

Algebra, åk 1–3

Den här modulen fokuserar på reflektionens betydelse för hur ni i lärargruppen kan utveckla ett professionellt förhållningssätt till undervisning av algebra i årskurserna 1–3.

Modulen är uppdelad i åtta delar som behandlar ett antal didaktiska perspektiv inom matematikundervisning. Rubrikerna på delarna ger en kort sammanfattning av det didaktiska perspektiv som är huvudfokus i respektive del. Modulen har kompletterats med två texter som handlar om programmering, dessa finns i del 5 och del 7. Dessa texter och aktiviteter kan läsas och genomföras fristående från delens övriga innehåll.

Modulen består av följande delar:

1. Reflektion som lärprocess
2. Resonemangsförmåga
3. Bedömning för utveckling av undervisning i algebra
4. Interaktion i algebraklassrummet
5. Algebra och programmering som språk
6. Sociomatematiska normer
7. Kommunikation och programmering i algebraklassrummet
8. Algebraiskt tänkande

De didaktiska perspektiven som genomsyrar modulen kommer att användas tillsammans med två områden som är av betydelse för elevernas lärande i algebra, nämligen: mönster och talföljder samt likheter och olikheter. I modulen ges förslag på uppgifter och aktiviteter baserade på det algebraiska innehållet. Under arbetet med algebramodulen kan ni använda "Mall – Planering av lektion" för att planera era lektioner" och "Lektionsobservation – Protokoll" för att dokumentera genomförandet av era lektioner. I filmen "Variationsteori" presenteras två viktiga begrepp som ligger till grund för innehållet i modulen. Dessa begrepp är kritiska aspekter och variationsmönster.

Ansvariga för modulen

Linnéuniversitetet, i samarbete med Göteborgs universitet, Blekinge Tekniska Högskola och Högskolan i Jönköping.

Del 6. Sociomatematiska normer

Målet med den här delen är att rikta er uppmärksamhet mot sociomatematiska normer och hur ni på ett systematiskt sätt kan variera olika aspekter av det algebraiska innehållet. Det matematiska innehållet i denna del handlar om likhetstecknet och är en fortsättning från del 5. Dessutom är målet att ni ska bekanta er med en lärandeteori, variationsteorin, som ger er en vetenskaplig grund för att arbeta med variation av innehållet.

I denna del kommer ni återigen att arbeta med att planera en lektion, men den här gången ska ni fokusera på att variera aspekter av innehållet. I er planering utgår ni från de aspekter som ni uppmärksammade, i del 5, som är kritiska i elevernas lärande.

Del 6: Moment A – individuell förberedelse

Läs

Läs texten om "Sociomatematiska normer". Den ligger till grund för ert fortsatta arbete med algebra i klassrummet och i lärargruppen.

I texten "Ett variationsteoretiskt perspektiv på lärande" presenteras vad som menas med att variera det matematiska innehållet utifrån en lärandeteori, nämligen variationsteorin. Denna teori exemplifieras i texten "Kritiska aspekter och variation av innehåll".

Det algebraiska innehållet presenteras i texten "Likheter och olikheter", som är en fortsättning från del 5.

Se film

Filmen "Olika sätt att se på mönstret" fokuserar dels på sociomatematiska normer i algebraklassrummet och dels på vilka möjligheter läraren ger eleverna för att uppleva variation i innehållets kritiska aspekter.

Material



Sociomatematiska normer i algebraklassrummet
C. Olteanu och C. Kilhamn



Ett variationsteoretiskt perspektiv på lärande
M. Holmqvist Olander



Kritiska aspekter och variation av innehåll
C. Olteanu



Likheter och olikheter
R. Gunnarsson och A. Otterborg



Olika sätt att se på mönster
Filformatet kan inte skrivas ut.
Skolverket

Sociomatematiska normer i algebraklassrummet

Constanta Olteanu, Linnéuniversitetet och Cecilia Kilhamn, Göteborgs universitet

År 1996 introducerade Yackel och Cobb begreppet sociomatematiska normer för att beskriva och förstå hur elevers matematiska självständighet påverkas av de matematiska föreställningar och värderingar som råder i matematikklassrummet. De definierar sociomatematiska normer som de normer som reglerar matematiska resonemang och påverkar lärandet. Sociomatematiska normer beskriver vad som får/kan sägas och göras i ett matematikklassrum i relation till det matematiska innehållet. Dessa normer skapas och modifieras kontinuerligt i det samspel som äger rum mellan lärare och elever i klassrummet.

Sociomatematiska normer etableras i alla typer av klassrum och påverkas även av samhället i stort samt av skolans syn på matematik och matematiklärande. Läraren kan inte själv skapa normer eftersom dessa etableras i samverkan med eleverna. Men precis som när det gäller sociala normer i klassrummet har läraren ett stort inflytande över vilka sociomatematiska normer som ska gälla och ett ansvar för att dessa etableras. Ofta är sociomatematiska normer svåra att upptäcka så länge de upprätthålls. Man upptäcker normerna antingen genom att någon bryter mot dem eller genom att jämföra med ett klassrum där delvis annorlunda normer råder. Man måste som lärare först bli medveten om vilka normer som råder i klassrummet innan man kan påbörja arbetet med att förändra dessa.

De vanligaste sociomatematiska normer som rapporterats i litteraturen är relaterade till förklaringar, motiveringar och lösningar; till exempel vad som räknas som en godtagbar matematisk förklaring, som en effektiv matematisk lösning eller som en sofistikerad matematisk lösning. Här är exempel på olika normer för vad som skulle kunna förekomma i ett klassrum angående vad som ses som en godtagbar matematisk förklaring:

1. Vad som helst duger, det räcker att man försöker förklara hur man har tänkt.
2. Det som står i facit. En sådan norm medför att man inte vill arbeta med öppna tolkningsbara uppgifter eftersom det inte går att skriva facit till dem.
3. Det som läraren godkänner. En sådan norm kan medföra att eleverna inte får tilltro till sin egen förmåga att bedöma en lösning.

4. Det som många i klassen, eller klassens ”ledare”, anser är en bra lösning. En sådan norm kan vara stark i ett klassrum där de sociala normerna får inflytande över matematiken och där det finns starka ledare i klassen.
5. Jag kan visa med konkret material. Till exempel: jag vet att mönstret är så för att jag har ritat det eller byggt det.
6. Det stämmer med de exempel jag har sett.
7. Jag kan inte hitta ett motexempel.
8. Jag kan argumentera logiskt för lösningen.
9. Jag kan genomföra ett algebraiskt bevis.

Vilken av dessa som är rådande norm i ett klassrum kan delvis bero på elevernas ålder. Det är helt naturligt att vad som räknas som en godtagbar matematisk förklaring inte kan vara samma i åk 1 och i åk 9. I åk 9 bör förklaring 7, 8 och 9 vara norm, medan i åk 1 kanske förklaring 5 och 6 är helt acceptabla.

Eftersom algebra handlar om att generalisera är det en viktig målsättning i algebraklassrummet att det etableras normer som handlar om att sträva efter ett generellt sätt att beskriva och förklara något genom att använda olika algebraiska uttryckssätt. Detta kan göras genom att exempelvis använda andra ord, rita bilder eller hantera laborativt material. Att inte rita bilder med syftet att redovisa en matematisk lösning kan vara en etablerad sociomatematisk norm i matematikklassrummet. Detta kan dels bero på att bilder inte används som matematisk resurs av eleverna men också på att det finns en allmän uppfattning bland eleverna om att bilder inte används för att visa matematiska samband. Att acceptera en förklaring som bygger på att man sett ett specifikt fall leder inte till en generalisering. Exempelvis har eleverna upplevt att det är ok att gissa och då tar eleven till sig den matematiska gissningen som en norm som sällan leder till generalisering. Att använda laborativt material ger en konkret gestaltning av exempelvis ”göra lika på båda sidor om likhetstecknet” men för att eleverna ska ha möjlighet att generalisera metoden behöver de frigöra sig från det konkreta materialet. Om detta inte händer tar eleverna användningen av laborativt material som en norm.

Wood och McNeal (2003) visar att lärarens sätt att ställa frågor starkt påverkar hur eleverna förklarar matematiska Lösningsstrategier, motiverar och försvarar dem. Algebra handlar till stor del om att logiskt kunna argumentera för att något är sant. Det viktiga i lärandeprocessen i ett algebraklassrum är inte det rätta svaret i sig, utan hur man ser mönster och struktur samt hur man kan resonera logiskt och med hjälp av algebrans språk för att vara säker på att svaret man har fått fram är rätt. För att hjälpa eleverna att utvecklas från att kunna beskriva en iakttagelse eller strategi till att uttrycka en generalisering eller generell regel kan man ställa den här typen av frågor:

- Kan man formulera en regel för det här?
- Hur vet man att det man tycker sig se eller har räknat ut är sant?
- Hur vet man om det alltid är sant, om regeln alltid gäller?

Lisa Björklund Boistrup (2010) har i sin avhandling om bedömning i matematikklassrummet beskrivit fyra olika bedömningsdiskurser. Dessa fyra diskurser kan ses som exempel på fyra olika sociomatematiska normer relaterade till hur läraren bemöter vad eleverna säger i matematikklassrummet, vilket i sin tur påverkar hur eleverna lär sig matematik. Dessa är:

- Gör det fort och gör det rätt. I denna diskurs ställer läraren oftast slutna frågor med kända svar. Rätt och fel är viktigt och fokus ligger på uppgiften och svaret snarare än på den matematiska processen.
- Vad som helst duger. I denna diskurs får eleven ofta återkoppling i form av berömmen avkrävs sällan motiveringar och utmanas inte. Konstruktiva diskussioner om elevers lösningar är sällsynta och det framgår inte alltid vad som är matematiskt korrekt.
- Allt kan tas som utgångspunkt för en diskussion. I denna diskurs ställs öppna frågor och det finns en öppenhet inför elevers olika sätt att förstå en uppgift. Processen är i fokus och ”felaktiga” svar fungerar som utgångspunkt för diskussioner som i slutändan leder fram till vad som är matematiskt korrekt.
- Resonemang tar tid. I denna diskurs ligger fokus på processer, resonemang och argumentation. Elevers kunnande och förmåga att utvecklas erkänns och elever utmanas ofta.

Ytterligare en aspekt av sociomatematiska normer som påverkar elevers lärande är vilken syn på matematik och matematikundervisning som råder. Om eleverna anser att matematik i första hand är att göra klart uppgifterna i matteboken är det risk för att de inte betraktar laborativa eller undersökande aktiviteter som ”riktig matematik” och inte ser dem som ett tillfälle för lärande. Om de däremot ser matematikboken som en resurs bland många andra i sitt möte med matematiken är förutsättningarna större för dem att de utnyttja alla resurser för sitt lärande.

Sociomatematiska normer i lärarkollegiet

När lärare i ett arbetslag eller kollegium samtalar om matematik och matematikundervisning etableras också sociomatematiska normer. Dessa är sällan uttalade men påverkar ändå samarbetet och i förlängningen även undervisningen i klassrummet. Exempel på normer som kan råda i kollegiet är:

- synen på vad som är god matematikundervisning,
- vem som får sista ordet när det gäller vad som är en matematiskt korrekt tolkning av ett begrepp,
- vilken betydelse man ger till läromedel och hur kritisk man tillåts vara till det,
- vad man accepterar som en godtagbar matematisk förklaring,
- vad som anses vara en effektiv eller sofistikerad matematisk lösning.

Reflektera över vilka sociomatematiska normer som råder i ditt kollegium.

Referenser

Björklund Boistrup, L. (2010). *Assessment discourses in mathematics classrooms*. [Doktorsavhandling, Stockholms universitet].

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 458–477.

Wood, T., & McNeal, B. (2003). Complexity in teaching and children's mathematical thinking. I N. L. Pateman, B. J. Dougherty, & J. Zilliox (Red.), *Proceedings of the 27th annual conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, s. 435–443). PME.

Ett variationsteoretiskt perspektiv på lärande

Mona Holmqvist Olander, Göteborgs universitet

Vad krävs för att man ska lära sig något? Enligt variationsteorin (Marton m.fl., 2004) sker ett lärande när man urskiljer de delar av ett innehåll som varierar, mot en oföränderlig (konstant) bakgrund. Förenklat kan man säga att om alla personer i hela världen hade samma längd skulle längd inte urskiljas eftersom det inte är en aspekt som varierar. Men eftersom längd varierar mellan olika personer blir detta ett drag som vi gärna lägger märke till och kommenterar när vi ska beskriva en person för någon annan. Det som händer i en sådan situation är att vi jämför längd mellan olika personer och sedan relaterar denna till en viss längd som anses utgöra normen, det vill säga en viss längd som de flesta personer brukar ha. Denna variation sker samtidigt och gör att vi kan beskriva den person som urskiljs. Personen blir då lång, av medellängd eller kort. Om vi tittar på en folksamling lägger vi märke till de personer som avviker från flertalet, till exempel genom att vara ovanligt långa.

Om en elev till exempel ska urskilja att tecknen + och – kan ha två olika betydelser i matematiken måste de få en möjlighet att urskilja skillnaden mellan dessa tecken. Genom att förklara att $3 + 4$ egentligen betyder $(+3) + (+4)$, det vill säga att det handlar om att addera två positiva tal, införs en samtidig variation av plustecknets betydelse som operation och för att beteckna positiva tal. Men det är oftast först när elever får svårigheter med att förstå att $4 - (-3)$ blir 7, det vill säga $+4 - (-3)$, som det blir uppenbart att tals värde är positiva i alla situationer då inget annat anges. Ett vanligt sätt att förklara tillvägagångssättet är att lyfta fram att minus minus blir plus vilket ytterligare försvårar elevernas förståelse av fenomenet eftersom det indikerar att det inte finns någon skillnad mellan minustecknets två olika betydelser. I stället bör man separera tecknens olika betydelser och visa skillnaden mellan dem ännu tydligare.

En annan aspekt som är svår i sammanhanget är att förstå att ett tal minus ett annat kan resultera i ett större tal än ursprungstalet. Inte heller här hjälper det att förklara att minus minus blir plus. De aspekter som eleverna ännu inte förstått, men måste urskilja för att utveckla sin kunskap ytterligare, kallas kritiska aspekter. När man undervisar är det avgörande för undervisningens kvalitet att läraren har god kunskap om elevernas förståelse för det innehåll som ska undervisas om, att läraren hittar de kritiska aspekterna eller nycklarna till elevernas lärande. Vilka aspekter av innehållet är det de urskiljer? På vilket sätt kan innehållet varieras så att eleverna upptäcker nya aspekter?

Vad är det som ska utgöra den oföränderliga (konstanta) bakgrunden? Lärare ställer frågor av denna sort när de undervisar utifrån ett variationsteoretiskt perspektiv.

Lärandeobjekt

I variationsteorin är lärandeobjektet centralt, det vill säga den kunskap eller förmåga som lektionen avser att utveckla hos eleverna. Ett lärandeobjekt är relaterat till gällande läroplan och kursplan i ämnet, men skiljer sig delvis från vad ett lärandemål är. Detta innebär att ett lärandemål riktar in sig på vad eleverna behöver kunna på lång sikt medan ett lärandeobjekt är en kortsiktig men viktig del av den kunskap som eleverna ska ta till sig. Lärandeobjektet är alltså en uttolkning och nedbrytning av kursplanens mål, vilket möjliggör planering av lektioner eller lektionsserier som stegvis och systematiskt utvecklar elevernas kunskaper mot målen. Man brukar tala om lärandeobjektets tre faser: planering utifrån den kunskap som läraren tillsammans med sina kollegor har om elevernas förståelse och innehållet (det intentionella lärandeobjektet); genomförande (det iscensatta lärandeobjektet); uppföljning som syftar på vilken kunskap eller förmåga som eleverna utvecklat under lektionen (det erfarna lärandeobjektet).

Variationsteorin och lärsituationer

På vilket sätt skulle man kunna använda variationsteorin som ett verktyg för att skapa en undervisningssituation som utvecklar elevernas förståelse av varför $4 - (-3) = 7$? Om vi först konstaterar att eleverna inte känner till att tal kan vara både negativa och positiva, samt att ett plus- eller minustecken kan användas som både en räkneoperation och för att beteckna negativa eller positiva tal, har vi två kritiska aspekter som eleverna ska erbjudas att urskilja under lektionen. Genom att de inte sett plustecken som något annat än ett tecken för addition under sina första skolår kan just den betydelsen vara svår att urskilja för eleverna på egen hand. Men genom att införa samtidig variation av vad tecknen talar om (egenskap eller addition) kan eleverna separera dessa olika betydelser och urskilja dem i olika sammanhang. Ett förslag som gör det möjligt för eleverna att urskilja denna skillnad är att variera tecknens betydelse men hålla talen konstanta (oföränderliga):

$$(+4) + (+3)$$

$$(+4) + (-3)$$

$$(+4) - (+3)$$

$$(+4) - (-3)$$

$$(-4) + (-3)$$

$$(-4) - (-3)$$

En sådan övning ställer krav på elevernas förmåga att kunna separera plus- och minustecknets olika betydelser för att de på så sätt ska kunna öka sin uppmärksamhet på dessa betydelser. I övningen ovan blir det tecknen som framhävs, eftersom siffrorna inte ändras. Trots det blir svaren olika beroende på hur eleverna förstår tecknens olika betydelser och om betydelserna lyfts fram. Det rent mekaniska utförandet av räkneoperationerna är i det här sammanhanget inte av vikt eftersom svårighetsgraden är låg. Om man i stället hade använt ett mönster där även siffrorna skiftade mellan exemplen hade det blivit svårt för eleverna att urskilja just tecknens betydelse eftersom det är uppenbart att svaret kan variera om siffrorna byts ut.

Variationsmönster

De mönster som används för att skapa lärande i klassrummet har indelats i tre olika typer som används på olika sätt beroende på i hur hög grad elevernas förkunskaper är utvecklade. Det första mönstret är en tydlig skillnad (kontrast), som förenklat uttryckt innebär att det som ska förklaras lyfts fram och skiljs ut från andra möjliga betydelser. I exemplet ovan är en tydlig skillnad hur plus- och minustecknet används både för att beteckna ett negativt tal och som räkneoperation. Dessutom används de båda betydelserna av minustecknet i kontrast till varandra för att visa att svaret skiljer sig åt beroende på talets egenskap. I vissa fall har egenskapen ingen betydelse, till exempel i exemplen $(+4) + (+3)$ och $(+4) - (+3)$, men i kontrast med $(+4) - (-3)$ blir det tydligt att egenskapen (-3) har en väsentlig betydelse. Genom att tydliggöra dessa skillnader och kontraster blir det möjligt för eleven att skilja på plus- och minustecknens olika betydelser.

Generalisering är ett annat mönster av variation, som används för att eleverna ska utveckla en förståelse för de överliggande principer som är giltiga. I exemplet som jag använt här innebär det att eleverna måste få möta samma typ av problem avseende andra tal för att se att principen är densamma oavsett vilka värden som används. Slutligen, när eleverna utvecklat en god förståelse, används sammansmältning (fusion) som mönster av variationsmönster. Detta innebär att både talens värde och tecknens värde kan skifta samtidigt, det vill säga $(+4) - (-3)$ respektive $(+5) - (-4)$, vilket är svårt att införa innan eleverna urskilt att samma tecken kan betyda två olika saker (operationellt och strukturellt). Lärande ses som tätt sammanbundet med det som ska läras, förmågan eller innehållet, vilket innebär att lika stor omsorg ägnas till elevernas förkunskaper som till att studera det matematiska innehållets olika delar som framställs i undervisning. Genom att fokusera på elevernas förståelse av innehållet i undervisningen, i stället för att fokusera på innehållet i sig, används deras kommentarer och sätt att behandla innehållet som en utgångspunkt för den formativa bedömning som ständigt sker i undervisningen där variationsteorin utgör utgångspunkten.

Variationsteoretisk analys av lärande

Efter en genomförd undervisning analyseras vilka variationsmönster som använts för att framgångsrikt lyfta fram de aspekter som varit kritiska för elevernas lärande. Inom ramen för en variationsteoretisk studie studeras alltid innehållet och elevernas förståelse av innehållet i första hand, därefter görs en utformning för att skapa mönster av variation så att eleverna ska kunna urskilja de aspekter som är kritiska för att de ska utveckla sitt lärande. Variation i variationsteorin handlar därför inte om variation i arbetssätt eller arbetsmetod, även om olika arbetsmetoder används i arbetet med att synliggöra de kritiska aspekterna. Dessa har dock en underordnad betydelse eftersom möjligheterna att urskilja de kritiska aspekterna inte är beroende av en viss arbetsmetod. De aspekter som lyfts fram i exemplet ovan kan lyftas fram genom att läraren leder en klassdiskussion, att eleverna arbetar med uppgifterna i mindre grupper eller utför dem genom att använda sig av ett datorbaserat arbetssätt. Oavsett arbetssätt kan samma aspekter bli synliggjorda och det är därför val av vilka dessa aspekter ska vara som blir avgörande. Sättet på vilket det sker blir underordnat, även om det givetvis också utgör en viktig del i undervisningen. Analysen av en lektion som har en utformning baserad på variationsteorin lyfter därför i huvudsak upp innehållet i relation till eleverna och de variationsmönster som använts för att se på vilket sätt de påverkar elevernas utveckling, medan arbetssätten blir underordnade och i egentlig mening inte är i fokus för en sådan analys.

Referenser

Marton, F., & Tsui, A. B. M. (Red.). (2004). *Classroom discourse and the space of learning*. Lawrence Erlbaum.

Kritiska aspekter och variation av innehåll

Constanta Olteanu, Linnéuniversitetet

Flera studier (t.ex. Olteanu, 2007) visar att lärare använder variation på ett naturligt sätt i matematikundervisningen. Trots detta finns det väsentliga skillnader om du använder dig av variation på ett medvetet och systematiskt sätt eller inte. Att variera innehållet utifrån variationsteorin innebär att du analyserar det som är en kritisk aspekt i elevernas lärande och därefter erbjuder eleverna möjlighet att uppleva variation i denna aspekt. I denna text tas några aspekter upp som kan vara kritiska för dina elever samt de variationer som du kan skapa i dessa aspekter.

Kritiska aspekter och variationsmönster

1. Eleverna ska förstå likhetstecknets statiska och dynamiska användning (är lika med och blir lika med). Ett sätt att belysa denna är att använda följande uppgifter:

- Dela upp ett tal

$$8 = 5 + 3 = 1 + 7 = _$$

Ni kan använda konkret material (till exempel bönor och muggar) för att visualisera detta. I denna uppgift kan likhetstecknet inte tolkas som ”det blir”.

- Använd exempelvis följande uppgifter:

$$5 + 4 = 9$$

$$5 + _ = 9$$

$$_ + 5 = 9$$

$$_ + _ = _ - _$$

I dessa uppgifter varierar uppgiftens struktur. Ni kan använda liknande uppgifter och diskutera olika huvudräkningsstrategier.

- Låt eleverna konstruera uttryck som är sanna eller falska och diskutera varför eller varför inte uttrycken är sanna eller falska.
- Låt eleverna sätta ut = där det stämmer.

$$2 + 1 \quad 4 - 1$$

$$3 + 2 \quad 5 - 1$$

$$0 + 2 \quad 1 + 1$$

2: Eleverna ska förstå hur ett mönster fortsätter. Ni kan använda olika mönster och ställa olika frågor som exempelvis: Hur ser femte figuren ut? Åttonde? Tionde?

Figur 1



Figur 2



Figur 3



Figur 4



Genom att ställa dessa frågor kan eleverna uppmärksamma mönstrens struktur.

3: Eleverna ska kunna beskriva en förändring. Ni kan använda olika mönster och ställa olika frågor som exempelvis: Vad ändras från en figur till nästa? Denna fråga fokuserar på förändring från en figur till nästa.

4: Eleverna kan upptäcka relationen mellan talen i talföljden. Eleven ska alltså förstå att det inte är en uppräkningsav tal utan att det händer något mellan talen.

5: Eleverna ska upptäcka det som inte syns, vilket innebär att eleverna måste få syn på det som händer i talföljden. Eleven måste förstå att det finns en regelbundenhet, ett mönster, ett system mellan talen som kan varieras i oändlighet.

6: Upptäcka talföljders olika uppbyggnad vilket innebär att talföljder inte alltid är uppbyggda med en konstant skillnad mellan talen eller som en multiplikativ tabell exempelvis 7, 14, 21, 28.... Eleverna måste upptäcka att talföljder kan vara uppbyggda på andra sätt såsom 42, 43, 45, 48, 52 ... skillnaden mellan talen ökar med ett för varje steg eller exempelvis 20, 40, 80, 160, 320... varje tal bildas genom att det föregående talet multipliceras med två.

Referenser

Olteanu, C. (2007). *Vad skulle x kunna vara?: andragradsekvation och andragradsfunktion som objekt för lärande*. [Doktorsavhandling, Umeå universitet].

Likheter och olikheter

Robert Gunnarsson och Annica Otterborg, Högskolan i Jönköping

Matematiken använder sig av ett stort antal speciella symboler, var och en med specifik innebörd i olika sammanhang. En viktig del av matematiken handlar om att jämföra tal, och sådana jämförelser kallas relationer. Förståelse för relationer och innebörden av relationernas symboler, är i sin tur viktig för att kunna utveckla förmågan att använda och analysera matematiska begrepp, men också för att utveckla förmågan att samtala om och argumentera för beräkningar och slutsatser. I denna text behandlas de vanligaste symbolerna där relationerna är likheter och olikheter. Symbolerna är $=$, $\neq$, $>$, $<$.

Symbolen $=$ betyder ”är lika med” och används i uttryck som exempelvis

 $=$  och $5 = 5$

för att beteckna att ett tal har samma värde som ett annat tal, eller att något är lika mycket som, eller samma antal som, något annat.

Symbolen $\neq$ betyder ”är inte lika med” och används till exempel i uttryck som

 $\neq$  $15 \neq 14$ och $4 \text{ kakor} \neq 2 \text{ kakor}$.

Symbolen används för att beteckna att två tal inte har samma värde, eller att något inte är lika mycket som, eller har samma antal som, något annat.

Symbolen $>$ betyder ”är större än” alternativt ”är fler än” och används när vi vill visa att ett tal är större än ett annat tal eller att ett antal är fler än ett annat antal. Symbolen kan användas exempelvis så här:

 $>$  > 1 eller $10 \text{ år} > 5 \text{ år}$.

Symbolen $<$ betyder ”är mindre än” alternativt ”är färre än” och används när vi vill visa att ett tal är mindre än ett annat eller att ett antal är färre än ett annat antal. Symbolen används exempelvis som här:

 $<$  < 143 eller $1 \text{ vecka} < 2 \text{ veckor}$.

Vi talar framförallt om två olika sorters relationer: likheter och olikheter. I en likhet används likhetstecknet, symbolen $=$, för att indikera att två enheter av en storhet är lika

stora eller att två grupper har samma antal av någonting. Motsatsen till en likhet betecknas med ett icke-likamedtecken, $\neq$. Denna symbol kan användas till exempel när de två grupperna inte har samma antal. När man vill påpeka att ett antal är fler än ett annat antal använder vi istället olikhetstecknet $>$. Om vi istället vet att, och vill påpeka att ett antal är färre än ett annat antal så använder vi olikhetstecknet $<$.

Olikhetstecknen benämns efter hur man läser dem i vanlig text, från vänster till höger. Alltså kallas $<$ för ”mindre än” (som t.ex. i $35 < 53$, som läses ”35 är mindre än 53”) och $>$ kallas för ”större än” (så utläses t.ex. $321 > 123$ som ”321 är större än 123”). Det är ganska vanligt att elever blandar ihop olikhetstecknen, och inte vet om att symbolen $>$ heter ”större än” eller att $<$ heter ”mindre än”. Det viktiga är inte alltid att det heter just ”större än” eller ”mindre än”. Det viktiga är relationen de beskriver. När vi vill byta uttrycksform från symboler till en mer retorisk form så måste vi kunna skilja på de båda olikhetstecknen också utifrån vad de heter. Vi tar ett exempel: Om vi har två grupper med fem personer i den ena gruppen (A-gruppen) och tre personer i den andra gruppen (B-gruppen), så är det fler i A-gruppen än i B-gruppen, men då måste det också logiskt vara färre i B-gruppen än i A-gruppen).

Beroende på hur vi skriver relationen $5 > 3$ eller $3 < 5$ så använder vi olika olikhetstecken, men det beskriver samma relation, se figur till höger.

Om vi däremot vill läsa det vi skrivit så måste vi kunna skilja på ”större än” eller ”mindre än”.

Olikheten $5 > 3$ kan läsas ut som ”fem är större än tre”, men kan inte läsas som ”fem är mindre än tre”. Här är det viktigt att kunna skilja på vad symbolerna kallas och inte bara vilken relation de representerar.

Olikheten $5 > 3$ kan illustreras



eller



Ett vanligt förekommande problem för elever är att skilja på olikhetstecknen när de inte står tillsammans med två tal utan bara tillsammans med ett tal. Flera elever har svårt att säga om till exempelvis ” < 25 ” står för ”mer än 25” eller ”mindre än 25”. Man har också sett att liknande problem uppkommer när elever skriver kedjor av olikheter. Man kan misstänka att sådana problem med att använda rätt olikhetstecken som i uppgiften nedan, ett tal större än 5 och mindre än 10, grundar sig i elevers problem med att se vad de olika olikhetstecknen innebär.

Ett tal är större än 5 och mindre än 10. Hur kan du skriva det?

a) $5 < \square > 10$

c) $5 > \square > 10$

b) $5 > \square < 10$

d) $5 < \square < 10$

Här är alternativ b) $5 > \square < 10$ ett lockande alternativ (med ett större än vid 5:an och ett mindre än-tecken vid 10:an). Men det är en felaktig kedja av olikheter, här står ju faktiskt att 10 är större än något som är mindre än 5.

Baserat på matematikdidaktisk forskning om hur elever uppfattar och använder symboler för likheter och olikheter kan vi därmed ställa upp ett antal tänkbara kritiska aspekter. Dessa aspekter är sådana som man kan anse att eleven måste få syn på för att lära sig förstå och kunna använda symbolerna för likheter och olikheter.

Den logiska bakgrunden till symbolerna och undervisning om olikheter

Det finns en logisk bakgrund till de olika tecknen för relationer. Vi har hittills behandlat fyra olika symboler ($=$, $\neq$, $>$, $<$). Men i grunden är det bara tre; lika med ($=$), större än ($>$) och mindre än ($<$). Det fjärde tecknet, ”inte lika med” ($\neq$), är motsatsen till likhetstecknet. De andra två tecknen är dock inte varandras motsatser. En vanlig missuppfattning är till exempel att ”större än” är motsatsen till ”mindre än”. Men om en mamma säger till sitt barn att ”du får inte ta fler än två kex”, då tar barnet förmodligen inte färre än två kex. Det mest troliga är att barnet kommer ta precis två. ”Inte fler än” betyder alltså inte ”färre än”. Med andra ord är motsatsen till ”fler än” inte ”färre än”. Mammans ord ”Inte fler än två” kan, som i det här exemplet, vara färre än två, men det kan också visa sig vara lika med två kex. Motsatsen till ”fler än” är alltså färre än eller lika med.

Beteckningen, att stryka över likhetstecknet för att symbolisera ”inte lika med”, är ett sätt att skriva som även återkommer i andra sammanhang inom matematiken. Till exempel betecknas motsatsen till ”större än”, det vill säga ”inte större än”, med ett överstruket större-än-tecken ($\nless$) och på samma sätt skrivs ”inte mindre än” med överstruket mindre-än-tecken ($\nless$). I praktiken används dock inte dessa ”icke-olikhetstecknen”. Istället används ofta ”större än eller lika med” ($\geq$) som motsats till ”mindre än”. Om barnet, enligt det tidigare exemplet, inte får ta fler än två kex så innebär det att barnet får högst två kex. En sådan relation brukar beskrivas med ”mindre än eller lika med” ($\leq$). I exemplet med barnet som får kex skulle vi kunna skriva med symboler: antal kex som barnet får ta ≤ 2 .

En diskussion kring den logiska bakgrunden till symbolerna är viktig för att eleverna skall kunna utveckla sin förmåga till att föra och följa matematiska resonemang och kunna dra slutsatser.

Undervisning om beräkningar som innehåller likheter

För att gynna en progression där eleverna från åk 1–3, genom åk 4–6 och till åk 7–9 ska kunna utveckla sin förståelse för beräkningar behöver de utveckla en djup förståelse för relationssymbolerna. Här pekar forskningen ut förståelsen för likhetstecknets innebörd som en viktig aspekt. Många elever har inledningsvis en uppfattning av likhetstecknet som en uppmaning att utföra en beräkning. En sådan uppfattning kan leda till att elever beräknar $3 + 4 + 5$ genom att skriva $3 + 4 = 7 + 5 = 12$ (vilket är ett missbruk av likhetstecknet, då det är bättre att skriva $3 + 4 + 5 = 7 + 5 = 12$). Man kan beskriva det som att eleven behöver erfara likhetstecknet som en symbol för en relation mellan två tal.

Det är en sådan erfarenhet av likhetstecknet som man vill förmedla genom att konfrontera eleverna med uppgifter där högerledet består av två termer varav den ena är okänd, som till exempel uppgiften $13 = \square - 4$. Matematikdidaktisk forskning menar att det är ett tecken på en utvecklad förståelse för likhetstecknets innebörd i de fall en elev svarar att rutan står för talet 9. I det nationella provet i åk 3 våren 2011 gavs just denna uppgift. Då svarade endast 59% av eleverna rätt, och det vanligaste felsvaret var just 9, som ca 18% svarade. Man kan därför befara att många elever kommer att få problem med beräkningar, och speciellt ekvationer (i åk 4–6 och senare), om de inte förstår att det som står på ena sidan om likhetstecknet är lika mycket som det som står på andra sidan.

Tänkbara kritiska aspekter

1: Se att relationen jämför kvantiteter.

Eleverna måste få syn på att symbolerna ($=$, $\neq$, $>$, $<$) jämför något som är kvantifierbart. Att de inte jämför andra egenskaper så som exempelvis färg, eller att det är otydligt om vi använder dem för att beskriva personer, som ”Edvin $>$ Ebba” (det är otydligt vilken egenskap vi egentligen jämför, om det är längd, ålder, eller antalet bokstäver i namnet).

2: Förstå varför tecknen har olika utseende och hur det hänger ihop med vad de kallas.

Eleverna måste förstå varför symbolerna ($=$, $\neq$, $>$, $<$) skiljer sig utseendemässigt, exempelvis se att de båda olikhetstecknen ($>$ och $<$) är vända åt var sitt håll för att de beskriver relationen mellan talen på båda sidor om dem. (I syfte att lära sig just de här tecknen används ju ibland symboliken med något, till exempel en krokodil, som gapar åt det största och vänder ryggen åt det minsta.). Eleverna måste också få syn på när det är viktigt att kunna skilja på ”större än” och ”mindre än”.

3: Se att symbolerna $>$ och $<$ betyder olika saker och vad tecknen innebär.

Eleverna måste få syn på att man inte kan använda vilket olikhetstecken som helst. Tecknen har en bestämd betydelse. De måste få syn på när de kan använda eller inte

använda respektive symbol, till exempel kan $5 > 4$ inte skrivas med det andra tecknet, det vill säga $5 < 4$ är inte korrekt. Eleverna måste också få möjlighet att erfara olikhetstecken med bara ett led, som till exempel hur " < 25 " skulle kunna tolkas.

4: Se att det finns en motsats till = som kan skrivas $\neq$, och när den kan användas.

Eleverna måste få syn på den logiska bakgrunden till symbolerna. De måste få syn på när de kan använda eller inte använda respektive symbol, till exempel $5 > 4$, men också $5 \neq 4$. Om vi har nio hela äpplen fördelade i två plastkassar så vet vi inte säkert att det är fler i den ena kassen än i den andra (det kan ju vara tvärtom). Det enda man säkert vet är att det inte är samma antal i båda kassarna.

Att använda variationsteorin för att låta eleven få syn på den kritiska aspekten

Enligt variationsteorins perspektiv kan olika slag av variation i de exempel man visar, ge möjlighet för eleven att få syn på den kritiska aspekten. Här ger vi exempel på möjliga variationsmönster för några av de kritiska aspekterna.

För att eleven ska få möjlighet att förstå att relationen jämför kvantiteter kan vi lyfta fram exempel som titeln på ett känt barnprogram "Fem myror är fler än fyra elefanter". Vi kan ställa frågan om man kan beskriva denna titel med uttrycket $5 \text{ myror} > 4 \text{ elefanter}$. Genom att utgå från ett och samma uttryck (hålla uttrycket **konstant**) kan vi visa en **variation** i hur uttrycket kan tolkas.

- Vi skulle kunna tolka $5 \text{ myror} > 4 \text{ elefanter}$ som "fem myror är fler än fyra elefanter", och då stämmer det ju.
- Vi skulle kunna tolka $5 \text{ myror} > 4 \text{ elefanter}$ som "fem myror väger mer än fyra elefanter", och då stämmer det ju inte.
- Vi skulle kunna tolka $5 \text{ myror} > 4 \text{ elefanter}$ som "fem myror är äldre än fyra elefanter", och då har vi ingen aning om det stämmer.

På detta vis vill vi lyfta fram att det öppnar för olika tolkningar om vi använder olika enheter på vardera sidan av relationen. Vi har svårt att jämföra myror med elefanter utan att precisera vilken egenskap (antal, vikt, ålder) hos grupperna myror och elefanter vi jämför.

Vi kan lägga till ytterligare ett exempel: "det är mindre barn i simhallen idag än igår". Vi skulle ha svårt att beskriva även detta med matematiskt symbolspråk. Uttrycket "barn i simhallen idag $<$ barn i simhallen igår" saknar bestämd mening. Det är oklart om barnen som var där igår var längre eller äldre än de barn som är där idag. I dessa fall, myror och elefanter respektive barn i simhall, är det matematiska symbolspråket olämpligt för att beskriva relationen.

Vi kan som **kontrast** till dessa två exempel diskutera vad $5 \text{ bollar} > 3 \text{ bollar}$ kan innebära. Så länge vi behandlar likvärdiga bollar så spelar det ingen roll om vi tolkar det som fler eller tyngre. Men vi kan få problem med betydelsen om vi menar 5 tennisbollar > 3 basketbollar. Däremot kan vi alltid säga att $5 > 3$ om talen 5 respektive 3 och på samma sätt stämmer det alltid att antalet 5 stycken är fler än 3 stycken.

För att hjälpa eleverna att få syn på den kritiska aspekten att de olika tecknen betyder olika saker, kan vi ge exemplet med sju tändstickor som fördelas i två tändsticksaskar. Låt en rektangel representera antalet tändstickor i en ask, och låt siffran beteckna att vi vet hur många tändstickor det finns i just den asken. Då kan vi be eleven att sätta rätt symbol mellan askarna.

- a)  
- b)  
- c)  
- d)  

I det första exemplet har vi alltså fem tändstickor i den ena asken och två i den andra. Det är alltså fler i den vänstra asken. I nästkommande två exempel måste eleven själv fundera över hur många det kan finnas i den andra asken. I det sista exemplet (d) så vet vi ju egentligen bara att det är olika antal i de båda askarna. Den enda symbol som i så fall kan användas är icke-likamedtecknet. Vi bör ställa frågan om vilka symboler som kan användas för att visa relationen mellan antalet i de båda askarna.

Med dessa exempel vill vi lyfta fram att olika symboler har olika betydelse och att vi inte kan använda både ”fler än” och ”färre än” samtidigt. Däremot kan vi använda ”icke-likamed” samtidigt som något av olikhetstecknen. Ur ett variationsteoretiskt perspektiv är denna typ av variation ett exempel på fusion, där flera kritiska aspekter lyfts fram samtidigt för att lyfta fram det som är själva lärandeobjektet.

Referenser

Hattikudur, S., & Alibali, M. W. (2010). Learning about the equal sign: Does comparing with inequality symbols help? *Journal of Experimental Child Psychology*, 107(1), 15–30. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2010.03.004>

Del 6: Moment B – kollegialt arbete

Diskutera

- Hur bemöter ni vad eleverna säger i matematikklassrummet? Utgå från de fyra punkterna om olika diskurser på sidan 3 i texten "Sociomatematiska normer i algebraklassrummet" och från filmen "Olika sätt att se på mönstret".
- Vilken betydelse ger ni det läromedel ni valt och hur kritiska tillåts ni vara till det?
- I texten "Kritiska aspekter och variation av innehåll" och i texten som handlar om likhetstecknet ges exempel på kritiska aspekter och variationsmönster. Vilka aspekter uppmärksammade ni som kritiska för era elever i del 5?
- Vilka aspekter uppmärksammade ni som kritiska för eleverna i filmen "Olika sätt att se på mönstret"?
- Vilka aspekter fokuserade läraren på i filmen "Olika sätt att se på mönstret"? Ge exempel på hur variation används under lektionen.

Förbered en aktivitet

Planera tillsammans en aktivitet om likheter och olikheter. Utgå från aspekterna som eleverna ännu inte har urskilt när ni genomförde aktiviteten i del 5 och diskutera på vilket sätt ni ska skapa variationer i aspekterna som eleverna ska få syn på. Ni kan använda "Mall – Planering av lektion". Om ni undervisar elever i olika årskurser, kan ni behålla samma innehåll men variera exempel/aktiviteter utifrån elevgruppen. Använd punkt 10 i "Lektionsobservation – Protokoll" för att dokumentera genomförandet av lektionen.

Del 6: Moment C – aktivitet

Genomför den planerade aktiviteten.

Del 6: Moment D – gemensam uppföljning

Diskutera

- Diskutera era observationer utifrån anteckningarna som ni gjorde i "Lektionsobservation – Protokoll" punkt 10.
- Vilka sociomatematiska normer finns i era klasser?
- Har ni upptäckt någon norm i era klassrum som ni skulle vilja förändra? Hur kan ni göra detta?
- Finns det normer som är svårare än andra att förändra? Varför?
- Vilka variationer har ni skapat i klassrummet? Utmanade detta elevernas tänkande och resonemang?

Reflektera

Avsätt de sista tio minuterna för att reflektera över:

- Vad gjorde jag/vi?
- Vad lärde jag mig?

Sammanfatta tillsammans arbetet med denna del i några punkter.

Fördjupning

Del 6: Fördjupning

Läs

I en internationell studie där undervisning i olika länder jämförs beskrivs särskilt den japanska modellen med Lesson study, om detta kan ni läsa mer i Stigler och Hieberts artikel.

Material

Material



Att utveckla matematikundervisningen
J. W. Stigler och J. Hiebert

Att utveckla matematikundervisningen:

Uppslag från TIMSS videostudie

Här diskuteras några resultat från den första och andra TIMSS Video study. Några slutsatser om hur undervisning kan utvecklas dras utifrån dessa erfarenheter. Artikeln är inte skriven med tanke speciellt på svenska förhållanden men innehållet är betydelsefullt också för oss och de lärdomar som dras passar även för svenska förhållanden.

Vi har arbetat 10 år i ett unikt forskningsprojekt med syftet att dokumentera typisk matematikundervisning i flera länder över hela världen. Dessa studier, kända som "TIMSS Video Studies", använder en ny metod som vi kallar "the video survey". Denna metodik är resultat av en samverkan mellan två olika forsknings-traditioner som sällan kombinerats tidigare.

- *Survey research.* Denna tradition omfattar storskalighet och slumpmässigt urval i avsikt att karaktärisera nationella trender (ofta med hjälp av enkäter).
- *Qualitative classroom research.* Ofta studeras endast ett eller ett fåtal klassrum och man använder videoinspelningar för att få närgångna beskrivningar av klassrumsprocessen.

Vi har använt video för att studera undervisning, men har samlat in videoinspelningar ur ett nationellt urval av matematiklärare i skolår 8. De inspelade lärarna är inte valda

för att de är särskilt erfarna, effektiva eller speciella på något sätt. De utgör helt enkelt ett slumpmässigt urval av lärare som undervisar för dem helt vanliga lektioner.

Bortsett från att den stora mängden data har givit oss logistiska utmaningar, har insamlingen och analysen av dessa hundratals timmar genererat värdefull information om vad som verkligen händer på matematiklektioner i åttan i USA och andra länder. Varför är vi intresserade att studera ett slumpmässigt urval av helt vanliga lektioner? Det finns flera skäl. För det första representerar dessa lektioner tillsammans hur "genomsnittlig" undervisning kan se ut i USA. Även om den mesta forskningen inte studerar "genomsnittlig" undervisning, är det just sådan som de flesta elever är med om. Om ett land vill förbättra undervisning och lärande måste man förbättra genomsnittet, "standardrutinerna" i undervisningen. Även små förändringar av genomsnittet kan påverka miljoner elever. Detta är ett nytt sätt att formulera problemet hur undervisning ska kunna förbättras.

Ett annat skäl att studera ett nationellt urval av lektioner är att förstå vilka effekter initiativ beträffande policy haft på nationell nivå. Många reformer har strävat efter att förbättra undervisningen. Men för att lyckas måste de passera hela vägen in i klassrummen. De flesta ansträngningar att förbättra undervisningen verkar göra halt strax utanför klassrumsdörren – alla tecken tyder på att klassrumspraktiken inte ändrats speciellt mycket under de senaste 100 åren, trots många försök (gäller förhållandena i USA, övers anm).

Slutligen ger studier av lektioner i olika kulturer forskare och lärare möjligheter att upptäcka alternativa idéer om hur matematikundervisning kan bedrivas, samt att betrakta amerikansk undervisningspraktik ur ett mer objektivt perspektiv. Att se på lektioner från andra länder ställer frågor kring de utgångspunkter som styr praktiken i vårt land. Det är ofta omtumlade att omväxlande titta på utländska och inhemska inspelningar. I denna artikel redovisar vi översiktligt vad vi fann i den första *TIMSS Video study* (1996) och i den senaste (1999). Vi drar sedan några slutsatser om hur undervisningen kan förbättras.

Den första TIMSS Video Study

Den första TIMSS Videostudie studerade nationella urval av matematiklektioner i skolor 8 från tre länder, Tyskland, Japan och USA. Resultat från studien finns rapporterat på annat håll (tex Stigler & Hiebert, 1999) så vi presenterar inte dessa här. Däremot är det viktigt att beröra något av det vi lärde oss av den första studien, särskilt som det är av betydelse för den efterföljande studien och för slutsatserna om utvecklingen av undervisningen. Vi koncentrerar oss på tre punkter.

Avsaknaden av gemensamt språk

Detta var något vi hade misstänkt tidigare (det var faktiskt ett av skälen till att vi valde att använda videospelning istället för enkäter), men nu är vi betydligt stärkta i vår övertygelse om dess betydelse. När videobanden börja komma in och vi började diskutera vad vi såg på dem blev det uppenbart

att olika personer ser olika saker och beskriver det de ser på olika sätt. Ett exempel, i den första studien försökte vi markera var på respektive video varje matematikproblem (uppgift) börjar och slutar. Vi tänkte att det kunde hjälpa oss att utveckla en effektiv strategi för att göra analyser. Vi kunde inte komma överens om vad ett "problem" är (vi lyckades bättre i den senaste studien). Poängen är att avsaknaden av ett gemensamt språk för att beskriva undervisning gör det mycket svårt för lärare att utbyta professionellt kunnande.

Glapp mellan policy och praktik

Delvis beroende på avsaknaden av ett professionellt språk får försöken att förändra klassrumspraktiken ofta inga eller ej avsedda resultat, efter att de har filterats ner genom de bristfälliga kommunikationskanaler vi använder för att få ut ny policy. Denna svårighet blir allt mer känd (se tex Elmore, 2000). I den första videostudien frågade vi lärarna om de läst om förändrad matematikundervisning, tex från NCTM, och om de omsatt något av det som rekommenderas i sin undervisning. Vi fann att en majoritet av lärarna hade läst publikationer av det slaget och att de flesta lärarna hävdade att de också infört nya idéer på sina lektioner. Från videospelningarna kunde vi dock konstatera en stor spridning beträffande lärarnas tolkningar av reformerna och få tecken på att det som författarna till reformerna avsett faktiskt återfanns i vårt urval av klassrum.

Undervisning – en kulturell aktivitet

Slutligen kunde vi i vår första studie konstatera att undervisning är en kulturell aktivitet som lärs implicit, som är svår att se inifrån den egna kulturen och svår att förändra. Vi slogs av och förvånades över den homogenitet i undervisningen, som vi observerade inom respektive land samt den stora skillnaden mellan metoderna från de olika länderna i studien. Även i ett land som USA, med så stor mångfald i språk, etnicitet och ekonomiska förhållanden och med ett skolsystem som är helt decentraliserat till lokala myndigheter, var den nationella variationen i undervisningen i matematik i klass 8 mycket mindre än vi förväntat.

Japan uppvisade ett ovanligt och imponerande undervisningsmönster som påminde ytterst lite om de mönster som observerades i Tyskland eller USA. Eftersom Japan var det enda högpresterande landet (som det kommer till uttryck i de tester som ingår i TIMSS), antog många att USA skulle behöva kopiera de japanska metoderna om man ville uppnå samma kunskapsnivåer som de japanska eleverna uppvisar. Naturligtvis kan en sådan ståndpunkt inte byggas under med en studie som endast omfattar ett högpresterande land. Men frågan om huruvida de japanska undervisningsmetoderna är nödvändiga för att nå bra resultat är bra och den försökte vi besvara i vår nästa studie.

Den nya studien

Den nya TIMSS videostudie (TIMSS 1999 Video Study) utvecklade den första studien på två väsentliga punkter.

- 1 Den här gången medverkade sju länder istället för tre – Australien, Tjeckien, Hong Kong, Japan, Nederländerna och Schweiz förutom USA. Samtliga länder presterade signifikant bättre än USA på matematiktestet för skolår 8 i TIMSS 1995.
2. Förutom matematikundervisning studerade vi också undervisningen i NO-ämnen (science). Den delen kommer att rapporteras under första halvåret 2004.

Studiens design var mycket enkel: I varje land valdes 100 matematiklektioner i klass 8 slumpmässigt ut och videofilmades vid något tillfälle under skolarbetet. Inspelningarna överfördes till digitalt format, transkriberades och översattes till engelska. De analyserades sedan av en internationellt sammansatt forskargrupp vid LessonLab i Santa Monica.

Kodning och analys fokuserade lektionens organisation, det matematiska innehållet och på vilket sätt detta innehåll hanterades under lektionens gång. Utförliga beskrivning av studien – metod och resultat – finns i Hiebert m fl (2003). Rapporten och en uppsättning CD med 28 fullständiga

lektioner, 4 från varje land, finns tillgängliga från LessonLab (2004). Vi kan inte presentera alla resultat här utan lyfter endast fram dem som vi anser är speciellt viktiga.

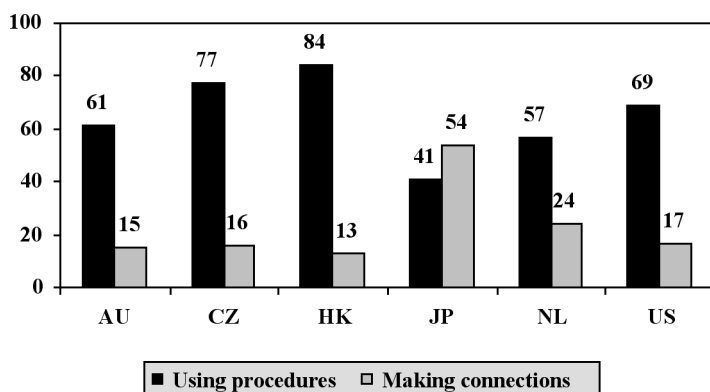
Resultat 1: Japan är unikt.

Trots karaktären av "undervisningskonst" på de japanska lektionerna framgår det tydligt av den senaste studien att god kunskapsutveckling inte kräver undervisning på det japanska sättet. I studien fann vi att de japanska undervisningsmetoderna på många sätt var avvikande från vad vi såg i de övriga länderna. Vi menar inte att vi inte kan lära oss något från undervisningen i Japan, endast att man kan lyckas utan att kopiera japansk undervisning. Det kan ses som ett positivt resultat eftersom japanska metoder inte på något enkelt sätt skulle kunna överföras till den amerikanska kulturen, fastän delar av det skulle kunna vara extremt värdefullt.

Resultat 2: Effektiv undervisning har många ansikten.

Trots att Japan var det land som uppvisade det tydligaste undervisningsmönstret, uppvisade varje land en unik uppsättning karakteristiska drag. Det kan vara av intresse att många av de olika beståndsdelar i undervisning som livligt debatteras i USA tycks variera mellan de sex länderna, vars resultat alla överstiger våra. Till exempel används räknare och realistiska problem (real-world problem) mycket ofta i Nederländerna medan det är det motsatta förhållandet i Japan. Trots det presterar elever från båda dessa länder mycket bra.

Ett annat exempel är frågan om vilken typ av uppgifter eleverna ska arbeta med på matematiklektionerna: Färdighetsträning av grundläggande räknemetoder å ena sidan och rika matematiska problem som engagerar eleverna och får dem fokuserade på begrepp och relationer mellan matematiska idéer å den andra. Vi kodade varje uppgift i studien. De två vanligaste typerna var "Using Procedures" och "Making Connections". Fördelningen mellan dessa två problemtyper framgår av figur 1.



Figur 1.

Procentuell fördelning mellan uppgifter kodade "Using Procedures" respektive "Making Connections".

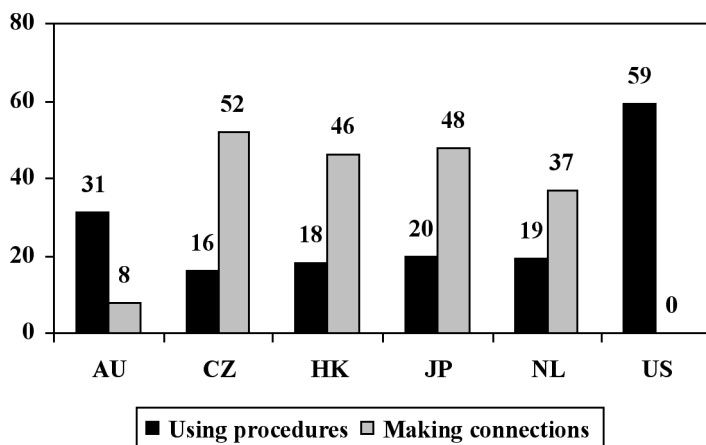
Figur 1 visar i första hand att Japan utmärker sig, hela 54 % av uppgifterna av kategorin Making Connections. Men lägg också märke till att i Hong Kong, vars elever tillhör de allra högst presterande i studien, är förhållandet det motsatta och endast 13 % av problemen är av motsvarande sort. I alla länder förekommer båda problemtyperna, men fördelningen mellan dessa verkar inte kunna säga något om hur väl eleverna presterar vid testning.

Resultat 3:

Fokus på implementering

Vi tar oss slutligen an frågan om vad, om något, de högpresterande länderna har gemensamt. Svaret ligger inte i de ytliga beskrivningarna av undervisning, såsom hur

organisationen i klassrummet är beskaffad, vilken teknologi som används eller ens vilken typ av problem som presenteras för eleverna, utan i *på vilket sätt* problemen behandlas under lektionsförloppet. I den senaste videostudien kodades varje problem två gånger, först för att karakterisera problemet så som det *presenterades* och sedan en andra gång för att beskriva hur det *bearbetades* i undervisningen. Ett "Making Connections"-problem kan antingen bearbetas som ett sådant eller så kan läraren transformera det till en uppgift av en annan typ, oftast till ett "Using Procedures"-problem. Figur 2 visar hur stor andel av de problem som kodats som Making Connections-problem som faktiskt implementerades som sådana respektive gjordes om till uppgifter av typen Using Procedures.



Figur 2.

Procentuell fördelning mellan "Making Connections"-problem som bearbetades som "Using Procedures" respektive "Making Connections".

Figur 2 visar ett annat mönster än det vi kunde se i figur 1. Här verkar de högpresterande länderna uppvisa en betydligt större likhet. I Hong Kong och Japan, som skiljde sig så stort åt beträffande de presenterade problemen, uppvisar en betydligt större samstämmighet när det gäller hur stor andel av de presenterade problemen av typen "Making Connections" som verkligen bearbetades som sådana. En minoritet av problemen görs om till den mindre utmanande sorten, Using Procedures. Det allra mest slående är att inget "Making Connections"-problem i USA bearbetades så som det var tänkt. Istället gjorde alla de amerikanska lärarna om problemen till färdighetsövningar.

I den amerikanska debatten ställs den grupp som menar att det är för lite fokus på begreppsförståelse mot en annan grupp, som menar att den stora betoningen på begrepp på bekostnad av de grundläggande färdigheterna bromsar elevernas utveckling (se t ex Loveless, 2003). Vår forskning antyder att överbetoning av begrepp och förståelse knappast kan vara förklaringen till de svaga prestationerna hos amerikanska elever. Vad de flesta elever i USA faktiskt gör är att öva på färdigheter. De verkar sällan vara engagerade i seriösa studier av matematiska begrepp under lektionerna.

Att förbättra undervisning

Vi har kortfattat berört TIMSS videostudie. Vilka slutsatser om hur undervisning kan förbättras kan dras från forskningen? Vi diskuterar kring tre övergripande idéer.

Fokusera undervisningens beståndsdelar, inte lärarna

De flesta ansträngningar som i dagsläget görs för att förbättra undervisningens kvalitet fokuserar lärarna: hur kan man rekrytera fler kvalificerade lärare och hur kan brister i nuvarande lärares kunande botas?

Vi menar att fokusering på lärarna, även om det kan ha sina poänger, inte är lika viktig som att fokusera hur undervisningen kan förbättras – de metoder lärarna använder i

klassrummet. Om undervisningen är kulturellt betingad använder de flesta lärare inom samma kultur liknande undervisningsmetoder. Faktum är att de metoder som doktorerade matematiker använder för att undervisa sina amerikanska studenter inte nämnvärt skiljer sig från de som amerikanska lärare i årskurs 8 använde i vår studie. Lärare och lärarutbildare måste finna vägar att förbättra sättet att undervisa, att gradvis och kontinuerligt förbättra kvaliteten på det de flesta elever får möta i klassrummet.

Fokus på undervisning måste undvika frestelsen att endast se till de ytliga aspekterna: organisationen, verktygen, kursplanen och läroböckerna. Undervisning som en kulturell aktivitet, sättet som lärare och elever interagerar kring ämnet, är mer avgörande än det materiel som läraren använder. I den nya videostudien gav amerikanska lärare visserligen eleverna rika problem med stor potential (se fig 1), men de använde sina traditionella undervisningsmetoder för att förändra problemen och förminskade deras undervisningspotential. Lärare och lärarutbildare måste finna sätt att förändra själva undervisningskulturen.

Förändra undervisningen genom att medvetandegöra kulturella vanor

Det enda sättet att förändra undervisningen är genom att använda metoder som man vet kan förändra kulturen. Viktigast bland dessa är en analys av praktiken som kan medvetandegöra de kulturella vanorna så att dessa kan utvärderas och förbättras. En nyligen genomförd studie av ett stort kompetensutvecklingsprogram (Hill & Ball, under tryckning) visade att analys av verksamheten var en av tre viktiga faktorer för att förutsäga lärares ökade "content knowledge for teaching" (ämneskunnande relevant för undervisning). Analys av klassrumsverksamhet är viktig av flera orsaker. Det ger lärare möjlighet att analysera hur undervisningen påverkar lärandet och att noga undersöka de fall där inget lärande sker. Det ger även lärare den skicklighet de behöver för att kunna integrera nya idéer i sin undervisning. Försök att genomföra förbättringar utan analys av verksamheten lyckas troligen inte.

Slutligen måste lärare och lärarutbildare finna sätt att ingjuta ny kunskap i förbättringsarbetet och att dela med sig av den kunskapen till framtida generationer av lärare (Hiebert, Gallimore & Stigler, 2002). Som John Dewey påpekade för länge sedan är något av det sorgligaste med amerikansk utbildning att den visheten som finns hos våra skickligaste lärare för alltid går förlorad för yrket när dessa går i pension.

Vilken typ av kunskap behöver lärare? De behöver dels teorier och empirisk forskning och dels olika idéer om hur dessa kan realiseras. En grupp amerikanska lärare som till exempel vill förbättra sin användning av Making Connections-problem står inför en väldig utmaning: de har kanske aldrig upplevt hur man arbetar med sådana så att deras fulla potential tas i anspråk i undervisningen. Lärare behöver ha tillgång till exempel – kanske på video som de som samlats in i TIMSS studier. De behöver analysera sådana exempel och ta ställning till om, och i så fall hur, exemplen kan integreras i den egna undervisningen. De behöver också analysera vad som händer när de provar något nytt: hjälper det eleverna att bättre nå målen? Slutligen behöver de dokumentera vad de lär sig och dela med sig av det till sina kollegor. Sålunda behöver lärare delta i arbetet med att bygga en användbar kunskapsbas för yrket.

James W. Stigler är professor i psykologi vid UCLA i Los Angeles och chef för Lesson Lab.

James Hiebert är professor vid lärarutbildningen University of Delaware i Newark.

- Elmore, R. F. (2000). *Building a new structure for school leadership*. Washington, DC: Albert Shanker Institute.
- Hiebert, J., Gallimore, R., & Stigler, J.W. (2002). A knowledge base for the teaching profession: What would it look like and how can we get one. *Educational Researcher*, Vol. 31, No. 5, 3-15.
- Hiebert, J., m.fl. (2003). *Teaching mathematics in seven countries: Results from the TIMSS 1999 Video Study* (NCES 2003-013). Washington, DC: U.S. Department of Education, National Center for Education Statistics.
- Hill, H. & Ball, D. (under tryckning). Learning Mathematics for Teaching: Results from California's Mathematics Professional Development Institutes. *Journal for Research in Mathematics Education*.
- LessonLab (2004). [Elektronisk] Tillgänglig: www.lessonlab.com [2004-03-04]
- Loveless, T. (2003). [Elektronisk] *Trends in math achievement: The importance of basic skills*. Presentation at the Secretary's Summit on Mathematics, Washington, D.C. Tillgänglig: <http://www.ed.gov/inits/mathscience/loveless.html>. [2003-07-16]
- Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. New York: Free Press.

Översättning av redaktionen.