Resonemangsförmåga

Örjan Hansson, Högskolan Kristianstad

Resonemangsförmåga handlar om att utveckla ett logiskt och systematiskt tänkande för att föra, följa och värdera matematiska resonemang. Det kan beröra många andra förmågor och till exempel knyta an till matematiska begrepp och metoder, lösningsförslag till problem och modelleringssituationer. Resonemangsförmåga innebär att kunna urskilja de grundläggande idéerna i ett matematiskt resonemang och särskilja centrala delar från detaljer och bärande idéer från teknikaliteter. Till resonemangsförmåga hör även en kreativ komponent i att formulera och undersöka hypoteser, generalisera och sammanlänka olika kunskaper och idéer.

Om vi betraktar resonemang vid problemlösning så innefattar problemlösningsförmågan att ställa upp och lösa problem och utforma olika strategier, medan resonemangsförmågan omfattar gjorda antaganden, bärande idéer samt insikten om en strategi kan leda till ett korrekt lösningsförslag (Niss & Højgaard, 2011). Det handlar även om att förstå vad ett matematiskt bevis är och hur det skiljer sig från matematiska resonemang baserade på intuition eller olika exempel, och att kunna omvandla informella resonemang till generella påståenden och faktiska bevis.

I princip kan rena rutinberäkningar falla inom resonemangsförmågan – vad en elev uppfattar som en rutinberäkning kan en annan elev uppfatta som en krävande uppgift. Kunskap om och genomförandet av beräkningen kan här räknas till procedurförmågan medan analys, överblick och giltighet av beräkningarna räknas till resonemangsförmågan.

Resonemangsförmågan är alltid relevant då vi bedömer giltigheten av matematiska påståenden. Det kan handla om giltigheten av regler och satser, men också om ett svar till en fråga eller uppgift är riktigt, eller om en problemställning eller en fråga är sakenlig. Resonemangsförmågan är betydelsefull i samband med problemlösning och modellering och står i nära relation till problemlösningsförmågan och modelleringsförmågan.

Resonemangsförmåga enligt TIMSS

Trends in International Mathematics and Science Study, TIMSS, omfattar mer än 60 länder och genomförs vart fjärde år. Studierna är betydelsefulla för många länders matematikundervisning och det är intressant att se hur man där ser på resonemangsförmåga. De situationer där man bedömer resonemangsförmåga är då eleven ska:

- analysera situationer och göra meningsfulla slutsatser utifrån given information
- generalisera påståenden och förhållanden utifrån specifika exempel
- göra kopplingar mellan olika kunskaper och matematiska idéer
- motivera, förklara och bevisa påståenden
- lösa uppgifter som inte är rutinuppgifter

Dessa fem punkter är en kortfattad sammanställning av de bedömningsramar som användes för resonemangsförmåga vid TIMSS 2011 och beskrivs i detalj av Mullis, Martin, Ruddock, O'Sullivan och Preuschoff (2009).

Induktiva och deduktiva resonemang

I samband med matematiska resonemang är det vanligt att skilja på induktiva och deduktiva resonemang. Induktiva resonemang ska inte förväxlas med matematisk induktion som är en bevismetod kopplat till induktionsaxiomet och naturliga tal.

Induktiva resonemang

Induktiva resonemang innebär att man sluter sig till ett generellt samband efter att ha studerat ett antal enskilda fall. Det är en kunskapsprocess där man blir varse om det allmänna utifrån det enskilda; denna typ av resonemang är central inom naturvetenskap då man bygger sina allmänna teorier från observationer, experiment. I matematik kan induktiva resonemang användas då man ställer upp hypoteser om ett förhållande, som att vinkelsumman i en triangel är 180^{o} efter att ha undersökt ett antal trianglar eller att summan av två udda tal blir ett jämnt tal efter att ha prövat olika exempel.

Deduktiva resonemang

Deduktiva resonemang är utmärkande för matematik och innebär att man utifrån givna regler och kända förhållanden genom en kedja av argument kan dra olika slutsatser eller bevisa giltigheten av påståenden. Man går, i motsats till induktiva resonemang, från det allmänna till det enskilda fallet.

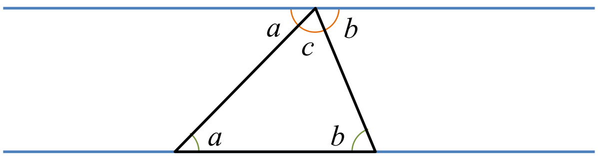
När det gäller vinkelsumman i en triangel så kan man med hjälp av Figur 1 föra följande deduktiva resonemang:

Drag två parallella linjer genom basen och det motstående hörnet i triangel. Vinkeln på den räta linjen, markerad orange, är 180^{o}. Alternatvinklar, a respektive b, är lika stora. Följaktligen är vinkelsumman i en triangel 180^{o}.

Skolverket

Figur 1

Illustration av ett deduktivt resonemang om vinkelsumman i en triangel



För påståendet att summan av två udda tal blir ett jämnt tal så kan ett deduktivt resonemang innebära att man betraktar två godtyckliga udda tal $2m+1$ och $2n+1$ för att konstatera att dess summa $(2m+1)+(2n+1) = 2(m+n+1)$ alltid blir ett jämnt tal. Andra exempel på deduktiva resonemang kan vara som i nedanstående fall där man löser en ekvation. I detta fall är förståelsen av den deduktiva processen och metodens giltighet kopplad till resonemangsförmågan:

$5x^2+19x–45 = 5x(x+2)$	(Multiplicera in $5x$ i parentesen)
$5x^2+19x–45 = 5x^2+10x$	(Subtrahera med $5x^2$)
$19x–45 = 10x$	(Addera 45 och subtrahera $10x$)
$9x = 45$	(Dividera med 9)
$x = 5$	

Sätt resonemangsförmåga i fokus

Det finns en risk att elevers resonemang och slutsatser blir osammanhängande i den dagliga matematikundervisningen. För att elever ska utveckla sin förmåga att självständigt genomföra matematiska resonemang är det väsentligt att de får stöd med att tydliggöra sina resonemang. Det kan ske genom att skapa situationer där resonemangsförmåga står i fokus och läraren får möjlighet att kommentera och komplettera elevers resonemang för att tydliggöra centrala idéer och när så är lämpligt lyfta fram deduktiva resonemang (Niss & Højgaard, 2011).

Diskussioner om matematiska resonemang kan till exempel initieras med hjälp av nedanstående tre uppgifter.

Uppgift 1

Elin tar med sig en termos hett kaffe till sin arbetsplats. Hon häller upp en kopp kaffe varannan timme och kan med en IR-termometer konstatera att värmen sjunker med 10 % för varje kopp. Hennes arbetskamrat Fabian drar slutsatsen att kaffets temperatur minskar med 5 % per timme.

Skolverket

Hur resonerar Fabian? Ge exempel på situationer där det går bra att resonera som Fabian gör. Hur skiljer de sig från fallet med Elins termos?

Uppgiften sätter ett resonemang i fokus och skapar förutsättningar för att diskutera och analysera matematiska resonemang som knyter an till linjära och exponentiella förlopp.

Uppgift 2

Martina har missat en matematiklektion och fått låna Adams anteckningar. Där står följande beräkningar utan vidare kommentarer:

$5x^2-30x+46$

$5(x^2-6x)+46$

$5(x^2-2\cdot 3x+3^2-3^2)+46$

$5((x-3)^2-3^2)+46$

$5(x-3)^2-45+46$

$5(x-3)^2+1$

Vilka frågeställningar kan ligga till grund för beräkningarna? Hur går du tillväga för att genomföra motsvarande beräkningar om du till exempel utgår från $3x^2+12x+11$? Vad kan du dra för slutsatser om $3x^2+12x+11$ efter att ha genomfört beräkningarna? Vad blir motsvarande beräkningar i det allmänna fallet ax^2+bx+c och vad kan man då utläsa om polynomet?

I samband med uppgiften kan man diskutera vilka idéer och centrala resonemang som ligger till grund för beräkningarna och vilken information om polynomet som kvadratkompletteringen ger och hur detta kan utnyttjas och generaliseras. Eleverna kan arbeta med uppgifter av ovanstående typ i mindre grupper för att under lärarledd diskussion redovisa sina resonemang och slutsatser i klassen.

Elevers resonemangsförmåga kan med fördel utvecklas genom att de arbetar med undersökande aktiviteter som inte är av rutinkaraktär. Det kan ske som i exemplen ovan där de får analyserar olika tankegångar och diskutera och generalisera centrala idéer och resonemang. Det kan även ske i samband med problemlösning och modellering då resonemangsförmåga alltid är betydelsefull i dessa sammanhang.

Uppgift 3

Ta ett tvåsiffrigt tal och vänd sifferföljden. Du har nu två tal. Subtrahera det mindre talet från det större. Vad kan du säga om resultatet?

Här får eleverna möjlighet att ställa upp hypoteser som de undersöker och försöker bevisa. Eleverna blir här intellektuellt utmanade och får tillfälle att upptäcka, analysera, förklara, och generalisera (Lin et al., 2012). Nedan sammanfattas några av de principer som Lin m.fl. (2012) lyfter fram i dessa sammanhang.

Första principen

- Främja en produktion av hypoteser genom att ge elever möjlighet att följa upp och reflektera över sina observationer.

Med observationer menas här ett systematiskt undersökande av olika fall för att dra slutsatser och göra generaliseringar. Elevernas hypoteser kan vara felaktiga och mindre meningsfulla. Det är därför betydelsefullt att de får möjlighet att reflektera över den process som leder fram till deras antaganden för att justera och vidareutveckla sina hypoteser.

Andra principen

- Stöd en klassificering av hypoteser.

Betrakta följande påståenden

- summan av tre på varandra följande positiva heltal är delbar med 6 och
- det finns tre på varandra följande tal vars summa är delbar med 6.

Den första hypotesen är ett allmänt påstående och kan förkastas med ett motexempel som 2+3+4. Den andra hypotesen handlar om existens och kan bekräftas med ett exempel som 1+2+3. Genom att skilja på allmänna påståenden och påståenden om existens kan man tydliggöra vad som krävs för att avgöra giltigheten av en hypotes och träna resonemang som omfattar motexempel, exempel och bevis.

Tredje principen

- Låt elever ta del av varandras hypoteser och bevis.

Om elever endast kommer i kontakt med de bevis som står i läroboken eller ges av läraren så kan det leda till missuppfattningen att det är färdiga resonemang som de ska komma ihåg istället för att se det som ett av flera möjliga sätt att resonera. Det är därför betydelsefullt att elever får möjlighet att arbeta med uppgifter där de själva konstruerar bevis och att deras olika resonemang står i fokus och tas upp till diskussion.

Referenser

Lin, F. L., Yang, K. L., Lee, K. H., Tabach, M., & Stylianides, G. (2012). Principles of task design for conjecturing and proving. I G. Hanna & M. de Villie (Red.), *Proof and proving in mathematics education: the 19th ICMI Study* (s. 305–325). Springer.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Ruddock, G. J., OSullivan, C. Y., & Preuschoff, C. (2009). *TIMSS 2011 Assessment Frameworks*. TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Niss, M., & Højgaard, T. (Red.) (2011). *Competencies and mathematical learning ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. IMFUFA.