

Kritiska aspekter och variation av innehåll

Constanta Olteanu, Linnéuniversitetet

Flera studier (t.ex. Olteanu, 2007) visar att lärare använder variation på ett naturligt sätt i matematikundervisningen. Trots detta finns det väsentliga skillnader om du använder dig av variation på ett medvetet och systematiskt sätt eller inte. Att variera innehållet utifrån variationsteorin innebär att du analyserar det som är en kritisk aspekt i elevernas lärande och därefter erbjuder eleverna möjlighet att uppleva variation i denna aspekt. I denna text tas några aspekter upp som kan vara kritiska för dina elever samt de variationer som du kan skapa i dessa aspekter.

Kritiska aspekter och variationsmönster

Flertal forskare visar betydelsen av att flytta tyngdpunkten i algebraundervisningen från färdighetsträning, att manipulera algebraiska uttryck och ekvationer, till förståelse av logiken bakom manipulationerna, hur man uttrycker idéer och matematiska modeller algebraiskt etc. De rent manipulativa färdigheterna är viktiga, men de minskar i betydelse allt eftersom datorer och räknare blir kraftfullare. Därför är det viktigt att successivt utveckla elevernas uppfattningar av betydelsen av bokstavssymbolerna mot en god förståelse av variabelbegreppet. Nedan ges exempel på några aspekter som kan vara kritiska i denna process:

Eleverna ser strukturen i algebraiska uttryck.

Ett sätt att belysa denna aspekt är att använda följande uppgifter:

1. Fyll i tecken för de saknade operationerna:

$$6 \square 7 \square 2 = 15$$

$$20 = 6 \square 7 \square 2$$

$$6 \square 7 \square 2 = 44$$

Med hjälp av denna uppgift eller liknade uppgifter kan eleverna få syn på operationerna som används i numeriska uttryck, hur delarna relateras till varandra. Därefter kan uppgifterna utvecklas för att synliggöra användningen av samma operationer i algebraiska uttryck. Dessa uppgifter kräver omvänt tänkande.

2. Fyll i de saknade uttrycken för att följande algebraiska identiteter ska vara fullständiga:

$$4x - 2 = 2(_ - _)$$

$$15x - _ = 3(_ - 7)$$

$$18x - 30 = _ (3x - _)$$

Med hjälp av dessa uppgifter eller liknade uppgifter kan eleverna få syn på hur olika helheter relateras till varandra.

3. Vilket uttryck är störst $2x$ eller $2 + x$. Med hjälp av denna uppgift eller liknade uppgifter kan eleverna få syn på skillnaden mellan operationer som används i algebraiska uttryck, det vill säga på hur delarna relateras till varandra.
4. Hitta värden för följande uttryck om $2x + 15 = 2$:
 - a) $2x + 16 =$ _____
 - b) $2x + 20 =$ _____
 - c) $2x + 5 =$ _____
 - d) $4 \cdot (2x + 15) =$ _____
 - e) $2 \cdot (2x + 15) =$ _____
 - f) $0,5 \cdot (2x + 5) =$ _____

Denna variation innebär att hantera flera möjligheter att se uttryck som en enda enhet, snarare än att se den som en samling av "atomära" komponenter (obekanta, variabler, siffror och operationer). Ett uttrycks värde behålls konstant, men hur uttrycket syns i varje exempel varierar.

Eleverna förstår övergången mellan översättning, matematisering, symbolmanipulering och tolkning där det gäller att ta sig från uttalanden på vanligt språk till algebra och tillbaka till vanligt språk. Exempelvis kan eleverna formulera egna uttryck eller översätta ett uttryck:

- Skriv med symboler tre mer än ett godtyckligt tal.
- Skriv med ord $2a + 5a$, $s + 2$ och $5 - 3b$. Dessa uttryck saknar likhetstecken och uppmuntrar därför inte till beräkningar.
- Välj ett godtyckligt heltal. Multiplicera med 3. Addera 6. Ta bort det tal du tänkte på. Dividera med 2. Ta bort ditt första tal igen. Svaret är tre. Kan du förklara varför?
- I en grupp människor var det dubbelt så många ögon som näsor. Skriv detta med symboler.

Eleverna övergår från procedurtänkande till strukturellt tänkande. Om eleven i till exempel uttrycket $7x + y$ ersätter x och y med talen 2 och 5, så är resultatet 19, eller om de i uttrycket $4x + 3 = 15$ ersätter x :et med olika värden tills de funnit det rätta. I båda dessa exempel har eleven visat att de har koncentrerat sitt arbete på siffrorna, det vill

säga ett procedurstyrt tänkande, och inte på det algebraiska uttrycket. Vid ett strukturellt tänkande har eleven olika operationer som de använder på det algebraiska uttrycket. Om eleverna till exempel tittar på det algebraiska uttrycket $5x + z + 2x$ så kan de förenkla det till $7x + z$, eller om de tittar på ekvationen $7x - 3 = 4x + 3$ som kan lösas om de subtraherar $4x$ från båda sidorna så att de får $7x - 4x - 3 = 4x - 4x + 3$ vilket kan förenklas till $3x - 3 = 3$. I båda dessa exempel arbetar eleven med det algebraiska uttrycket och räknar inte med siffrorna, resultatet är fortfarande ett algebraiskt uttryck.

Eleverna förstår att symbolen kan stå både för ett obekant konstant tal och för ett tal som kan variera. Det kan ingå som en del i en beskrivning av ett mönster, vara en variabel och ett godtyckligt tal.

Eleverna förstår skillnaden mellan numeriska och algebraiska uttryck. Genom att variera uppgifter som tar upp numeriska och algebraiska uttryck, till exempel

$$27 - 3 \text{ och } 27x - 3 \quad \text{eller} \quad 5 - 5 \text{ och } 5xy - 5x$$

kan man ge eleverna erfarenheter som hjälper dem att undvika att övergeneralisera aritmetiska beräkningar och skriva att $27x - 3 = 24x$ eller att $5xy - 5x = y$.

Upptäcka behovet av algebraisk notation som en naturlig och användbar konsekvens av att uttrycka generaliseringar samt att sätta in i formler. Ni kan exempelvis använda följande uppgift:

Man beräknar ofta medicindosen för ett barn utifrån doseringen för en vuxen. I en broschyr finns en regel för hur man ska räkna på barndoseringar.

$$\text{Mängden barnmedicin} = \frac{\text{mängden vuxenmedicin} \cdot \text{barnets ålder i år}}{(\text{barnets ålder i år} + 12)}$$

Här är regeln angiven i en blandning av ord och matematiska symboler (plus, likhetstecken, bråkstreck). En vanlig instruktion kan bli för lång och en beskrivning med bara bokstavssymboler kan bli svår att förstå. I en översättning från ord till bokstavssymboler kan ovannämnda beskrivning vara ett bra mellanled.

- Skriv en räkneberättelse om medicindosering för barn, som med ord beskriver vad kortformen ovan uttrycker.
- Välj bokstavssymboler för barnets ålder, för mängden medicin som barnet skall ha och för mängden medicin som den vuxne skall ha. Skriv regeln för hur du skall beräkna medicindoseringen för barn med bokstavssymboler.
- En vuxen persons medicindos är 50 ml. Hur mycket medicin av samma slag skall ett tre år gammalt barn ha? Ett sju år gammalt barn?

- Varför tror du att man tar hänsyn till barnets ålder då man beräknar hur mycket medicin det skall ha? Varför skall inte vuxna ha olika mängd medicin beroende på ålder?
- Hur tror du att man kommit fram till regeln för medicinering av barn?
- Diskutera uppgiften med din kamrat. Kom överens om vad ni menar.

Om alla elever ska få en bred erfarenhet av att använda ord muntligt och skriftligt, blir pararbete och arbete i mindre grupper naturliga arbetsformer. Om eleven har arbetat i grupp blir det dessutom lättare att delta i helklassdiskussioner. Det är då gruppen och inte den enskilde eleven som står för ett visst förslag eller en viss uppfattning.

Referenser

Olteanu, C. (2007). *Vad skulle x kunna vara?: andragradsekvation och andragradsfunktion som objekt för lärande*. [Doktorsavhandling, Umeå universitet].