

Ekvationslösningsresonemang

Lucian Olteanu, Linnéuniversitetet

Ekvationslösningsresonemang involverar användning av matematikens begrepp och metoder samt utveckling och utvärdering av matematiska argument, till exempel att motivera varför man använder en viss metod eller att motivera varför en utförd beräkning är korrekt. En viktig aspekt i utvecklingen av elevernas ekvationslösningsresonemang är att utveckla förmågan att operera med ett obekant element som om det vore bekant. Detta innebär förståelse för och hantering av matematiska symboler samt möjligheten att kunna använda dem på rätt sätt och i olika sammanhang.

Det finns olika faktorer som kan bidra till att eleverna utvecklar ett ekvationslösningsresonemang, såsom: problemlösning; användning av olika representationer; deduktivt och induktivt resonemang; korrekt användning av det algebraiska språket; användning av begreppskunskap. Detta inkluderar att inse skillnader mellan gissningar och välgrundade påståenden. Under senare år har man riktat allt större uppmärksamhet mot att den mest färdighetsinriktade delen av ekvationslösning kombineras med en grundläggande förståelse av ingående begrepp och procedurer. Det handlar framför allt om

- förståelse av begreppet obekanta
- förståelse av likhetstecknet
- förståelse av och färdighet i tillämpningen av reglerna för ekvationslösning
- förmåga att översätta mellan situationer i verkligheten och beskrivningar av ekvationer som kan uppnås tack vare de verkliga situationerna

I denna text är fokus på att presentera olika formella metoder för att lösa en ekvation samt på att uppmärksamma betydelsen av de bärande idéerna i ett ekvationslösningsresonemang.

Ekvationslösningsresonemang (enskild uppgift)

Att föra ett resonemang innefattar att själv eller tillsammans med andra till exempel testa, föreslå, förutsäga, gissa, ifrågasätta, förklara, finna mönster, generalisera, argumentera. Ekvationslösningsresonemang kan till exempel utgöras av formella skriftliga argument för att lösa en ekvation, där resonemanget består av logiska

slutsatser utifrån givna definitioner, axiom och satser. I första delen av texten har du som lärare möjlighet att reflektera över vilket resonemang du använder för att lösa följande ekvationer:

$$x + 5 = 9 \quad (1)$$

$$2x + 5 = 13 \quad (2)$$

$$2x + 5 = 4x - 3 \quad (3)$$

$$3(2x + 5) - 26 = 4x - 3 \quad (4)$$

Reflektera över följande:

- Hur resonerar du för att lösa dessa ekvationer? Vilka aspekter urskiljer du? Finns det några likheter/skillnader mellan aspekterna som du urskiljer? Hur förklarar du detta?
- Har du överfört de kunskaper som du använde i lösningen av ekvation 1 till att lösa ekvation 2, 3, 4?
- Varför har ekvationerna samma lösning?
- Vilka aspekter kan vara kritiska för att eleverna ska kunna föra ett ekvationslösningsresonemang?

Att utveckla och utvärdera matematiska argument

En ekvation av första graden har en geometrisk tolkning. Lösningen till ekvationen $ax + b = 0$ motsvarar x -koordinaten till skärningspunkten mellan grafen och funktionen $f(x) = ax + b$ och x -axeln, det vill säga i punkten där $f(x) = 0$. Användningen av den geometriska tolkningen kräver att lärare och elever resonerar tillsammans om den trippla betydelsen av x (se Figur 1), nämligen att bokstaven x står för:

- a) den obekanta i ekvationen (algebra)
- b) variabeln i funktionen (matematisk analys)
- c) x -koordinaten till skärningspunkten i det geometriska planet (geometri)

Figur 1

Ekvation – geometrisk tolkning

Matematisk analys

funktion:
 $x \mapsto x + 3$
 f

$$f(x) = x + 3$$

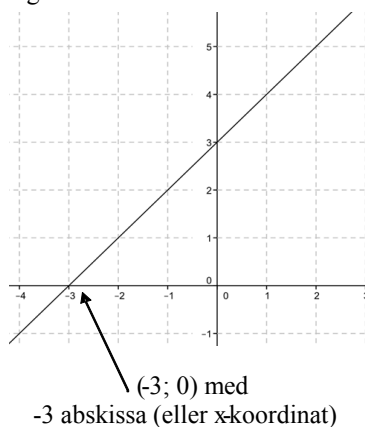
Algebra

ekvation:
 $x + 3 = 0$

$$\text{dvs } f(x) = 0$$

Geometri (analytisk)

grafen till funktionen:



Man kan använda funktioner för att hitta lösningen till en ekvation, men lärare behöver betona att en och samma bokstav kan ha olika innebörder beroende på sammanhang och problemtyp, annars kan eleverna uppleva ekvationerna som en enda röra. I en ekvation står bokstaven x för ett eller flera bestämda men okända tal, medan den i en funktion används för att beskriva en relation mellan storheter där x är den oberoende och $f(x)$ den beroende variabeln. Om obekanta förekommer på olika ställen i en ekvation som i ekvationen $2x - 3 = 5x + 7$, så kan man rita grafen för två funktioner. I detta fall motsvarar lösningen till ekvationen x -koordinaten till skärningspunkten mellan dessa två funktioner.

Många studier om hur elever uppfattar bokstavssymboler i matematik har visat att det finns stora svårigheter framförallt när det gäller att se en bokstav som beteckning för en variabel när den används i en formel som beskriver en funktion. Dessa oklarheter i uppfattningar speglas i hur elever löser problem där algebraiskt symbolspråk måste användas samt i hur eleverna använder algebraiska objekt (konceptuella eller procedurella).

Motivera val av metod eller varför en utförd beräkning är korrekt

För att föra ett ekvationslösningsresonemang behöver eleverna utveckla och utvärdera matematiska argument, till exempel att motivera varför man använder en viss metod eller att motivera varför en utförd beräkning är korrekt. Nedan presenteras några metoder som kan användas för att utveckla elevernas ekvationslösningsresonemang samt fördelar och nackdelar med varje metod.

Annuleringsmetoden (Balansmetoden)

Den klassiska balansmodellen bygger på jämvikten som ska råda på en vågskål.

Ekvationen $3x + 2 = 2x + 3$ kan representeras i denna modell såsom på bilden:



För att lösa denna ekvation kan vi resonera på följande sätt:

I den vänstra vågskålen placerar vi 3 paket med okänd vikt och 2 paket med enkilosvikt och i den högra 2 paket med okänd vikt och 3 med enkilosvikt. Balansvågen är i jämvikt. Om vi tar bort 2 paket med okänd vikt från den högra vågskålen, kommer vågen inte längre att vara i jämvikt. För att den åter ska väga jämnt, måste vi också ta bort 2 paket med okänd vikt från den vänstra vågskålen. Vi har nu fått paketet med den okända vikten ensamt i den ena vågskålen. Om vi tar bort 2 paket med enkilosvikt från den vänstra vågskålen, kommer vågen återigen att inte vara i jämvikt. För att den åter ska väga jämnt, måste vi också ta bort 2 paket med enkilosvikt från den högra vågskålen. Vi har nu fått paketet med den okända vikten ensamt i den ena vågskålen. Lösningen till ekvationen är $x = 1$.

I detta resonemang är det viktigt att lyfta fram att jämvikten som behålls i lösningsprocessen har ekvivalens mellan ekvationer som grund. Den största begränsningen av balansmodellen är dess tillämplighet på ekvationer som har negativa lösningar. Detta innebär att resonemanget begränsar elevernas förmåga att använda denna princip i olika kontexter, det vill säga att uppleva en ekvationsstruktur.

Matematiska resonemang kan till exempel utgöras av formella skriftliga bevis för matematiska påståenden där resonemanget består av logiska slutsatser utifrån givna definitioner, axiom och satser. Annuleringsmetoden är en utvidgning av balansmodellen och består av logiska slutsatser utifrån fyra egenskaper av likhetstecknet som avser addition, subtraktion, multiplikation och division. Annuleringsmetoden kan användas i olika varianter. Dessa exemplifieras nedan genom att använda följande ekvation:

$$2x + 5 = 9$$

Variant 1

- $2x + 5 - 9 = 0$ subtrahera 9 i ekvationens vänstra led
- $2x - 4 = 0$ förenkling
- $2(x - 2) = 0$ användning av distributiva lagen

För att produkten ska vara noll måste minst en av faktorerna vara lika med noll. Detta ger att $x - 2 = 0$ eftersom 2 inte kan vara lika med noll.

- Ekvationens lösning är: $x = 2$.

Variant 2

- $2x + 5 - 5 = 9 - 5$ subtrahera båda leden med 5
- $2x = 4$ förenkling
- $x = 2$ dividera båda leden med 2

Annuleringsmetoden kan användas för att lösa vilken förstgradsekvation som helst, det vill säga denna metod kan användas i olika sammanhang.

Överflyttningsmetoden

Man kan dra vissa logiska slutsatser (som kan bevisas med hjälp av inversa operationer) om man löser en ekvation genom att använda sig av överflyttningsreglerna. Man brukar också säga att man flyttar över termer från ena sidan till den andra genom att:

- byta tecken (man betraktar subtraktionen som addition)
eller
- byta till inversa operationer (om man inte betraktar subtraktionen som addition)

Syftet är att separera x -termer och konstanttermer.

Obs! Man flyttar inte över någon term utan en faktor.

Användningen av att ”flytta över” används vid lösning av ekvationer utan att resonera med eleverna om vad det är som händer i processen och vilka satser/regler som används i detta resonemang. Kieran (1992) påpekar att överflyttningsmetoden kan erfaras på ett helt annat sätt av eleverna genom enoreflekterad tillämpning av minnesregler. Trots att metoden är en kortare och snabbare version av annuleringsmetoden är det viktigt att börja med att utveckla elevernas förmåga att se ekvationernas ekvivalensstruktur. När eleverna urskiljer strukturen i en ekvation kan överflyttningsmetoden användas. Dessutom är det viktigt att bygga ett resonemang utifrån annuleringslagarna.

En lösning av ekvationen $2x - 3 = 5x + 7$ med hjälp av överflyttningsmetoden kan exempelvis se ut på följande sätt:

- separera termerna med obekanta på ena sidan (t.ex. höger) genom att flytta över $2x$ till höger och 7 till vänster (vi byter tecken efter överflyttning): $-3 - 7 = 5x - 2x$
- beräkna $-3 - 7$ och $5x - 2x$ (dvs. reducera likformiga termer): $-10 = 3x$

- dividera med koefficienten till den obekanta (3): $-\frac{10}{3} = x$

Den geometriska modellen

Den geometriska modellen kan användas för förstgradsekvationer på formen $ax + b = cx$ eller andragradsekvationer. Denna ekvation kan tolkas på följande sätt:

en rektangel med längden a och bredden x , och därmed arean ax , och en rektangel med area b som adderas har samma area som en rektangel med längden c och bredden x

Fördelen med den geometriska modellen (areamodellen) är att den visualiserar och ger konkret betydelse till algebraiska ekvationer, men den har några nackdelar. Precis som i balansmodellen begränsas den konkreta innebörden till positiva värden (magnituder eller positiva storlekar). Dessutom är det inte en lämplig metod för de elever som har en svag geometrisk bas.

Forskarna (t.ex. Filloy & Sutherland, 1996) påpekar att automatisering i både balans och areamodellen leder till felaktigheter som förknippas med den algebraiska syntaxen, nämligen att lägga till eller subtrahera termer av olika grad. Exempelvis brukar eleverna i ekvationen: $4x - 2 = x - 1$, skriva: $4x + x = -1 - 2$. Eleverna gör samma sak på båda sidorna utan att förstå syftet med att göra detta.

I processen som skapas i klassrummet för att resonera kring en ekvationslösning är det viktigt att du som lärare i förväg reflekterar över vilka frågor som kan ställas till eleverna samt vilka sociomatematiska normer som kommer att råda i klassrummet.

Tänkbara kritiska aspekter och förslag på variationsmönster

Några aspekter som eleverna bör urskilja för att kunna föra ett ekvationslösningsresonemang kan vara:

1: att urskilja ekvivalenta ekvationer (ekvationer som efter omskrivning har samma lösning)

För att eleverna ska kunna urskilja att två eller flera ekvationer är ekvivalenta kan ni behålla ekvationens lösning konstant och variera ekvationens uppkomst.

Till exempel kan eleverna undersöka om $x = 2$ är lösning till följande ekvationer:

$$3x - 1 = 2x + 1$$

$$3x - 2 = 2x$$

$$3x - 2x = 2$$

$$x - 1 = 1$$

En sådan övning ställer krav på elevernas förmåga att resonera kring varför dessa ekvationer har samma lösning samt att urskilja ekvationernas struktur. Resonera tillsammans med eleverna om varför dessa ekvationer är ekvivalenta. Ni kan lyfta fram skillnaden mellan användningen av ”=” och ” $\Leftrightarrow$ ” (ekvivalenstecknet), nämligen att likhetstecknet används för att markera relationen mellan ekvationens högra/vänstra led medan ekvivalenstecknet markerar relationen mellan ekvationer i omskrivningsprocessen.

Ni kan även skapa en variation (kontrast) genom att visa att två ekvationer som inte är ekvivalenta inte har samma lösning.

2: att förstå vad som menas med att skilja ut/separera termerna

Det man alltid strävar efter när man löser förstgradsekvationer är att samla alla x -termerna på ena sida om likhetstecknet, och de fristående konstanttermerna på andra sidan, det vill säga att separera termerna. Det finns ingen regel för vilken sida eller i vilken ordning man gör detta. För att förstå vad som menas med att separera likformiga termer kan ni välja olika kontexter, det vill säga olika ekvationer, i vilka den obekanta förekommer.

$$x + 5 = 9$$

$$2x + 5 = 9$$

$$2x + 5 = 3$$

$$2x + 5 = 4x - 7$$

Eleverna ska inte lösa ekvationerna utan enbart fokusera på att separera termerna genom att använda grundläggande egenskaper av likhetstecknet. Därefter kan ni generalisera processen som används för att separera termerna i en ekvation.

3: att förstå vad som menas med att förenkla/reducera likformiga termer

För att skapa förståelse för vad som menas med att reducera likformiga termer kan ni skapa en variation som har sin grund i aritmetiken, nämligen att ge eleverna möjlighet att uppleva olika mönster inom aritmetiken. Till exempel:

$$3 \cdot 5 + 7 \cdot 5 - 1 = 5 \cdot (3 + 7) - 1 = 5 \cdot 10 - 1 = 10 \cdot 5 - 1$$

$$3 \cdot 6 + 7 \cdot 6 - 1 = 6 \cdot (3 + 7) - 1 = 6 \cdot 10 - 1 = 10 \cdot 6 - 1 \text{ osv.}$$

Därefter kan ni göra följande generalisering:

$$3 \cdot x + 7 \cdot x - 1 = x \cdot (3 + 7) - 1 = x \cdot 10 - 1 = 10 \cdot x - 1$$

På liknande sätt kan det generaliseras att: $7x - 4x + 2 = 3x + 2$

eller att: $7x + 3 - 4x + 2 = 3x + 5$

En annan möjlighet är att ni skapar en variation genom att använda kommutativitet och associativitet. Till exempel:

$$2x + 4 + x + 1 = 2x + x + 4 + 1 = (2x + x) + (4 + 1) = 3x + 5$$

kommutativitet

associativitet

4: att förstå vad som menas med att lösa ut obekanta i enkla ekvationer ($x + a = 0$ och $ax = b$)

För att eleverna ska förstå vad som menas med att lösa ut obekanta i enkla ekvationer krävs att eleverna utvecklar sin uppfattning av likhetstecknets betydelse, nämligen att utgå från en dynamisk uppfattning till en statisk. Med andra ord, att utföra en beräkning så att det som finns på båda sidor om likhetstecknet är lika stort. Ni kan skapa variation genom att använda balansmodellen.

Referenser

Filloy, E., & Sutherland, R. (1996). Designing curricula for teaching and learning algebra. I A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Red.), *International handbook of mathematics education* (Vol. 1, s. 139–160). Kluwer Academic.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. I D. A. Grouws (Red.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 390–419). Macmillan Publishing Co, Inc.