

Problemlösning, F-åk 3

Denna modul handlar om problemlösning och riktar sig till dig som arbetar i förskoleklass och årskurserna 1–3.

I modulen är lärarens arbete vid planering och genomförande av undervisningstillfällen som inkluderar problemlösning i fokus. Ni får läsa om och diskutera problemlösning som mål och medel i matematikundervisning samt betydelsen av elevers uppfattningar om matematik och problemlösning. Problemlösning för elever handlar inte enbart om att lösa problemuppgifter utan även om att formulera problemuppgifter vilket synliggörs i modulen. Vidare fördjupas i olika delar representationer och strategier respektive kommunikation och resonemang i samband med problemlösning. I modulen får ni även diskutera och prova anpassning av problemuppgifter så att de kan utmana era elever på en lagom nivå. Utgångspunkten för sådana anpassningar är formativ bedömning vilket ni i modulen får arbeta med kopplat till problemlösning. Tillsammans får ni i kollegiet utveckla er undervisning i problemlösning genom att diskutera, planera och genomföra undervisningstillfällen som inkluderar problemlösning och problemformulering.

Modulen består av åtta delar som till viss del bygger på varandra:

1. Problemlösning som mål och medel
2. Undervisning genom problemlösning
3. Formulera problemuppgifter
4. Representationer och strategier
5. Anpassa problemuppgifter
6. Kommunikation och resonemang i problemlösning
7. Synliggöra lärande i problemlösning
8. Problemlösning – ett vidgat perspektiv

Problembanken

I modulen finns en "Problembank" med problemuppgifter som kan användas som komplement till de problemuppgifter som presenteras i de olika delarna.

Del 3. Formulera problemuppgifter

Formulera problem anses vara en del av problemlösning – hur skiljer sig "lösa problem" från att "formulera problem"? Vad innebär det för dig som lärare när elever ska formulera problem? Hur gör man, vad ska man tänka på? Varför är det viktigt att elever formulerar problem? Vad lär sig eleverna när de formulerar problem? Dessa frågor står i fokus i denna del.

Vidare erbjuds en modell som stöd i planering och genomförande av lektioner där elever formulerar problemuppgifter.

Målen med denna del är att du ska fördjupa dina kunskaper gällande de kunskaper och färdigheter elever kan utveckla genom att formulera egna problemuppgifter.

Del 3: Moment A – individuell förberedelse

Läs

I texten "Formulera problemuppgifter" diskuteras olika aspekter av undervisning där elever ges möjlighet att formulera egna problemuppgifter. Texten belyser skillnaden mellan att lösa och formulera problemuppgifter, både utifrån ett lärar- och elevperspektiv.

Reflektera över följande när du läser texten:

- Hur kan klassificeringsmodellen (Figur 6) stödja dig som lärare?
- Fundera kring skillnaderna mellan att formulera problemuppgifter och att lösa problemuppgifter.
- Vad kan dessa skillnader innebära för eleverna och för dig som lärare i din undervisning?

Formulera problemuppgifter

Utgå från problemuppgiften "Tornet" och formulera själv tre egna problemuppgifter, en där du förändrar kontexten, en där du förändrar frågan och en tredje där du förändrar matematikinnehållet.

Bekanta dig med "Observationsprotokoll – Del 3".

Skolverket

Material



Formulera problemuppgifter

Jorryt van Bommel



Observationsprotokoll – Del 3

Jeff Gracie och Pia Gustafsson



Tornet


Formulera problemuppgifter

Jorryt van Bommel, Karlstads universitet

Att formulera problemuppgifter är en del av problemlösning, en del som dock skiljer sig från att lösa problemuppgifter. Denna text inriktas på hur undervisning med fokus på problemformulering kan utformas, varför det är viktigt att elever i samband med problemlösning ges möjlighet att formulera egna uppgifter samt vad eleverna då kan lära.

Figur 1

Exempel på problemuppgift: Plattor



a) Jag har 5 gröna plattor: hur många blåa behöver jag för att kunna fortsätta mönstret?

b) Hur många blåa plattor behövs om jag har 20 gröna plattor?

c) Hur många behövs om jag har n gröna plattor?

d) Gör ett liknande problem.

Problemuppgiften i Figur 1 visar strukturen på en vanlig problemuppgift. Vid frågorna a och b efterfrågas en **specifik beräkning** av ett specifikt antal (5 och 20 plattor). Fråga c efterfrågar en **generalisering**. Till slut kommer fråga d, där eleverna **själva får formulera** en liknande uppgift.

Problemlösning i relation till frågorna a, b och c ovan har diskuterats under längre tid medan diskussion kring problemformulering, så som i fråga d ovan, har förekommit mer sällan. När elever ska formulera liknande uppgifter är det oftast i samband med att de löser problem. De uppgifter som eleverna formulerar kan dock vara av olika karaktär, det kan bli problemuppgifter, rutinuppgifter, eller uppgifter där matematiken inte blir uppgiftens fokus. Om en uppgift som en elev formulerar blir en problemuppgift eller inte, beror på mottagaren och mottagarens förkunskaper.

Elever som ännu inte kan skriva behöver inte hindras när de ska formulera uppgifter då exempelvis digital teknik kan användas. Digital dokumentation öppnar också upp för andra typer av uppgifter där elever kan använda bilder och välja vad som ska synas på bild, men även vad som inte ska synas på bild, när de ställer olika frågor till bilden.

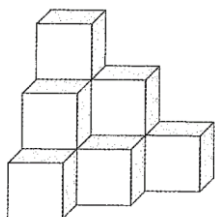
Varför ska elever formulera uppgifter?

Problemlösning ger elever möjlighet att utveckla matematiska kunskaper och matematiska förmågor (se även Del 1). Formulerandet av problem är ett relevant lärandemål från förskoleklass till årskurs 9. Dels ska eleverna ges möjlighet att utveckla sin förmåga att formulera (och lösa) problem med hjälp av matematik dels ska eleverna vid vardagliga situationer kunna formulera frågeställningar. I förskoleklass förväntas undervisningen bland annat erbjuda möjlighet att pröva och utveckla idéer, samt att enkla matematiska resonemang ska föras för att reflektera över problemställningar. Att formulera uppgifter är alltså en del av matematikundervisningen och kan med fördel ses som en del av undervisning om problemlösning. Att kunna ställa frågor och att kunna formulera problemuppgifter stärker även elevers problemlösningskompetens (Niss & Højgaard, 2019).

När elever får formulera uppgifter ger det läraren en möjlighet att utforska elevernas lärande. Elevernas frågor och avvägningar ger en bra inblick i vad de hittills har lärt sig. I en studie (Palmér & van Bommel, 2019) presenterades ett tornproblem (se även Del 1) där eleverna får se en bild på ett torn byggt av kuber där frågan är hur många kuber som behövs för att bygga tornet.

Figur 2

Tornproblem – Hur många kuber behövs för att bygga tornet?



Kommentar. Hämtad från

http://ncm.gu.se/media/namnaren/kanguru/2008/webb/milou_uppg08.pdf.

Eleverna har fått klura på hur de kan ta reda på hur många kuber som inte syns på bilden. Sedan fick eleverna i uppgift att bygga ett eget torn, rita eller fota av det och formulera en egen tornuppgift.

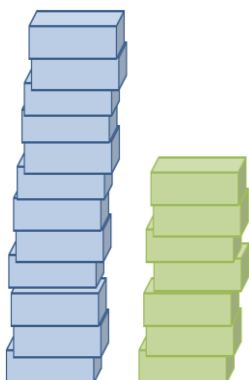
Maya och Arianna, två elever i förskoleklass, fick formulera en egen tornuppgift. Efteråt berättade Maya att uppgiften med tornet blev mycket enklare när de fick konstruera ett eget torn. ”Först byggde vi ett platt torn, då var det enkelt, men sedan byggde vi ett torn som man behöver gå runt bordet för, med hemliga bitar, då var det spännande!”. Arianna säger sen att det är viktigt att tänka till lite innan man börja bygga ”på pappret är alla torn platt, men när vi byggde ville vi ha hemliga kuberna”.

När Maya och Arianna formulerar en egen tornuppgift och förklarar hur de har tänkt syns det tydligt att de har förstått idén med ”hemliga kuber”. Att göra det omvända gav Maya och Arianna en insikt i att vissa byggnader var enkla och andra svåra. Insikten om ”hemliga kuber” kan även komma att hjälpa Maya och Arianna i framtida problemlösningssituationer.

Förutom en tydlig koppling till problemlösning har problemformulering också en nära koppling till vardagen. Kopplingen till vardagen anses vara viktig i matematik och att formulera uppgifter kan vara ett sätt för elever att koppla samman vardag och matematik (t.ex. Krawitz et al., 2018; Verschaffel et al., 2020). Att kunna ställa (lämpliga) frågor i vardagssituationer är en nödvändig kunskap som elever behöver ges möjlighet att utveckla. För de yngre eleverna kan bilder på vardagssituationer användas, där eleverna får formulera en fråga till bilden som kan lösas med hjälp av matematik. En bild av enbart plattor (Figur 3) kan vara utgångspunkt för en rad av frågor. ”Hur många plattor finns det?” ”Rita ett fint mönster med plattorna på rad.” ”Vilken färg finns det flest plattor av?” ”Mitt mönster är två blå en grön, hur många plattor har jag kvar?” ”Hur tung är en platta och hur många kan du bära?”

Figur 3

Exempel på en bild som kan stimulera till att formulera egna uppgifter



Olika sätt att formulera problem

När elever löser problemuppgifter kan de använda sig utav olika strategier. I exemplet i Figur 1 kan en elev välja att rita alla plattor (Figur 4) för att komma fram till svaret 10 på fråga a. En annan elev kanske tänker att det blir dubbelt så många blå som gröna plattor och multiplicerar med två och därför också kommer fram till svaret 10.

Figur 4

Elevlösning där eleven ritat alla plattor



Även när det gäller fråga d, där eleverna ska formulera en liknande problemuppgift använder de olika strategier. Vad ska vara liknande? Exemplet i Figur 5 nedan visar sex olika svar från elever i förskoleklass och årskurs 2 på frågan 'formulera en likande uppgift'.

Figur 5

Exempel på 'liknande uppgifter' formulerade av elever

- 1) Hur många blåa behövs om jag har 7 gröna?
- 2) Hur många gröna behövs om jag har 16 blåa?

- 3) Hur många blåa behövs om jag har 8 gröna?

- 4) Hur många plattor behövs totalt om jag har 25 gröna?
- 5) Plattor kostar 35 kronor per styck, hur mycket kostar mönstret i bilden?
- 6) Vilken färg tycker du är finast?

Liknande fråga

Vissa elever har utgått ifrån att mönstret och frågan ska vara lika (elev 1 och 2 i Figur 5) och ställer en **liknande fråga** till samma mönster. Andra elever har varierat mönstret, och elev 3 har i sin uppgift höjt komplexiteten.

Ny fråga

Elev 4, 5 och 6 har använt sig av en ny problemformulering, en **ny fråga**. Elev 4 har använt samma mönster som i ursprungsproblemet, men ändrat frågan genom att efterfråga det totala antalet plattor som behövs, inte enbart efter blå eller gröna plattor.

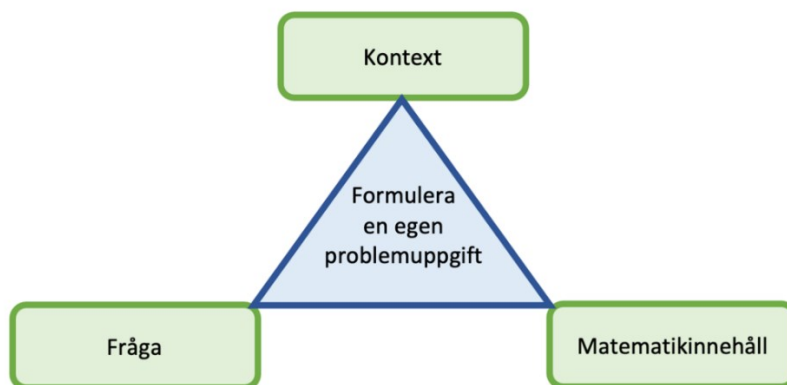
Nytt matematikinnehåll & ny kontext

Elev 5 har ändrat **matematikinhållet** genom att erbjuda en ny kontext där priset på plattorna har lagts till och därmed kan en annan fråga ställas. Elev 6 har också ändrat matematikinnehållet men har ställt en så kallad icke-matematisk fråga där ingen matematik behövs för att svara på frågan.

Som vi ser kan komplexitet variera när eleverna formulerar sina egna uppgifter. Komplexiteten kan skilja från den ursprungliga problemuppgiften och mer komplexa uppgifter kan förekomma redan i förskoleklass. Kontexten, frågan och matematikinnehållet är olika aspekter elever kan välja att ta hänsyn till när de formulerar egna uppgifter (Figur 6).

Figur 6

Klassificeringsmodell: Olika aspekter att ta hänsyn till vid formulering av egna problemuppgifter



Denna klassificering, där variation av matematikinnehållet, kontexten och frågan i sig är i fokus, utvecklades för att kunna analysera elevers formulerade uppgifter (Palmér & van Bommel, 2019; 2020). Med matematikinnehållet avses här det som är målet, vad är tänkt att eleverna ska lära? I klassificeringen togs därför även hänsyn till komplexiteten avseende matematikinnehållet. För de sex olika uppgifter med plattorna (Figur 5) skulle det se ut som i Tabell 1.

Tabell 1

Klassificering av elevers egna formulerade 'liknande' uppgifter

Uppgift	Kontext	Fråga	Matematikinnehåll
1: Hur många blå, om	Inga ändringar	Liknande	Liknande
2: Hur många grön, om	Inga ändringar	Liknande	Liknande
3: Hur många blå, om	Liknande	Liknande	Liknande, mer komplext
4: Hur många totalt, om	Liknande	Ny	Liknande
5: Hur mycket kostar, om	Utökat	Ny	Nytt
6: Vilken färg tycker du är finast?	Liknande	Ny	-

Klassificeringsmodellen i Figur 6 fungerar även som planeringsverktyg för att skapa instruktioner till elever när de ska formulera problemuppgifter. Vi går tillbaka till Maya och Arianna som fick formulera en egen tornuppgift. I det fallet var instruktionen utan styrning, men Maya och Arianna tolkade instruktionen som om den var mer styrd: ”Bygg ett nytt torn där du kan ställa en liknande fråga.” Därmed fick uppgiften fokus på att formulera (skapa) ett nytt torn att ställa en liknande fråga till. Damian och Nils gjorde en liknande tolkning:

Damian och Nils bygger ett högt torn, där alla kuber syns. Damina är inte nöjd och säger att tornet är för enkelt. ”Man behöver inte ens snurra den, vi bygger ett nytt!” Efter några försök nöjer de sig med ett torn där det finns kuber som inte syns, hur man än snurrar tornet.

Om målet med lektionen, eller för enskilda elever, i stället är att öppna upp för olika typer av frågor kan kontexten hållas konstant – samma byggnad – där eleverna istället uppmanas att ställa nya frågor.

Hur många kuber finns det i botten av tornet?
Hur många kuber kan inte ses alls från något håll?

Ytterligare en variant är att inte begränsa eleverna alls, byggnaderna (kontexten) och frågorna kan då variera mycket. I ett forskningsprojekt där elever i förskoleklass fick en sådan öppen uppgift ställde de frågor som, ”hur lång är ormens svans (A)”, ”hur många kuber behövs för byggnaden” (B), eller ”hur djupt är hålet om byggnaden har 42 kuber” (C)? (Figur 7).

Figur 7

Elevbyggnader A, B, C



Vad innebär det för lärare när elever formulerar problemuppgifter?

När elever arbetar med problemlösning har läraren olika uppgifter inför, under och efter problemlösningslektionen (se även Del 2). Klassificeringsmodellen i Figur 6 ger möjlighet att ställa specifika frågor beroende på målet med lektionen. Modellen ger också möjlighet att fokusera på olika aspekter av problemlösning, beroende på vad målet med att formulera en problemuppgift är.

Om målet är att eleverna ska **utveckla sin problemlösningsförmåga**, är det viktigt att strategier kommer i förgrunden. Genom att specifikt efterfråga en uppgift som kan lösas med hjälp av en tabell, eller genom att rita bilder, styrs eleverna till att formulera nya frågor.

Om målet istället är att eleverna ska **lära sig att ställa lämpliga frågor till vardagliga situationer**, är strategierna inte i förgrunden. Eleverna behöver nu erbjudas en kontext med tydlig anknytning till vardagen vilken de ska formulera uppgifter utifrån. Till exempel en bild på plattor likt Figur 3 där elever får formulera egna frågor. Det som är viktigt att förklara för eleverna är att matematik ska behövas för att kunna lösa de formulerade uppgifterna. Genom en sådan förklaring undviks frågor likt vilken färg som är finast?

6) Vilken färg tycker du är finast?

Att formulera problemuppgifter kan också vara ett sätt att få en **inblick i elevernas förståelse** av ett visst område och erbjuder därmed en möjlighet att utforska elevernas lärande. I en uppgift som ”Plattorna” (Figur 1) kan eleverna uppmanas att formulera ett liknande problem med ett annat mönster, såsom elev 3 har gjort.



3) Hur många blåa behövs om jag har 8 gröna?

Eleven kan även använda samma mönster och formulera ett mer eller mindre komplext problem, eller ett problem som har flera lösningar – så som en elev formulerade till de staplade plattorna i Figur 3: ”Rita ett fint mönster med plattorna på rad”.

Vad innebär det för elever att formulera uppgifter?

När eleverna förväntas formulera uppgifter behöver de byta perspektiv från att **leta** efter information till att **erbjuda** information. I Figur 6 finns tre aspekter som elever kan fokusera på: kontexten, frågan och matematikinnehållet. Det innebär att eleverna behöver reflektera över ursprungsuppgiften, vad handlar uppgiften om, vad var viktigt i uppgiften, vilken matematik behövs för att svara på frågan och hur kan själva frågan översättas till en ny uppgift eller en ny kontext? Behöver jag ändra på kontexten eller kan jag använda samma kontext?



- 1) Hur många blåa behövs om jag har 7 gröna?
- 2) Hur många gröna behövs om jag har 16 blåa?



- 3) Hur många blåa behövs om jag har 8 gröna?

Som vi har sett tidigare, så har Eleverna 1, 2 och 3 valt att behålla kontexten och att ställa liknande frågor som i ursprungsproblemet.

Exemplen i texten med plattorna och tornen, visar att eleverna gör olika val när de får samma instruktion: vissa fokuserar på att ha en liknande fråga med ny kontext, andra ändrar inte kontexten men varierar frågan så som elev 4, och många fler variationer finns.



- 4) Hur många plattor behövs totalt om jag har 25 gröna?

När elever i förskoleklass intervjuats uppger de att de tycker om självständigheten, autonomin, samt utmaningen, både när de **löser** och när de **formulerar** uppgifter (Palmér & van Bommel, 2019). Det som utmärker formulering av uppgifter är att många elever inte tycker att det räcker med att de har formulerat en uppgift utan uppgiften ska även lösas. Det sistnämnda kan kopplas till elevers inställning och uppfattning om

matematik (Del 1). Där kom det fram att elevers inställning och uppfattning av matematik påverkar deras lärande. För många elever dominerar uppfattningen om att matematik är att lösa uppgifter i matematikböcker (Nyman & Sumpter, 2019). Att ställa egna frågor och formulera uppgifter är något som elever inte förknippar med matematik, speciellt om de nya uppgifterna inte ska lösas utan bara ska formuleras (van Bommel & Palmér, 2021).

Avslutning

Att låta elever formulera egna uppgifter kan vara utmanande både för lärare och elever och likt lektioner där problemlösning är i fokus, krävs god planering inför, under och efter lektionen. Undervisning genom problemlösning är en balansgång mellan att ge eleverna autonomi och att säkerställa målet med lektionen för varje enskild elev.

Faserna **förutse – överblicka – välja ut – ordna – koppla ihop** (Smith et al., 2009; Stein et al., 2008) är vägledande även när formulering av problemuppgifter är i fokus. Klassificeringsaspekterna **kontext – fråga – matematikinnehåll** kan fungera som stöd för läraren i de olika faserna. De erbjuder en överblick som underlättar valet att välja ut och ordna de olika formulerade uppgifterna. De ger också en möjlig struktur för hur de formulerade uppgifterna kan kopplas ihop genom att fokusera på en aspekt i taget.

Referenser

- Krawitz, J., Schukajlow, D., & Van Dooren, W. (2018). Unrealistic responses to realistic problems with missing information: What are important barriers? *Educational Psychology, 38*(10), 1221–1238. <https://doi.org/10.1080/01443410.2018.1502413>
- Niss, M., & Højgaard, T. (2019) Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics, 102*, 9–28. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9>
- Nyman, M., & Sumpter, L. (2019). The issue of ‘proudliness’: Grade 2 and Grade 5 students’ motivation towards mathematics. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education, 7*(2), 80–96. <https://doi.org/10.31129/LUMAT.7.2.331>
- Palmér, H., & van Bommel, J. (2019). *Problemlösning som utgångspunkt: matematikundervisning i förskoleklass*. (Andra upplagan). Liber.
- Palmér, H., & van Bommel, J. (2020). Young students posing problem-solving tasks: what does posing a similar task imply to students? *ZDM - the International Journal on Mathematics Education, 52*(4), 743–752. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01129-x>

Smith, M. S., Hughes, E. K., Engle, R. A., & Stein, M. K. (2009). Orchestrating discussions. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 14(9), 549–556.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313–340.
<https://dx.doi.org/10.1080/10986060802229675>

van Bommel J., & Palmér, H. (2021). Young students' views on problem solving versus problem posing. *Journal of Childhood, Education & Society*, 2(1), 1–13.
<https://doi.org/10.37291/2717638X.20212165>

Verschaffel, L., Schukajlow, S., Star, J., & Van Dooren, W. (2020). Word problems in mathematics education: A survey. *ZDM - the International Journal on Mathematics Education*, 52, 1–16. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01130-4>

Observationsprotokoll – Del 3

Jeff Gracie, Högskolan Dalarna, Pia Gustafsson, Högskolan Dalarna

Formulerad uppgift	Kontext	Fråga	Matematikinnehåll

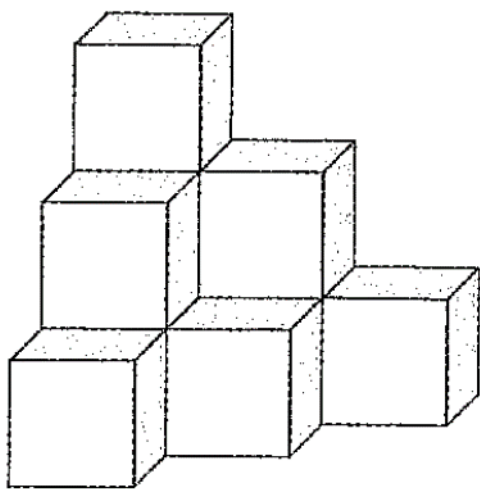
Matematik – Förskoleklass och grundskola åk 1–3

Modul: Problemlösning

Del 3: Formulera problemuppgifter

Tornet

Hur många klossar behövs för att bygga tornet?



Ursprunglig idé från kängurumatten, milou 08

http://ncm.gu.se/media/namnaren/kanguru/2008/webb/milou_uppg08.pdf

Ett annat torn

Hur många klossar behövs för att bygga detta torn?



Del 3: Moment B – kollegialt arbete

Diskutera

- Hur kan klassificeringsmodellen (Figur 6) stödja dig som lärare?
- Vilka är skillnaderna mellan att formulera problemuppgifter och att lösa problemuppgifter?
- Vad kan dessa skillnader innebära för eleverna och för dig som lärare i din undervisning?
- Jämför och diskutera de problemuppgifter ni formulerat utifrån era förändringar av kontext, fråga och matematikinnehåll.

Förbered en aktivitet

Planera tillsammans en lektion där eleverna ska formulera egna problemuppgifter med utgångspunkt i problemuppgiften "Tornet". Låt eleverna, i par eller grupp, först lösa problemuppgiften "Tornet" och sedan formulera liknande problemuppgifter. Då eleverna ska formulera liknande problemuppgifter:

- ge hälften av paren/grupperna instruktionen att formulera en ny problemuppgift utifrån samma bild på tornet som fanns i ursprungsproblemuppgiften.
- ge den andra hälften av paren/grupperna instruktionen att formulera en liknande problemuppgift utan att specificera vilka delar som ska vara liknande ursprungsproblemuppgiften.

Fundera tillsammans kring vilka olika aspekter av elevernas egna formulerade problemuppgifter som kan utgöra grunden för vad ni väljer att lyfta fram i den gemensamma helklassdiskussionen.

Del 3: Moment C – aktivitet

Genomför lektionen

Genomför lektionen och dokumentera några av elevernas egna formulerade problemuppgifter. Använd "Observationsprotokoll – Del 3" för att analysera kontext, fråga och matematikinnehåll i elevernas uppgifter. Kom ihåg att särskilja vilka problemuppgifter som formulerades utifrån de olika instruktionerna.

Tag med din analys och dina anteckningar till den gemensamma diskussionen i Moment D.

Del 3: Moment D – gemensam uppföljning

Diskutera

- Redogör för varandra de olika kontexter, frågor och matematikinnehåll som förekom i elevernas egna formulerade problemuppgifter.
- Fanns det några likheter eller skillnader i hur dessa aspekter varierade inom och mellan paren/grupperna? Vilka?
- Vilka samband fann ni mellan instruktionen inför elevernas formulering av egna problemuppgifter och de olika aspekterna hos elevernas formulerade uppgifter?
- Hur fungerade er förberedelse och genomförandet av lektionen i relation till de olika faserna "förutse, överblicka, välja ut, ordna, koppla ihop"?

Sammanfatta

Sammanfatta era diskussioner och reflektera över samband mellan undervisningens upplägg och vilka möjligheter till lärande som gavs.