

Talföljder

Anna-Lena Ekdahl, Högskolan i Jönköping

Inom kunskapsområdet algebra har mönster en framträdande plats. Mönster kan uttryckas med bilder, symboler och med tal. Till en början utforskas mönster på ett informellt sätt genom konstruktion, med ord och med egna symboler. Progressionen i undervisning om mönster handlar dels om att möta mönster och talföljder med olika och ökande svårighetsgrader, dels att beskriva och uttrycka talmönstren på olika sätt och i så småningom på ett mer generellt sätt. En fortsatt progression är viktig för att elever i åk 4–6 och 7–9 ska kunna förstå att ett talmönster kan beskrivas med det algebraiska symbolspråket. För att elever ska utveckla sitt algebraiska kunnande behöver de ges rika tillfällen att i olika situationer kommunicera och resonera kring olika talmönster. Elever kommer inte att utveckla sin algebraiska förmåga om de enbart möter talföljder som lösryckta aktivitet eller uppgifter där de på egen hand ombeds komplettera de två, tre följande talen. Det är heller inte tillräckligt att elever endast får möta talföljder vars uppbyggnad innebär att mönstret ökar eller minskar med samma värde och med fokus på mönster i multiplikationstabellen.

Innehållet i denna text syftar på att ge dig som lärare exempel på hur du med hjälp av undervisningen kan utveckla elevernas förmåga att se hur olika talföljder är uppbyggda, kan konstrueras och verbalt kan beskrivas.

Som lärare kan det vara viktigt att känna till något om olika slags talföljder. Nedan ges några korta förklaringar:

- I en **aritmetisk talföljd** har varje nytt tal en ökning med ett konstant värde (t.ex. 3, 6, 9, 12 där skillnaden mellan talen är 3.) I en aritmetisk talföljd kan talen även minska med ett konstant värde (t.ex. 35, 29, 23, 17, _)
- I en **geometrisk talföljd** däremot är kvoten mellan vilket tal som helst och det närmast föregående alltid lika stor. En geometrisk talföljd med kvoten 2 skulle kunna illustreras på följande sätt: 5, 10, 20, 40, 80.

Utöver dessa exempel finns andra slags talföljder med varierad differens. Ett exempel på en sådan talföljd är: 1, 2, 4, 7, 11, _. I denna talföljd ökar skillnaden mellan talen med ett för varje steg.

Ett annat exempel är Fibonaccis talföljd: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, _, _ , där det följande talet är summan av de två föregående talen.

Mönster med tal omfattar även tals egenskaper såsom jämna och udda tal och mönster där talen multipliceras på något sätt. Ett sådant mönster är till exempel följderna av kvadrattal: 1, 4, 9, 16, __. Talen bildas genom att talen 1, 2, 3, 4, multipliceras med sig själva.

Det som skiljer ett upprepat mönster med tal, exempelvis 1, 2, 3, 1, 2, 3, _ från en talföljd är att de numeriska värdena på talen i en talföljd är viktiga, medan detta inte gäller i mönster. I exempelvis mönster 1, 2, 3, 1, 2, 3 kan talen bytas ut mot bokstäver. A, B, C, A, B, C eller mot former $\circ\triangle\circ\triangle\circ\triangle$ och ändå fräntas inte mönstret sin struktur.

Det är viktigt att eleverna inte endast möter talföljder i en lärobok, som en isolerad aktivitet där det egentligen endast krävs att talföljden ska färdigställas. Oftast är talföljder i läroböcker dessutom uppbyggda med en konstant skillnad och leder nästan alltid till en entydig lösning, vilket i stor utsträckning bidrar till att eleven antingen ser strukturen, vilket ger rätt svar, eller inte ser strukturen vilket ger fel svar. Det är betydligt enklare för elever att fortsätta ett mönster än att själv beskriva det. Däremot blir det svårare när aktiviteten är utformad så att eleven ska beskriva talföljdens regelbundenhet för läraren eller klasskamraterna. Flera forskare betonar just den språkliga aspekten i samband med mönster. När elever sätter ord på mönstrets regelbundenhet utvecklar de sin kommunikativa förmåga liksom sin förmåga att se mönstrets uppbyggnad, något som på sikt möjliggör utvecklingen till mer algebraiska beskrivningar. Man har även sett att elever har betydligt lättare att verbalisera sina beskrivningar än att uttrycka dem i skrift.

Klassrumsexempel

För att få en inblick i hur elever i årskurserna 1–3 tar sig an talföljder, kan vi titta på en engelsk studie med drygt 300 elever mellan 7 och 11 år (Hargreaves m.fl., 1998). Man såg att eleverna använde ett antal strategier för att fortsätta olika talföljder och beskriva talföljderna med ord. Med de olika strategierna kunde eleverna förstå talföljdens egenskaper och regelbundenhet.

De strategier som eleverna använde i undersökningen var:

- söka efter skillnader mellan talen (t.ex. i talföljden 2, 5, 8, 11, 14 är skillnaden 3)
- söka efter differensen mellan skillnaderna (t.ex. i talföljden 2, 4, 7, 11, 16 ökar skillnaden med 1)
- söka efter multiplikationstabeller (t.ex. 3, 6, 9, 12 även samband med 4, 7, 10, 13)
- söka efter talens egenskaper (t.ex. udda och jämna tal)

- söka efter egenskapen i skillnaden (t.ex. i talföljden 2, 5, 10, 17, 26 tittar man efter skillnaden men ser att den inte är lika och letar istället efter andra egenskaper såsom udda och jämna tal)
- kombinera tal för att skapa andra tal (t.ex. i talföljden 2, 5, 7, 12, 19)

Vissa elever använde sig av strategierna på ett flexibelt sätt, medan andra tog första bästa strategi eller förlitade sig enbart på en strategi. Flexibiliteten i strategival ökade med stigande ålder, men det framkom tydligt att även många av de äldre eleverna använde ett begränsat antal strategier. En förklaring var att eleverna saknade erfarenheter av talföljder med varierande uppbyggnad. Dessa resultat visar att det är viktigt att lärare i undervisningen låter elever möta talföljder uppbyggda med olika strukturer. Ett exempel på hur det kan iscensättas är att låta eleverna få möta mer öppna talföljder som endast innehåller de två första talen. En sådan uppgift kan se ut så här:

Fortsätt följande talföljd 1, 4, _ , _ , _

Eleverna kan i det fallet upptäcka flera möjliga fortsättningar på talföljden och sålunda blir regelbundenheten och mönstret olika. Sedan uppmanas de förklara vilken regel som ligger till grund för respektive talföljd. Genom att vara med och skapa talföljder ges eleverna möjlighet att upptäcka vad som kännetecknar olika slags talföljder.

I den engelska studien (Hargreaves m.fl., 1998) som beskrevs ovan användes ett arbetsblad för att få eleverna att sätta ord på hur de har gått tillväga för att lösa talföljden. Bladet såg ut ungefär så här:

Lös följande talföljd:

Berätta om talföljden:

Vilken regel gäller för talföljden?

Berätta hur du tänkte och vad du såg när du kom på regeln.

För att göra en sådan aktivitet behöver du välja ut talföljder med lämplig svårighetsgrad. Eftersom eleverna uppmanas att beskriva regeln och även tänkandet som förekommer regeln kan du få värdefull kunskap om de strategier eleverna använder och med vilken kvalitet de beskriver den presenterade talföljden. Eleverna ges i aktiviteten möjlighet att utveckla sin förmåga att kommunicera och resonera kring talföljdens struktur.

För att ta reda på elevens kunskaper behöver du ta reda på vad för slags mönster eleven ser. Det är inte tillräckligt att konstatera att eleven kan eller inte kan fortsätta ett mönster. Det är inte heller självklart att eleven ser de mönster som läraren vill att eleven ska se. I ett talmönster behöver eleven se hur talen förhåller sig till varandra och hur de förhåller sig till helheten. Tänkbart kan vara att eleven tar fasta på relationen mellan vissa tal men inte mellan alla tal.

Så här kan en elev i årskurs 3 uttrycka sig gällande frågan om vilken regel som används till följande talföljd: 1, 4, 8, 13, 19, __, __

Jag tror du har tagit 4 ... mer ... bara en chans...

Om du skulle göra något mer än att chansa och tittar lite mer på talen...

Nej, det var svårt ... 5 blir det kanske ... i alla fall 5 där. (Pekar mellan talen 8 och 13).

Efter en stunds tystnad säger eleven:

Det kanske blir... 13 ... Jo det är 5 där också (pekar mellan talen 13 och 19). Du har tagit 5 mer.

En tänkbar förklaring är att eleven först ser ett bekant samband mellan 4 och 8. Eleven har erfarenheter av att 8 är dubbelt så mycket som 4, alternativt att skillnaden mellan 4 och 8 är 4. Eleven vet hur dessa tal förhåller sig till varandra. Därefter väljer eleven två nya tal (8 och 13) som ställs i relation till varandra och ser då med viss tveksamhet att det är 5 mellan dessa två tal och även mellan 13 och 19 (vilket inte stämmer). Eleven bortser i det skedet från den skillnad 4 som identifierades tidigare.

Det som skulle kunna vara kritiskt för elevers förmåga att konstruera och beskriva olika slags talföljder hör samman med elevernas tidigare erfarenheter av arbete med dessa. Utifrån ovanstående resonemang kan man tänka sig att eleverna, om de ska ges förutsättningar att utveckla denna förmåga, behöver ges möjlighet att till exempel urskilja nedanstående delar av innehållet i undervisningen. Därmed inte sagt att dessa aspekter är kritiska just för de elevgrupper ni undervisar.

Tänkbara kritiska aspekter

1. Upptäcka att talen i en talföljd har numeriska värden och är ordnade efter en viss regelbundenhet, i motsats till lösryckta tal i ett "kaos" eller som i ett upprepat mönster där mönstret kan bestå av former, bokstäver eller tal.
2. Se att talföljder inte alltid är uppbyggda på samma sätt med en konstant skillnad. Det betyder att man måste se att skillnaden mellan talen ibland är konstant, ibland ökar och att även andra samband kan finnas mellan de ingående talen ibland.
3. Se att talföljden fortsätter med samma regelbundenhet utöver de streck eller tomma luckor som finns angivna i uppgiften. Det betyder att eleven behöver urskilja att talen i en talföljd som exempelvis 1, 2, 4, 7, 11, __, __ fortsätter med samma regelbundenhet utöver den angivna sekvensen, även efter att man fyllt i de två tal som fattas.
4. Urskilja talens inbördes relation och hur dessa förhåller sig till hela talföljden. Talen i sekvensen måste urskiljas samtidigt som helheten, inte nödvändigtvis samtliga tal men tillräckligt många för att se en regelbundenhet. Det är med andra ord inte tillräckligt att urskilja en mindre del av talföljden eller exempelvis de sista två talen för att se mönstrets uppbyggnad.

Betrakta talföljden: 1, 2, 4, 7, 11, 16, __, __ där skillnaden mellan talen ökar med ett för varje tal (1 (+1), 2(+2), 4(+3), 7(+4), 11(+5), 16(+6)). Om en elev i möte med den talföljden endast ser vad som händer mellan de två sista talen 11 och 16 kan talföljden missuppfattas och fortsättas med en konstant skillnad med 5: 1, 2, 4, 7, 11, 16, 21, 26, __

Utifrån klassrumsexemplen som presenterats ovan erbjuds flera möjligheter att ställa frågor som möjliggör utveckling av elevernas förmåga att konstruera och beskriva olika talföljder.

Referenser

Hargreaves, M., Shorrocks-Taylor, D., & Threlfall, J. (1998). Children's strategies with number patterns. *Educational Studies*, 24(3), 315–331.
<https://doi.org/10.1080/0305569980240305>