. Skriver man bara $2x = 9 - 3$ som i (B) så ser det ju ut som om 3 flyttar över från VL till HL och byter tecken. I (C) ska man istället använda den inversa operationen till multiplikation och dividera i båda leden, så här ska inget tecken bytas.

Moderna svenska läromedel brukar introducera den formella lösningsmetoden genom balansmetaforen. En balansvåg eller en gungbräda används som konkret modell och eleven förväntas uppfatta idén om balans och likhet, och att en förändring på ena sidan måste balanseras med en likadan förändring på den andra sidan.

Den typen av konkret illustration av balans mellan två sidor har många fördelar men också en del nackdelar. Vlassis (2002) diskuterar en mängd forskningsresultat kring balansmetaforen och sammanfattar att modellen är väl lämpad för ändamålet men att eleverna samtidigt måste frigöra sig från modellen och inse att det är ett sätt att tänka och inte en konkret modell som alltid går att använda. I det konkreta fallet är det obekanta alltid representerat av ett objekt som ligger på plats. Detta objekt kan man ta bort eller fördela, vilket gör det enkelt att konkret visa ekvationer med addition och multiplikation. Men metoden är baserad på tal som konkreta objekt, har en begränsning i mer abstrakta ekvationer.

Vad eleven här behöver är att generalisera tanken ”att göra samma sak på båda sidor” till ”att utföra samma räkneoperation i båda leden”. Eleven behöver förstå att även när man inte kan rita eller lägga en ekvation så kan man manipulera den genom att utföra samma räkneoperation i båda leden. Man får då en ekvivalent ekvation med samma lösning.

Så här löser vi ekvationen $9 = 12 - x$ med metoden ”att göra lika i båda leden”

Vi vill inte ha en subtraktion med x , så vi börjar med att addera x i båda leden:

$$9 + x = 12 - x + x$$

$$9 + x = 12$$

Nu vill vi ha bort 9 från VL så vi subtraherar 9 i båda leden:

$$9 + x - 9 = 12 - 9$$

$$x = 3$$

Utöver metoden att göra samma sak i båda leden är det flera detaljer av ekvationen $9 = 12 - x$ som eleven behöver inse för att kunna genomföra lösningen ovan. Eleven behöver veta att:

- Målet är att få x själv i ena ledet och ett tal i det andra.
- Addition och subtraktion av samma tal blir 0, så för att bli av med en subtraktion ska man utföra en addition (inversa operationen).
- Ett tal utan något tecken framför sig är alltid positivt.

Tänkbara kritiska aspekter

Om en elev ska lära sig att använda den generella metoden ”göra lika i båda leden” för att lösa ekvationer behöver vissa detaljer av ekvationen och metoden upplevas. Här beskrivs några detaljer som skulle kunna vara kritiska aspekter för eleverna.

1. Att förstå att bokstaven står för ett tal och att vi kan utföra räkneoperationer även med bokstaven (addera, subtrahera, multiplicera, och dividera med den).
2. Att förstå balansmetaforen för en ekvation: att värdet i VL och HL är lika, och att en ändring i ena ledet alltid balanseras med samma ändring i andra ledet.
3. Att generalisera balansmetaforen så att man inte är beroende av att rita upp eller flytta runt objekt för att kunna använda metoden.
4. Att veta att målet med att manipulera en ekvation är att nå ekvationens enklaste form där den obekanta är själv på ena sidan och lösningen på den andra, samt att veta vilken räkneoperation man ska ut utföra för att förenkla ekvationen. Den här detaljen innefattar förståelsen av inversa operationer.

$$\begin{array}{ll} 2x + 6 = 96 & \text{För att ångra en addition med 6 ska vi subtrahera med 6} \\ 2x + 6 - 6 = 96 - 6 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 2x - 5 = 85 & \text{För att ångra en subtraktion med 5 ska vi addera 5} \\ 2x - 5 + 5 = 85 + 5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 2x = 90 & \text{För att ångra en multiplikation med 2 ska vi dividera} \\ 2x/2 = 90/2 & \text{med 2} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} x/5 = 8 & \text{För att ångra en division med 5 ska vi multiplicera} \\ 5 \cdot (x/5) = 5 \cdot 8 & \text{med 5} \end{array}$$

5. Att ett tal alltid hänger samman med den operation som står före talet. Till exempel i uttrycket $6 - x$ är det x som subtraheras, inte 6. Denna detalj handlar också om grundläggande förståelse för subtraktion.

6. Att inse att ett tal som står själv, eller först i ett uttryck, utan något tecken framför sig alltid är ett positivt tal som kan elimineras med en subtraktion. Till exempel:

$$35 + x = 75$$

$$35 + x - 35 = 75 - 35$$

Förslag på variationsmönster

För att eleverna ska finna metoden meningsfull att lära sig bör man arbeta med ekvationer som de inte kan lösa enkelt med informella metoder. Om eleven ”ser” lösningen direkt blir införandet av en systematisk generell metod överflödig. Ett sätt att göra ekvationen svårare är att använda ett större talområde. Vill du inte lägga tid på beräkningar kan eleverna få använda miniräknaren, fokus här ligger inte på beräkningar utan på att ta reda på vilka beräkningar som ska göras i de båda leden för att lösa ekvationen. Vad eleverna ges möjlighet att uppleva beror dels på vilka ekvationer du väljer att arbeta med, och dels på hur du pratar om dessa ekvationer och de olika stegen i lösningsmetoden. Numreringen nedan är detsamma som numreringen som tas upp i ”Tänkbara kritiska aspekter”.

1. För att eleverna ska se bokstaven som ett obekant tal som det går att operera med kan du börja med ett tal som du sedan ”gömmer” bakom en bokstav. I ett exempel hämtat från Herscovics & Kieran (1980) fick eleverna utgå från likheten: $7 \cdot 13 + 48 = 139$. Talet 13 ”gömdes” genom att man ritade en låda omkring det. Sedan ersattes det gömda talet med en bokstav och hela lösningsproceduren genomfördes med två parallella representationer.

$$\begin{aligned} 7 \cdot \boxed{13} + 48 &= 139 \\ 7 \cdot \boxed{13} + 48 - 48 &= 139 - 48 \\ 7 \cdot \boxed{13} &= 91 \\ (7 \cdot \boxed{13}) / 7 &= 91 / 7 \\ \boxed{13} &= 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7 \cdot x + 48 &= 139 \\ 7 \cdot x + 48 - 48 &= 139 - 48 \\ 7 \cdot x &= 91 \\ (7 \cdot x) / 7 &= 91 / 7 \\ x &= 13 \end{aligned}$$

Du kan visa att bokstaven behandlas som ett tal genom att variera var i ekvationen bokstaven finns och när du behöver operera med den:

$350 + x = 700$	löses med subtraktion med 350 i båda led
$x + 47 = 350$	löses genom subtraktion med 47 i båda led
$350 + 47 = x$	löses genom att addera 350 och 47
$350 - x = 0$	löses genom addition med x i båda led
$350 - x = 47$	först addition med x , sedan subtraktion med 47 i båda led

Här kan nämnas att elever kanske föreslår att de ska subtrahera med 350 i båda leden. Då får de ekvationen:

$$\begin{aligned} -x &= 47 - 350 && \text{(subtrahera med 47)} \\ -x &= -303 && \text{(dividera med -1)} \\ x &= 303 \end{aligned}$$

Detta är ett helt korrekt sätt att lösa ekvationen, men för många elever kan hanteringen av negativa tal skapa problem. Om eleven tillåter sig att operera med den obekanta så kan eleven undvika negativa tal så länge han eller hon väljer ekvationer som har en positiv lösning. Förståelse för negativa tal är en viktig del av det centrala innehållet taluppfattning och tals användning, men det ligger utanför innehållet som behandlas i denna text.

- 2-3. Detaljerna som tas upp i punkt 2 och 3 belyser du enklast genom att starta i en konkret bild av balans och att sedan i dialog med eleverna generalisera den till att gälla alla räkneoperationer. Kontrastera ekvationer som går att lägga/rita (ekvationer med addition och multiplikation) med ekvationer som inte går att lägga/rita (ekvationer med subtraktion och division), men där alla ekvationerna löses med metoden **att utföra samma räkneoperation i båda leden**.

Kontrastera: $4 + x = 9$ med $x - 4 = 9$

$4 + x = 9$ kan illustreras på följande vis: $**** + \square = *****$ (där rutan motsvarar x)

Ekvationen löses genom att eleven tar bort 4 från varje sida och får: $\square = *****$

$x - 4 = 9$ går inte att rita eftersom det är svårt att rita något som ska subtraheras.

Här måste du och dina elever kunna resonera med hjälp av metoden. Ekvationen lösas genom att ni adderar 4 till varje sida och får: $x = 13$

Kontrastera:	$x + 61 = 999$	med	$x - 61 = 999$
Kontrastera:	$35 = 57 + x$	med	$35 = 57 - x$
Kontrastera:	$75 = 5 \cdot x$	med	$15 = x/5$

Variera också ekvationerna så att eleverna kan upptäcka att ekvationer med samma tal och samma operationer löses på samma sätt. Istället för att vara fokuserad på själva lösningen flyttas fokus till operationerna som ska utföras för att nå lösningen. Här är exempel på tre olika variationer där resonemanget kan generaliseras:

$$48 + x = 153$$

$$48 + 5x = 153$$

$$48 + 2x = 153$$

$$x - 61 = 999$$

$$2x - 61 = 999$$

$$10x - 61 = 999$$

$$35 = 57 - x$$

$$35 = 57 - 2x$$

$$35 = 47 - 2x$$

Den första ekvationen löses genom subtraktion av 48 i båda leden. I nästa ekvation börjar eleven på samma sätt men får ett mellansteg i ekvationen $5x = 105$. Den löser eleven med division med 5 i båda leden. I den tredje ekvationen kan eleven använda samma resonemang men nu ska man dividera med 2 istället för med 5.

Doing – undoing: inversa operationer

I engelskspråkig matematikdidaktisk litteratur används ofta motsatsverben doing – undoing för att beskriva inversa operationer. I svenska språket använder vi för det mesta två olika verb för att beskriva motsatta handlingar och det blir inte lika tydligt att handlingarna är varandras inverser. Här är några svenska uttryck som motsvarar engelskans doing – undoing:

göra – göra gjort (ånga)	(do – undo)
knyta – knyta upp	(tie – untie)
packa – packa upp	(pack – unpack)
förändra – återställa	

I ekvationslösning arbetar du hela tiden med motsatta operationer. Du kan belysa vilken operation man ska genomföra och att talet hänger samman med operationen före genom att arbeta åt båda hållen parallellt. Utgå från en ekvation i sin enklaste form och förändra den på något sätt. Fråga sedan hur eleven gör för att komma tillbaka till den första ekvationen igen. Notera att om eleven utför flera operationer efter varandra (som i det andra exemplet i tabellen) så måste han eller hon utföra de inversa operationerna i motsatt ordning. Eleven börjar med att återställa den sist genomförda förändringen.

Förändra	Återställa
$x = 5$ addera 472: $x + 472 = 477$	$x + 472 = 477$ subtrahera 472: $x = 5$
$x = 13$ multiplicera med 10: $10x = 130$ addera 70: $10x + 70 = 200$	$10x + 70 = 200$ subtrahera 70: $10x = 130$ dividera med 10: $x = 13$

Till sist kan du i din undervisning fokusera på hur eleverna ska förstå ett tal som inte föregås av en operation. Till exempel är 35 och 75 i ekvationen $35 + x = 75$ två tal som finns i ekvationen utan något tecken framför. De kan betraktas som positiva tal, vilket innebär att de blir lika med noll om man adderar det motsatta talet (summan av ett positiv tal och det motsatta talet är alltid lika med noll). Vid addition med -35 (det motsatta talet för $+35$) i båda led får vi: $35 + x + (-35) = 75 + (-35)$, det vill säga $x = 75 + (-35)$.

Referenser

Herscovics, N., & Kieran, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. *The Mathematics Teacher*, 73, 572–589.

Vlassis, J. (2002). The balance model: hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown. *Educational Studies in Mathematics*, 49(3), 341–359.
<https://doi.org/10.1023/A:1020229023965>