

Algebra, åk 1–3

Den här modulen fokuserar på reflektionens betydelse för hur ni i lärargruppen kan utveckla ett professionellt förhållningssätt till undervisning av algebra i årskurserna 1–3.

Modulen är uppdelad i åtta delar som behandlar ett antal didaktiska perspektiv inom matematikundervisning. Rubrikerna på delarna ger en kort sammanfattning av det didaktiska perspektiv som är huvudfokus i respektive del. Modulen har kompletterats med två texter som handlar om programmering, dessa finns i del 5 och del 7. Dessa texter och aktiviteter kan läsas och genomföras fristående från delens övriga innehåll.

Modulen består av följande delar:

1. Reflektion som lärprocess
2. Resonemangsförmåga
3. Bedömning för utveckling av undervisning i algebra
4. Interaktion i algebraklassrummet
5. Algebra och programmering som språk
6. Sociomatematiska normer
7. Kommunikation och programmering i algebraklassrummet
8. Algebraiskt tänkande

De didaktiska perspektiven som genomsyrar modulen kommer att användas tillsammans med två områden som är av betydelse för elevernas lärande i algebra, nämligen: mönster och talföljder samt likheter och olikheter. I modulen ges förslag på uppgifter och aktiviteter baserade på det algebraiska innehållet. Under arbetet med algebramodulen kan ni använda "Mall – Planering av lektion" för att planera era lektioner" och "Lektionsobservation – Protokoll" för att dokumentera genomförandet av era lektioner. I filmen "Variationsteori" presenteras två viktiga begrepp som ligger till grund för innehållet i modulen. Dessa begrepp är kritiska aspekter och variationsmönster.

Ansvariga för modulen

Linnéuniversitetet, i samarbete med Göteborgs universitet, Blekinge Tekniska Högskola och Högskolan i Jönköping.

Del 3. Bedömning för utveckling av undervisning i algebra

I den här delen kommer ni att arbeta med bedömningsfrågor. Målet är att utveckla er förmåga att avgöra delar av innehållet som kan vara kritiska för elevernas lärande.

Utifrån förutsättningar som ni har i era klasser och på er skola kommer ni att arbeta med intervju som verktyg för att få syn på elevernas kunskaper och utifrån dessa planera er undervisning. Som stöd ges förslag på uppgifter som kan användas för intervju samt en mall för resultatens sammanställning.

Del 3: Moment A – individuell förberedelse

Läs

Genom att läsa texten om "Bedömning i matematikklassrummet" kommer ni att få en allmän bild av bedömningsfrågor och bedömningsprocessen.

I texten "Intervju" beskrivs det hur ni kan få syn på vad som kan vara kritiskt för elevernas lärande. Dessutom ges förslag på sammanställning av intervjuer för att kunna dokumentera information om elevernas kunskaper.

Det algebraiska innehållet presenteras i texten "Talföljder".

Se film

Filmen "En lektion om mönster" visar hur läraren kan skapa förutsättningar för formativ bedömning i syfte att stödja elevers lärande i algebra. Filmen "Generalisering" har du sett i del 2, men denna gång ska du titta på filmen och observera frågornas betydelse för att eleverna ska få möjlighet att uttrycka sina kunskaper. Du ska också försöka se vilka aspekter eleverna urskiljer.

Material



Bedömning i matematikklassrummet

A.-L. Ekdahl och C. Olteanu



Intervju

C. Olteanu och A.-L. Ekdahl



Talföljder

A.-L. Ekdahl



En lektion om mönster

Filformatet kan inte skrivas ut.

Skolverket



Generalisering

Filformatet kan inte skrivas ut.

Skolverket

Bedömning i matematikklassrummet

Anna-Lena Ekdahl, Högskolan i Jönköping och Constanta Olteanu, Linnéuniversitetet

Bedömning är inget nytt fenomen och har i större eller mindre utsträckning alltid använts i matematikklassrummet, men däremot har betydelsen av formativ bedömning aktualiserats de senaste åren. Forskningsresultat visar att just den formativa bedömningen som sker dagligen i klassrummet ger positiva effekter på elevers lärande.

Att bedöma det som händer i klassrummet är en viktig del av lärarens vardag. Man kan endast bedöma den kunskap eleven ges möjlighet att visa. Därför är det viktigt att skapa lärandesituationer där eleven ges chans att visa vad han eller hon kan och dessutom möjlighet att visa det på olika sätt. Det kan exempelvis handla om att visa sin kunskap i handling, med material, med bilder, med symboler och med ord.

I bedömningssammanhang är syftet en central fråga, det vill säga vad läraren ska använda bedömningen till och hur den ska utformas för att i möjligaste mån gynna det syfte som avses med undervisningen.

Bedömningsprocesser och nyckelstrategier

Det som kännetecknar formativ bedömning är att fler aktörer finns att tillgå i klassrummet. Dessa aktörer är läraren, klasskamraterna och eleven själv. Alla behöver samverka för att skapa en god och effektiv undervisning. I en formativ bedömningsprocess finns tre viktiga frågor:

- Vart ska vi/eleven?
- Var är vi/eleven nu?
- Hur tar vi oss dit?

Wiliam (2011) presenterar fem nyckelstrategier som kan tas som utgångspunkt och användas för formativ bedömning i matematikklassrummet.

- Klargör och delge mål och kriterier för framgång.
- Skapa effektiva klassrumsdiskussioner och andra lärandesituationer som också ger belägg för elevernas kunskande.
- Ge eleverna effektiv återkoppling som för dem framåt i sitt lärande.
- Aktivera eleverna som resurs för varandra i lärandet.

- Gör eleverna aktiva som ägare av sitt eget lärande.

Nyckelstrategier för bedömning av algebra i klassrummet

Med utgångspunkt i de tre frågorna (Vart ska vi/eleven?; Var är vi/eleven nu?; Hur tar vi oss dit?) och med fem nyckelstrategier, som kommer att presenteras nedan, ges förutsättningar för formativ bedömning i syfte att stödja elevers lärande i algebra.

Nyckelstrategi 1

I den första nyckelstrategin är du, eleven och klasskamraterna delaktiga. Du som lärare behöver tydliggöra och delge vad eleverna ska lära sig. Med andra ord söka svar på frågan:

Vart ska vi/eleven?

Eleverna behöver delges syftet med algebraundervisningen. Ni behöver exempelvis konkretisera för eleverna vad som menas med att kunna hantera matematiska likheter och använda likhetstecknet på ett fungerande sätt i slutet av årskurs 6. För att uppnå detta kan eleverna exempelvis få se skillnader i kvaliteter mellan olika elevarbeten och på så sätt öka elevernas medvetenhet för vad som krävs för att de ska lyckas med sitt lärande.

I denna process behöver eleverna vara delaktiga i diskussioner om bedömningsexempel som visar olika slags kvaliteter.

Nyckelstrategi 2

Utifrån det uppställda målet behöver en kartläggning göras över var eleverna befinner sig i förhållande till det som ska läras. Bedömningen kan ha olika syften. Detta ställer krav på att du skapar situationer där eleverna ges möjlighet att aktivt visa sina kunskaper. Här kan frågan

Var är vi/eleven nu? besvaras.

Under en lektion har du också möjlighet att bedöma på vilket sätt eleverna tar till sig innehållet som behandlas i klassrummet. Hodgen och Wiliam (2012) framhåller att lärares förmåga att skapa goda lärandesituationer där eleverna får möjlighet att kommunicera i klassrummet är avgörande för att främja formativ bedömning. De betonar att frågor som man ställer under matematiklektionen ska:

- vara färre, men mer genomtänkta
- möjliggöra olika elevsvar
- bestå av utvecklande följdfrågor som formuleras i förväg

När du använder mer öppna och utredande frågor ges eleverna möjlighet att göra längre inlägg och lyssna på klasskamraters resonemang samt jämföra dem med sina egna. På så

vis görs eleverna till aktiva resurser för varandras lärande, något som även är signifikant för den fjärde nyckelstrategin. När du lyssnar mer på eleverna märker de att du är intresserad av det de har att säga. Genom att du själv pratar mindre, får du mer tid att tänka över nästa steg eller nästa följdfråga i samtalet.

Den gemensamma klassrumsdiskussionen kring olika delar av innehållet ger viktig information om sådant som du eventuellt tagit för givet att eleverna har förstått. I denna diskussion är det bra om läraren varierar innehållet (dvs. de delar av innehållet som är svåra för eleverna) för att ett specifikt algebraiskt begrepp ska bli synliga för eleverna.

Den information som framkommer i den gemensamma diskussionen kan betraktas som en informell bedömning och är värdefull för planeringen av den fortsatta undervisningen och för återkopplingen till den enskilde eleven eller elevgruppen. I sammanhanget är det också värt att fundera över hur informationen som framkommer i klassrumsdiskussionerna kan dokumenteras för att utgöra ett underlag för undervisningsplaneringen.

Exempel

Genom att exempelvis låta eleverna ha en egen miniwhiteboard där de skriver svaret på dina ställda frågor möjliggörs det/ställs det krav på att fler elever aktivt visar sitt kunnande. Ett annat sätt är att låta alla elever ha en uppsättning kort med bokstäverna A – D. När du presenterar en uppgift med alternativsvar betecknade med A, B, C, D ges alla elever möjlighet att ta ställning till vilket alternativ de anser vara rätt eller vilken utsaga som stämmer. Du kan snabbt få en överblick över klassens svar på gruppnivå. Elevsvaren kan också visa vilka uppgifter, begrepp eller samband som visade sig vara svåra och som du behöver lyfta fram på ett annat sätt i undervisningen. Ett konkret exempel på en sådan uppgift är:

Uppgift: Vilket eller vilka av följande uttryck är inte en likhet?

- A. $8-5 = 5-2$
- B. $30-10 = 0+20$
- C. $20+7 = 27-1$
- D. $8 = 10-2$

Här kan du även ställa frågor om hur en annan elev som valt ett annat alternativ kan ha tänkt. Wiliam (2011) betonar att uppgifter med flera svarsalternativ endast till viss del ger läraren information om elevernas kunskaper inom det som uppgiften prövar. När elever endast väljer ett svar i alternativuppgifter får du inte tillräckligt med information om hur de förstår ett visst algebraiskt begrepp. Utifrån ett formativt perspektiv behöver

du därför höra mer om hur elever resonerat utifrån alternativen, vilka överväganden de gjort och vilka motiv de haft för sina val, till exempel frågor som varför/varför inte?

Informationen om elevernas kunskande hjälper dig att ta de beslut som krävs för att ändra din undervisning och bättre möta elevernas behov i sitt fortsatta lärande inom algebra. Att använda uppgifter med flera svarsalternativ kan dock vara en väg att kartlägga områden som behöver utvecklas ytterligare.

Nyckelstrategi 3

Den tredje nyckelstrategin handlar om återkoppling och knyter an till frågan:

Hur tar vi oss dit?

Strategin ställer krav på att du har en effektiv återkoppling i dialoger med eleverna. En återkoppling som för elevers lärande framåt. Vad menas då med effektiv återkoppling? För att återkopplingen ska ses som formativ och effektiv behöver den förstås och kunna användas av eleven för att utveckla sina förmågor eller nå ett uppsatt mål. Den ska ha fokus på vad som är nästa steg eller mål istället för att enbart fokusera på hur ”bra eller dåligt” en arbetsprestation genomförts. En effektiv återkoppling ska också leda till att eleverna utmanas tankemässigt eftersom de behöver vara aktiva och ta ansvar för sitt eget lärande. Återkoppling i sig är ingen garanti för en formativ bedömning. Det beror på hur den är utformad.

I vissa bedömningssammanhang görs skillnad mellan feedback, feed-up och feed-forward (Hattie & Timperley, 2007). Där feedback åsyftar en bedömning av lärandet, det vill säga vad eleven har gjort eller visat för kunskap vid ett specifikt tillfälle. Feed-up står i relation till aktuella mål. Den handlar om vad som är målet eller nästa steg. Slutligen feed-forward som är framtidsytande och fokuserar på hur eleven ska arbeta vidare. Den har en mer formativ karaktär där delar av innehållet som eleven tidigare inte uppmärksammat ska lyftas fram så att de utvecklar sin kunskap ytterligare.

Exempel

En återkoppling som innefattar en handling av läraren men även en handling eller tänkande av mottagaren kan exemplifieras enligt följande: Istället för att markera ett elevarbete med ett antal rutinuppgifter med rätt eller fel, uppmanar du eleven att exempelvis hitta de tre uppgifterna som är fel, markera dem och försöka finna de rätta svaren.

Nyckelstrategi 4

För att den formativa bedömningen ska utvecklas i undervisningen behöver klassrummets olika aktörer, du som lärare, klasskamraterna och eleven själv vara delaktiga. På så vis görs eleverna till aktiva resurser för varandra i matematiklärandet,

vilket i sin tur hänger samman med hur du lyckas skapa de effektiva lärandesituationer som beskrivs i den andra nyckelstrategin.

Exempel

Ett sätt kan vara att låta elever välja ut några uppgifter i algebra från en lärobok för att sedan låta dem motivera varför en uppgift upplevs som svår eller enkel. Eftersom elever inte upplever samma uppgifter som svåra kan det vara en idé att elevgrupperna får presentera vilka uppgifter de valt och argumentera för valet. På så vis stödjer eleverna varandra i sina förklaringar och sina resonemang. Elevernas aktiva medverkan och stöd för varandra i lärandet kan även handla om att underlätta för de elever som inte vågar ställa frågor inför hela klassen. Detta är bättre än att i slutet av en lektion, i exempelvis ekvationslösning, ställa den allmänna frågan:

Har ni någon fråga?

Istället kan följande sägas:

Tänk efter i gruppen som ni sitter i, vad har ni för frågor? Skriv ned frågorna!

På så vis vänder du dig till gruppen. Eleverna tar hjälp av varandra och ingen enskild elev behöver visa sin okunskap inför klassen (William, 2011). Sammanfattningsvis kan man säga att denna nyckelstrategi ställer stora krav på samtliga aktörer i matematikklassrummet.

Nyckelstrategi 5

Den femte nyckelstrategin innebär att eleven ges möjlighet att själv reflektera över förmågor och kvaliteter i sitt kunnande. Denna reflektion kan ske när eleven tar del av andras arbeten och resonemang. Självreflektion och självbedömning kan företrädesvis användas under en arbetsprocess istället för som avslutning på processen. Då ges eleverna möjlighet att reflektera över vad de känner sig osäkra på och behöver stöd för att utveckla.

Exempel

Ett sätt att arbeta med självbedömning är att i början av ett valt innehåll låta eleverna beskriva ett av de centrala begreppen inom innehållet som de arbetar med. Eleven gör samma sak efter att arbetet är avslutat och sedan ges tid att reflektera över förändringen i sitt eget kunnande. Ett annat sätt är att låta eleverna dokumentera och formulera sina egna förklaringar av de algebraiska begreppen i en loggbok.

Sammanfattningsvis kan man säga att för att skapa en lärandemiljö som främjar elevernas aktiva deltagande och ansvarstagande för sitt eget lärande behöver du enligt William (2011) göra följande:

- delge målen för undervisningen för eleverna, för att de själva ska kunna följa sina framsteg
- förmedla en inställning som säger att en förmåga alltid kan utvecklas
- försök att hitta sätt som gör det svårt för eleverna att jämföra resultat med varandra
- ge återkoppling som fokuserar på framåtsyftande handlingar
- försök att finna sätt att förflytta kontrollen av lärandet från dig till eleverna för att på så vis stödja eleverna i att utveckla ansvaret för sitt eget lärande

Formativ bedömning är inte enkel att genomföra, men ett litet steg i rätt riktning leder till förändring.

Referenser

Hattie, J., & Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research*, 77(1), 81–112. <https://doi.org/10.3102/003465430298487>

Hodgen, J., & Wiliam, D. (2012). *Mathematics inside the black box – Bedömning för lärande i matematikklassrummet*. Stockholms universitets förlag.

Wiliam, D. (2011). *Embedded formative assessment: Strategies for classroom Assessment that drives student engagement and learning*. Solution Tree Press.

Intervju

Constanta Olteanu, Linnéuniversitetet och Anna-Lena Ekdahl, Högsolan i Jönköping

I en undervisning kan olika former av kartläggningar, till exempel test, intervjuer och observationer användas för att utveckla lärares förmåga att identifiera delar av innehållet som är problematiska i elevens lärande. Kartläggningens syfte är att ge dig underlag för att utforma planeringen av din undervisning och därmed ge eleverna bästa möjliga förutsättningar att utveckla sina förmågor inom ett specifikt område. Kartläggningen kan antingen genomföras i skriftlig (test) eller i muntlig form (intervju eller observation). Det är hur eleverna förstår innehållet som står i fokus, oavsett vilket sätt som du väljer. Observera att fokus är på formativ bedömning. För att få reda på så mycket som möjligt om hur eleverna uppfattar exempelvis mönster och/eller talföljder, är det viktigt att tänka på följande:

- Vilka frågor/uppgifter ska jag välja för att få fram de delar av innehållet som eleverna förstår?
- Hur behandlas mönster och/eller talföljder i mitt läromedel?
- Hur brukar jag undervisa kring mönster och/eller talföljder?
- Vilka delar av innehållet tror jag att mina elever urskiljer om mönster och/eller talföljder?

Eftersom syftet är att utveckla en förståelse för det som eleverna ska lära sig passar det i vissa situationer och åldersgrupper särskilt bra att genomföra intervjuer, medan det i andra situationer passar bättre med en observation. Det är upp till dig att välja det som passar bäst.

Fördelen med intervjun är att du har möjlighet att ställa följdfrågor, be om förklaringar och förtydliganden. Med hjälp av följdfrågorna får du veta hur eleverna tänker kring olika delar av ett begrepp eller en uppgift inom det utvalda ämnesinnehållet. Med hjälp av intervjun får du möjlighet att se vilka delar som är problematiska för just er elevgrupp. I samtalet kan det också framkomma sådant som du har tagit för givet att eleverna kan och som är nödvändigt att uppmärksamma för att utveckla lärande i algebra. Dessa för givet tagna delarna behöver du ta hänsyn till och lyfta fram i undervisningen. Intervjun kan ses som tidskrävande, men det bör poängteras att intervjuer genomförs med ett fåtal elever och inte behöver vara speciellt omfattande. Ett alternativ till enskilda intervjuer kan vara att genomföra en gruppintervju där du samtalar med en grupp elever om det utvalda matematiska innehållet, i det här fallet inom området algebra.

Ett annat sätt är att observera hur eleverna, i smågrupper eller enskilt går till väga när de exempelvis löser en uppgift med hjälp av laborativt material. I en observationssituation kan du välja att hålla dig i bakgrunden, iakttä och anteckna vilka delar och hur de uppfattas i aktiviteten. Du kan även gå in i den pågående aktiviteten och ställa frågor.

Fortsättningsvis beskrivs kortfattat vad som är viktigt i planering och genomförande av elevintervjuer, samt ges exempel på hur du konkret kan gå till väga i analysen av intervjuerna.

Planering

I planering ingår att konstruera frågeställningar och uppgifter som ger eleverna möjlighet att uttrycka sina kunskaper. Genom att du i lärargruppen tidigare diskuterat vad som krävs för att förstå innehållet, och vilka delar innehållet består av, har du en god grund inför konstruktionen av frågor. Det är lika viktigt som vid ett skriftligt test att ni gemensamt tydliggör för er själva vad intervjufrågorna syftar på och vad uppgifterna avser pröva. Det kan exempelvis gälla uppgiftens eller frågeställningens grad av öppenhet, komplexitet eller krav på redovisning. En medvetenhet i val och variation av uppgifter ger en tydligare bild av elevernas förståelse av ett algebraiskt område. Syftet med en intervju är att få underlag för vad som ska göras efter intervjun. Hjälp inte eleven att komma fram till en korrekt lösning, en lämplig strategi eller tankeform. Under intervjun ska du varken ge positiv eller negativ respons. Elevernas svar (felaktiga eller korrekta) kan ge er stöd att fånga de delar av innehållet som eleverna ännu inte förstått.

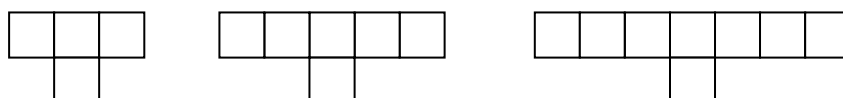
Förslag på uppgifter

Förslag på uppgifter som kan användas under intervjun:

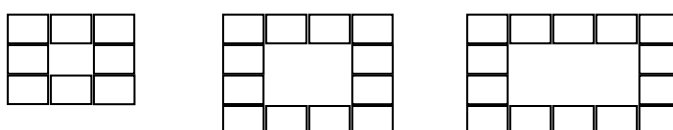
1. Hur fortsätter mönstret? Förklara varför.



2. Hur fortsätter mönstret? Förklara varför.



3. Hur fortsätter mönstret? Förklara varför.



I detta exempel kan ni med hjälp av intervju uppmärksamma om eleverna, exempelvis:

- lägger till en rad i figur tre för att skapa ett växande mönster
- får syn på när den upprepade delen startar (dvs. från figur 2) - mönstret behöver inte alltid innebära att man börjar med figur 1
- upptäcker att mönstret kan upprepas efter figur 3 (dvs. söker efter den upprepade delen)

När ni konstruerar era intervjufrågor för att få syn på elevernas kunskaper om mönster och/eller talföljder kan ni använda en eller flera av de aspekter som ges nedan att fokusera på. Dessa aspekter förekommer i olika texter, men här ges en samlad bild av dem. Reflektera över vilka frågor ni ska ställa för att få syn på vilka aspekter eleverna uppmärksammar. Ni ska diskutera vilken uppgift som är lämplig att välja utifrån era elever och de årskurser i vilka intervjuerna kommer att ske.

1. Ser den upprepade delen i ett upprepande mönster. Detta innehåll omfattar också att se att den upprepade delen alltid återkommer på samma sätt, men kan ha olika struktur.
2. Ser mönster som varierar i form och riktning. Detta innebär att mönstret kan konstrueras i olika riktningar, som t.ex. vertikalt och horisontellt, men också utan bestämd början eller slut som exempelvis cirkulärt. Det kan fortsätta både framåt och bakåt, uppåt och nedåt.
3. Ser vilket mönster det handlar om.
4. Ser talen i talföljden, det vill säga att ni ser hur mönstret i bilden kan överföras till en talföljd och föras in i en tabell.
5. Ser skillnaden mellan talen i talföljden, det vill säga ser att skillnaden mellan alla på varandra följande tal i följden följer samma regelbundenhet.
6. Med ord uttrycker en generell regel, och inser att det kan finnas flera olika sätt att uttrycka samma sak.
7. Beskriver talföljden så att andra kan förstå hur den är uppbyggd.
8. Förstår talens inbördes relation och hur dessa förhåller sig till hela talföljden.
9. Ser sambandet mellan uttrycksformerna bild och tabell.
10. Ser hur värdena i tabellen hör ihop. Detta handlar om att urskilja vad de olika värdena i tabellen innebär. Det gäller även systematiken i hur antal delar, antal olikfärgade rutor och det totala antalet rutor för respektive sekvens, förhåller sig till varandra.

11. Upptäcker hur mönstret kan se ut utöver det antal upprepade delar som finns i tabellen. Med andra ord att se hur mönstret ser ut längre fram, bortom det som syns i mönstret.

Genomförande

Intervjuer kan genomföras på olika sätt, med olika form av struktur. Ett sätt är att inleda intervjun med att visa ett algebraiskt begrepp eller uttryck, vilket eleven sedan uppmanas berätta om. Annars kan intervjun med fördel utgå från några få utvalda uppgifter som eleverna löser skriftligt eller muntligt och som intervjuaren samtalar med varje elev om, gärna under tiden eleven arbetar med uppgifterna. Med en halvstrukturerad intervju ges möjlighet att förändra uppgifterna genom att exempelvis utvidga talområdet. Vidare kan intervjuaren ändra frågornas struktur och ordningsföljd, men ändå ha fokus på det valda matematiska innehållet. Här följer förslag på frågor att använda vid intervjutillfället:

Uppföljningsfrågor som tar sin utgångspunkt i elevens sätt att hantera frågan eller uppgiften:
Berätta! Visa hur!
Vad händer om...? Hur gör du?
Varför? Nu förstod jag inte....

Indirekta, påstående och jämförande frågor
Hur tror du att en som svarat så här har tänkt?
Bara så jag fattar..... Menar du att? Stämmer det att... ..?
Vilka likheter och skillnader ser du? (ex. mellan de här olika mönstren)
Vilka skillnader ser du?

(Doverborg & Pramling-Samuelsson, 2000)

Om ni istället väljer att göra en observation är ovanstående upplägg användbart. Då intervjuerna syftar på att identifiera elevers olika sätt att uttrycka sin förståelse av det utvalda algebraiska innehållet, är det bra att välja elever med så olika kunskaper inom det aktuella matematikområdet som möjligt. Detsamma gäller om ni väljer att göra en observation. Urvalet kan grundas på lärarens kännedom om elevernas starka och svaga förmågor i matematik, reflektioner utifrån en observation eller resultat från något eventuellt tidigare skriftligt eller muntligt test. På något vis nås troligtvis den variation av förståelse som kan förekomma i elevgruppen. Denna information utgör ett värdefullt underlag för de beslut som ska tas inför den kommande lektionsplaneringen.

Sammanställning av intervjuer – ett exempel

För att underlätta bedömningen vid intervjuer av elevernas arbete kan användningen av ett analyschema vara till hjälp för att snabbt kunna dokumentera information om elevernas insatser.

Aspekt	Matematiskt språk				Redovisning						Matematiskt resonemang	...
					Struktur			Lämpliga beskrivningar och förklaringar				
Kvalitet	godtagbara kunskaper	i huvudsak	ändamålsenligt	ändamålsenliga och effektiva	i huvudsak	ändamålsenligt	ändamålsenliga och effektiva	i huvudsak	ändamålsenligt	ändamålsenliga och effektiva	...	...
Elev 1		x					x		x			
Elev 2				x		x				x		

Analysschemat kan vara av olika typer, det kan t.ex. vara i form av en klasslista där det finns utrymme att med hjälp av kryss dokumentera korta bedömningar i förväg skrivna rubriker. Det kan vara lämpligt att inte fokusera på alla elever varje gång.

Användning

Efter den genomförda lektionen kan intervjuer genomföras på samma sätt som före lektionen och då med samma elever. Därefter kan svaren jämföras och analyseras. Dessa jämförelser ger indikationer på vad eleverna lärt sig på lektionen utifrån innehållet som du behandlade i klassrummet. Genom att ta elevers skilda uppfattningar av lärande i beaktande ges möjlighet att i så stor utsträckning som möjligt utforma och anpassa undervisningen utifrån klassens behov.

Referenser

Doverborg, E., & Pramling-Samuelsson, I. (2000). *Att förstå barns tankar – Metodik för barnintervjuer*. Liber.

Talföljder

Anna-Lena Ekdahl, Högskolan i Jönköping

Inom kunskapsområdet algebra har mönster en framträdande plats. Mönster kan uttryckas med bilder, symboler och med tal. Till en början utforskas mönster på ett informellt sätt genom konstruktion, med ord och med egna symboler. Progressionen i undervisning om mönster handlar dels om att möta mönster och talföljder med olika och ökande svårighetsgrader, dels att beskriva och uttrycka talmönstren på olika sätt och i så småningom på ett mer generellt sätt. En fortsatt progression är viktig för att elever i åk 4–6 och 7–9 ska kunna förstå att ett talmönster kan beskrivas med det algebraiska symbolspråket. För att elever ska utveckla sitt algebraiska kunnande behöver de ges rika tillfällen att i olika situationer kommunicera och resonera kring olika talmönster. Elever kommer inte att utveckla sin algebraiska förmåga om de enbart möter talföljder som lösryckta aktivitet eller uppgifter där de på egen hand ombeds komplettera de två, tre följande talen. Det är heller inte tillräckligt att elever endast får möta talföljder vars uppbyggnad innebär att mönstret ökar eller minskar med samma värde och med fokus på mönster i multiplikationstabellen.

Innehållet i denna text syftar på att ge dig som lärare exempel på hur du med hjälp av undervisningen kan utveckla elevernas förmåga att se hur olika talföljder är uppbyggda, kan konstrueras och verbalt kan beskrivas.

Som lärare kan det vara viktigt att känna till något om olika slags talföljder. Nedan ges några korta förklaringar:

- I en **aritmetisk talföljd** har varje nytt tal en ökning med ett konstant värde (t.ex. 3, 6, 9, 12 där skillnaden mellan talen är 3.) I en aritmetisk talföljd kan talen även minska med ett konstant värde (t.ex. 35, 29, 23, 17, _)
- I en **geometrisk talföljd** däremot är kvoten mellan vilket tal som helst och det närmast föregående alltid lika stor. En geometrisk talföljd med kvoten 2 skulle kunna illustreras på följande sätt: 5, 10, 20, 40, 80.

Utöver dessa exempel finns andra slags talföljder med varierad differens. Ett exempel på en sådan talföljd är: 1, 2, 4, 7, 11, _. I denna talföljd ökar skillnaden mellan talen med ett för varje steg.

Ett annat exempel är Fibonaccis talföljd: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, _, _ , där det följande talet är summan av de två föregående talen.

Mönster med tal omfattar även tals egenskaper såsom jämna och udda tal och mönster där talen multipliceras på något sätt. Ett sådant mönster är till exempel följden av kvadrattal: 1, 4, 9, 16, __. Talen bildas genom att talen 1, 2, 3, 4, multipliceras med sig själva.

Det som skiljer ett upprepat mönster med tal, exempelvis 1, 2, 3, 1, 2, 3, _ från en talföljd är att de numeriska värdena på talen i en talföljd är viktiga, medan detta inte gäller i mönster. I exempelvis mönster 1, 2, 3, 1, 2, 3 kan talen bytas ut mot bokstäver. A, B, C, A, B, C eller mot former $\diamond\Delta\diamond\Delta\diamond\Delta$ och ändå fräntas inte mönstret sin struktur.

Det är viktigt att eleverna inte endast möter talföljder i en lärobok, som en isolerad aktivitet där det egentligen endast krävs att talföljden ska färdigställas. Oftast är talföljder i läroböcker dessutom uppbyggda med en konstant skillnad och leder nästan alltid till en entydig lösning, vilket i stor utsträckning bidrar till att eleven antingen ser strukturen, vilket ger rätt svar, eller inte ser strukturen vilket ger fel svar. Det är betydligt enklare för elever att fortsätta ett mönster än att själv beskriva det. Däremot blir det svårare när aktiviteten är utformad så att eleven ska beskriva talföljdens regelbundenhet för läraren eller klasskamraterna. Flera forskare betonar just den språkliga aspekten i samband med mönster. När elever sätter ord på mönstrets regelbundenhet utvecklar de sin kommunikativa förmåga liksom sin förmåga att se mönstrets uppbyggnad, något som på sikt möjliggör utvecklingen till mer algebraiska beskrivningar. Man har även sett att elever har betydligt lättare att verbalisera sina beskrivningar än att uttrycka dem i skrift.

Klassrumsexempel

För att få en inblick i hur elever i årskurserna 1–3 tar sig an talföljder, kan vi titta på en engelsk studie med drygt 300 elever mellan 7 och 11 år (Hargreaves m.fl., 1998). Man såg att eleverna använde ett antal strategier för att fortsätta olika talföljder och beskriva talföljderna med ord. Med de olika strategierna kunde eleverna förstå talföljdens egenskaper och regelbundenhet.

De strategier som eleverna använde i undersökningen var:

- söka efter skillnader mellan talen (t.ex. i talföljden 2, 5, 8, 11, 14 är skillnaden 3)
- söka efter differensen mellan skillnaderna (t.ex. i talföljden 2, 4, 7, 11, 16 ökar skillnaden med 1)
- söka efter multiplikationstabeller (t.ex. 3, 6, 9, 12 även samband med 4, 7, 10, 13)
- söka efter talens egenskaper (t.ex. udda och jämna tal)

- söka efter egenskapen i skillnaden (t.ex. i talföljden 2, 5, 10, 17, 26 tittar man efter skillnaden men ser att den inte är lika och letar istället efter andra egenskaper såsom udda och jämna tal)
- kombinera tal för att skapa andra tal (t.ex. i talföljden 2, 5, 7, 12, 19)

Vissa elever använde sig av strategierna på ett flexibelt sätt, medan andra tog första bästa strategi eller förlitade sig enbart på en strategi. Flexibiliteten i strategival ökade med stigande ålder, men det framkom tydligt att även många av de äldre eleverna använde ett begränsat antal strategier. En förklaring var att eleverna saknade erfarenheter av talföljder med varierande uppbyggnad. Dessa resultat visar att det är viktigt att lärare i undervisningen låter elever möta talföljder uppbyggda med olika strukturer. Ett exempel på hur det kan iscensättas är att låta eleverna få möta mer öppna talföljder som endast innehåller de två första talen. En sådan uppgift kan se ut så här:

Fortsätt följande talföljd 1, 4, _ , _ , _

Eleverna kan i det fallet upptäcka flera möjliga fortsättningar på talföljden och sålunda blir regelbundenheten och mönstret olika. Sedan uppmanas de förklara vilken regel som ligger till grund för respektive talföljd. Genom att vara med och skapa talföljder ges eleverna möjlighet att upptäcka vad som kännetecknar olika slags talföljder.

I den engelska studien (Hargreaves m.fl., 1998) som beskrevs ovan användes ett arbetsblad för att få eleverna att sätta ord på hur de har gått tillväga för att lösa talföljden. Bladet såg ut ungefär så här:

Lös följande talföljd:

Berätta om talföljden:

Vilken regel gäller för talföljden?

Berätta hur du tänkte och vad du såg när du kom på regeln.

För att göra en sådan aktivitet behöver du välja ut talföljder med lämplig svårighetsgrad. Eftersom eleverna uppmanas att beskriva regeln och även tänkandet som förekommer regeln kan du få värdefull kunskap om de strategier eleverna använder och med vilken kvalitet de beskriver den presenterade talföljden. Eleverna ges i aktiviteten möjlighet att utveckla sin förmåga att kommunicera och resonera kring talföljdens struktur.

För att ta reda på elevens kunskaper behöver du ta reda på vad för slags mönster eleven ser. Det är inte tillräckligt att konstatera att eleven kan eller inte kan fortsätta ett mönster. Det är inte heller självklart att eleven ser de mönster som läraren vill att eleven ska se. I ett talmönster behöver eleven se hur talen förhåller sig till varandra och hur de förhåller sig till helheten. Tänkbart kan vara att eleven tar fasta på relationen mellan vissa tal men inte mellan alla tal.

Så här kan en elev i årskurs 3 uttrycka sig gällande frågan om vilken regel som används till följande talföljd: 1, 4, 8, 13, 19, __, __

Jag tror du har tagit 4 ... mer ... bara en chans...

Om du skulle göra något mer än att chansa och tittar lite mer på talen...

Nej, det var svårt ... 5 blir det kanske ... i alla fall 5 där. (Pekar mellan talen 8 och 13).

Efter en stunds tystnad säger eleven:

Det kanske blir... 13 ... Jo det är 5 där också (pekar mellan talen 13 och 19). Du har tagit 5 mer.

En tänkbar förklaring är att eleven först ser ett bekant samband mellan 4 och 8. Eleven har erfarenheter av att 8 är dubbelt så mycket som 4, alternativt att skillnaden mellan 4 och 8 är 4. Eleven vet hur dessa tal förhåller sig till varandra. Därefter väljer eleven två nya tal (8 och 13) som ställs i relation till varandra och ser då med viss tveksamhet att det är 5 mellan dessa två tal och även mellan 13 och 19 (vilket inte stämmer). Eleven bortser i det skedet från den skillnad 4 som identifierades tidigare.

Det som skulle kunna vara kritiskt för elevers förmåga att konstruera och beskriva olika slags talföljder hör samman med elevernas tidigare erfarenheter av arbete med dessa. Utifrån ovanstående resonemang kan man tänka sig att eleverna, om de ska ges förutsättningar att utveckla denna förmåga, behöver ges möjlighet att till exempel urskilja nedanstående delar av innehållet i undervisningen. Därmed inte sagt att dessa aspekter är kritiska just för de elevgrupper ni undervisar.

Tänkbara kritiska aspekter

1. Upptäcka att talen i en talföljd har numeriska värden och är ordnade efter en viss regelbundenhet, i motsats till lösryckta tal i ett "kaos" eller som i ett upprepat mönster där mönstret kan bestå av former, bokstäver eller tal.
2. Se att talföljder inte alltid är uppbyggda på samma sätt med en konstant skillnad. Det betyder att man måste se att skillnaden mellan talen ibland är konstant, ibland ökar och att även andra samband kan finnas mellan de ingående talen ibland.
3. Se att talföljden fortsätter med samma regelbundenhet utöver de streck eller tomma luckor som finns angivna i uppgiften. Det betyder att eleven behöver urskilja att talen i en talföljd som exempelvis 1, 2, 4, 7, 11, __, __ fortsätter med samma regelbundenhet utöver den angivna sekvensen, även efter att man fyllt i de två tal som fattas.
4. Urskilja talens inbördes relation och hur dessa förhåller sig till hela talföljden. Talen i sekvensen måste urskiljas samtidigt som helheten, inte nödvändigtvis samtliga tal men tillräckligt många för att se en regelbundenhet. Det är med andra ord inte tillräckligt att urskilja en mindre del av talföljden eller exempelvis de sista två talen för att se mönstrets uppbyggnad.

Betrakta talföljden: 1, 2, 4, 7, 11, 16, __, __ där skillnaden mellan talen ökar med ett för varje tal (1 (+1), 2(+2), 4(+3), 7(+4), 11(+5), 16(+6)). Om en elev i möte med den talföljden endast ser vad som händer mellan de två sista talen 11 och 16 kan talföljden missuppfattas och fortsättas med en konstant skillnad med 5: 1, 2, 4, 7, 11, 16, 21, 26, __

Utifrån klassrumsexemplen som presenterats ovan erbjuds flera möjligheter att ställa frågor som möjliggör utveckling av elevernas förmåga att konstruera och beskriva olika talföljder.

Referenser

Hargreaves, M., Shorrocks-Taylor, D., & Threlfall, J. (1998). Children's strategies with number patterns. *Educational Studies*, 24(3), 315–331.
<https://doi.org/10.1080/0305569980240305>

Del 3: Moment B – kollegialt arbete

Diskutera

- Hur låter ni eleverna visa sina lösningar för klassen så att de kan se skillnader och likheter mellan olika lösningsförslag? Relatera era diskussioner till filmen "En lektion om mönster".
- Hur använder ni återkoppling i klassrummet och vad är syftet med den?
- I en formativ bedömningsprocess finns tre viktiga frågor att beakta:
 - Vart ska vi/eleven?
 - Var är vi/eleven nu?
 - Hur tar vi oss dit?

Vad innebär dessa frågor i praktiken? Relatera era diskussioner till filmen "En lektion om mönster".

- Vilka frågor/uppgifter ska ni välja för att få fram hur eleverna uppfattar olika delar av innehållet när de arbetar med talföljder? Vad uppmärksammade ni i filmen "Generalisering"?

Förbered en aktivitet

Välj tillsammans ut uppgifter som ska användas vid intervjun. Välj exempelvis utifrån de texter ni läst i moment A. Plocka ut eleverna eller genomför en kort intervju direkt i klassrummet. Syftet med intervjun är att kunna identifiera vad som är kritiskt i elevens lärande. Om ni undervisar elever i olika årskurser, kan ni behålla samma uppgifter/frågor men variera talområden utifrån elevgruppen. Uppmärksamma särskilt punkt 5 och 6 som finns i "Lektionsobservation – Protokoll" när ni genomför intervjun.

Del 3: Moment C – aktivitet

Genomför den planerade intervjun. Dokumentera elevernas kunskaper och vilka de kritiska aspekterna i deras lärande är.

Del 3: Moment D – gemensam uppföljning

Diskutera

- Diskutera era genomförda intervjuer utifrån anteckningarna som ni gjorde i "Lektionsobservation – Protokoll" punkt 5 och 6.
- Diskutera uppgifterna/frågorna som ni valde i era intervjuer och hur de kan utvecklas för att nå sitt syfte.
- Hur kan ni utveckla ert sätt att få reda på vad som är en kritisk aspekt i elevens lärande?

Reflektera

Avsätt de sista tio minuterna för att reflektera över:

- Vad gjorde jag/vi?
- Vad lärde jag mig?

Sammanfatta tillsammans arbetet med denna del i några punkter