GeoGebra – ett dynamiskt matematikprogram

Maria Fahlgren och Mats Brunström, Karlstads universitet

Som ett led i en ökad digitalisering i samhället har även behovet av digital kompetens inom utbildning betonats allt mer. Inte minst ser vi detta i de revideringar av kursplaner och ämnesplaner som genomförts de senaste åren. I matematik ska digitala verktyg inte enbart användas för att utföra beräkningar som annars görs för hand, utan även användas för att stötta elevers lärande (Skolverket, 2022). I Skolforskningsinstitutets forskningsöversikt *Digitala lärresurser i Matematikundervisningen* (Wallin et al., 2017) framgår att arbete med digitala verktyg kan vara gynnsamt för elevers lärande. De skriver bland annat att:

> Det tycks vara gynnsamt om digitala lärresurser skapar möjligheter för elever att uppleva och urskilja matematiska begrepp och processer visuellt och dynamiskt. Det verkar vidare vara bra om de digitala lärresurserna är konstruerade på ett sätt som uppmuntrar till dialog mellan elever och med lärare. (Wallin et al., 2017, s.55)

Skolforskningsinstitutet lyfter alltså fram möjligheten att dynamiskt visualisera matematiska begrepp och samband som vissa digitala verktyg erbjuder. I den här modulen ligger fokus på en speciell typ av digitalt verktyg som erbjuder just detta, så kallade dynamiska matematikprogram. Vi kommer att använda oss av *GeoGebra* som ett exempel på denna typ av digitalt verktyg. GeoGebra är en matematisk miljö speciellt utvecklad för undervisning på alla nivåer, allt från grundskolans tidigare år till universitetsnivå. GeoGebra kan användas både som ett kraftfullt beräkningsverktyg och som ett pedagogiskt verktyg för att stötta elevers lärande i matematik. Styrkan hos programmet ligger främst i att det gör matematiken dynamisk och interaktiv, där elever ges möjlighet att undersöka och upptäcka många matematiska begrepp och samband. Detta ger i sin tur nya möjligheter att locka eleverna till matematiska resonemang, inte minst när det gäller att formulera och undersöka egna hypoteser. På detta sätt fungerar GeoGebra som ett matematiskt laboratorium.

Några egenskaper hos denna typ av program har identifierats som extra värdefulla. Dynamiska matematikprogram gör det möjligt att göra konstruktioner som sedan kan manipuleras dynamiskt på olika sätt. Exempelvis kan en geometrisk figur med specifika egenskaper konstrueras så att egenskaperna bevaras då figuren manipuleras, till exempel då något av figurens hörn flyttas. På så vis kan ytterligare egenskaper hos den konstruerade figuren undersökas.

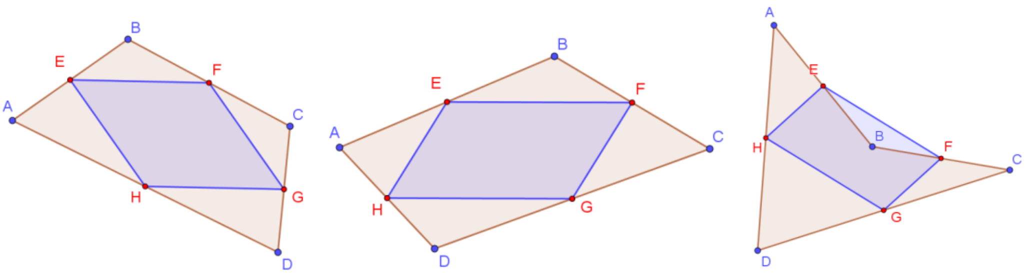
Skolverket

Exempel – fyrhörning

I figur 1 visas ett exempel där grundkonstruktionen består av en godtycklig fyrhörning *ABCD*, där mittpunkterna på fyrhörningens sidor *E*, *F*, *G* och *H* tagits fram och bundits samman så att en ny fyrhörning har bildats. När denna konstruktion är gjord är det möjligt att dra i något av hörnen *A*, *B*, *C* eller *D* utan att själva konstruktionen förstörs. Detta gör det möjligt att studera vilka egenskaper hos fyrhörningen *EFGH* som bevaras och vilka egenskaper som varierar när fyrhörningen *ABCD* förändras. På så vis kan eleverna ges möjlighet att själva upptäcka intressanta samband. I figur 1 återges tre olika bilder från en sådan undersökning, där vi kan se att fyrhörningen *EFGH* hela tiden verkar vara en parallellogram. En elev som ställer en sådan hypotes har möjlighet att övertyga sig om att den stämmer genom att dra i olika hörn och därmed skapa ytterligare exempel. Det är även möjligt att använda GeoGebras mätverktyg för lutning för att övertyga sig om att sidorna är parvis parallella.

Figur 1.

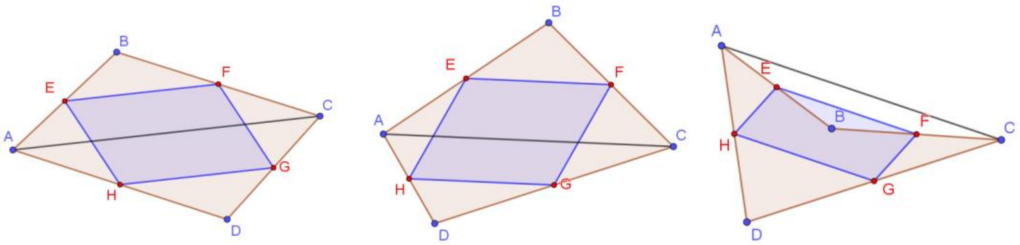
Konstruktionen av fyrhörningen *EFGH* bibehålls när fyrhörningen *ABCD* förändras



Förhoppningsvis är eleven nu även nyfiken på varför hypotesen stämmer. Det har visat sig att digitala verktyg ibland kan stötta elever när det gäller att förklara eller bevisa varför olika samband gäller. Enkelheten att lägga in extra konstruktioner, till exempel hjälplinjer, för att testa olika idéer till förklaringar eller bevis har visat sig värdefull. I figur 2, har en sträcka mellan punkterna *A* och *C* lagts in. Med hjälp av likformighet kan vi se att sträckan *AC* är parallell med både sidan *EF* och sidan *HG*, vilket medför att dessa båda sidor måste vara parallella. På motsvarande sätt inses att sidorna *EH* och *FG* är parallella.

Figur 2.

I fyrhörningen har sträckan *AC* lagts till



En annan hypotes som eleverna själva kan tänkas komma på är att arean av parallellogrammen är hälften så stor som arean av den ursprungliga fyrhörningen. Eftersom det även går att mäta areor i GeoGebra blir det enkelt att försäkra sig om att även denna hypotes verkar stämma genom att undersöka många exempel.

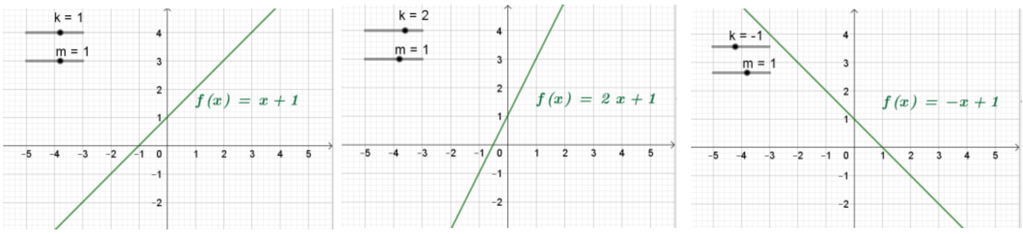
Möjligheten att dra fria objekt, till exempel punkter i en konstruktion, är alltså en av de egenskaper hos dynamiska matematikprogram som lyfts fram som extra värdefull (Arzarello et al., 2002). De första dynamiska matematikprogrammen, som utvecklades under 1980- och 1990-talet, var egentligen dynamiska geometriprogram. De mest kända är *Cabri Geometry* och *The Geometer's Sketchpad*. Ungefär samtidigt som de första dynamiska geometriprogrammen utvecklades introducerades ett antal kraftfulla symbolhanterande program, Computer Algebra Systems, CAS, till exempel *Maple* och *Mathematica*. En viktig historisk skillnad mellan dessa båda programtyper är att dynamiska geometriprogram utvecklades för att bli användbara i undervisning medan CAS-programmen främst utvecklades för att kunna användas vid avancerade matematiska beräkningar (Ruthven et al., 2008). På senare tid har en del traditionella dynamiska geometriprogram kompletterats med CAS samtidigt som en del traditionella CAS-program har kompletterats med dynamisk geometri. Dessutom har nya program utvecklats med båda dessa funktioner. Ett sådant dynamiskt matematikprogram är just GeoGebra. Numera kan dynamiska matematikprogram användas för att visualisera och upptäcka matematiska samband inom många olika områden.

Exempel – funktion

Ett område där dynamiska matematikprogram är extra gynnsamma för elevers kunskapsutveckling är funktioner, något som lyfts fram i *Digitala lärresurser i matematikundervisningen* (Wallin et al., 2017). Det är främst möjligheten att dynamiskt koppla en funktions olika representationsformer som är viktig i detta sammanhang (Zbiek et al., 2007). Exempelvis finns stora möjligheter att undersöka sambandet mellan en funktions algebraiska och grafiska representation, vilket är centralt inom funktionsläran. Ett verktyg som visat sig erbjuda unika möjligheter i detta sammanhang är det som kallas för glidare. Glidaren gör det möjligt att exempelvis variera värdet på en parameter genom att dra i en punkt, placerad på en tallinje, som representerar värdet på parametern. Med hjälp av detta verktyg och den dynamiska kopplingen mellan algebraiska och grafiska representationer är det möjligt att undersöka hur olika värden på en parameter i ett algebraiskt funktionsuttryck påverkar motsvarande grafs form och placering i ett koordinatsystem. På det här sättet blir det möjligt att undersöka egenskaper hos familjer av funktioner, såsom linjära funktioner, andragradsfunktioner, exponentialfunktioner och trigonometriska funktioner. Om vi till exempel vill undersöka hur parametrarna k och m påverkar grafen till den linjära funktionen $f(x) = kx + m$, används två glidare, en för k och en för m, se figur 3.

Figur 3.

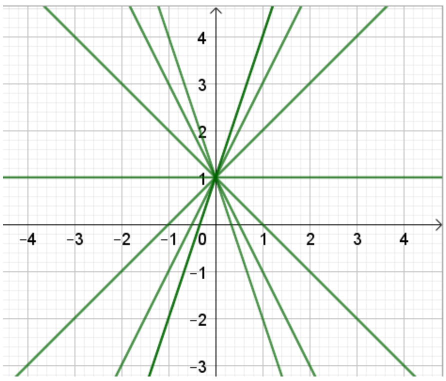
Grafen till funktionen $\boldsymbol{f(x) = kx + m}$ för några olika värden på parametern *k*, då parametern *m* hålls konstant.



Om vi inte vill att den gamla grafen ska försvinna när värdet på en glidare ändras finns möjligheten att sätta spår på funktionsgrafen, se figur 4. Att sätta spår på ett rörligt objekt är alltså ytterligare en värdefull möjlighet som GeoGebra erbjuder.

Figur 4.

Genom att sätta spår på funktionsgrafen blir flera grafer synliga samtidigt



Vi har nu fokuserat på några möjligheter som ett dynamiskt matematikprogram erbjuder. Naturligtvis kan vi inte förvänta oss att användandet av programmet automatiskt leder till ökat lärande. Det finns många olika faktorer som spelar in. I kommande delar av modulen diskuteras bland annat utformning av elevinstruktioner och uppgiftsformuleringar, men vi ska komma in på uppgiftsformuleringar redan här i samband med att vi diskuterar ett exempel inom statistikområdet.

Exempel – statistik

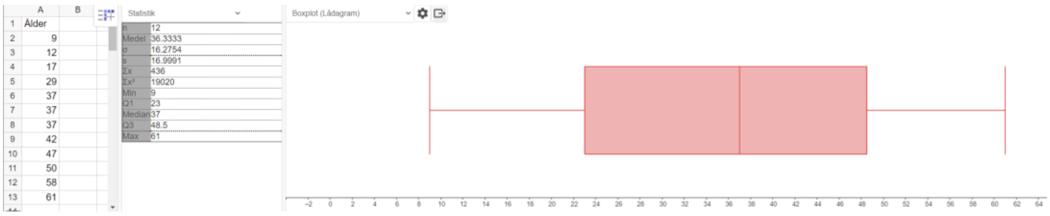
I GeoGebra är det enkelt att få fram olika läges- och spridningsmått samt att konstruera olika typer av diagram. Vi illustrerar med ett exempel.

> I ett hyreshus bor 12 personer med följande åldrar: 9, 12, 17, 29, 37, 37, 37, 42, 47, 50, 58 och 61 år. Bestäm medelvärde, median och kvartilavstånd för de boendes ålder och rita motsvarande lådagram.

I den vänstra delen av figur 5 har åldrarna matats in i GeoGebras kalkylblad. Genom att markera cellerna och välja envariabelanalys kan sedan olika statistiska mått och olika typer av diagram fås. I figur 5 framgår att GeoGebra har beräknat samtliga läges- och spridningsmått som efterfrågas i uppgiften samt ritat ett lådagram.

Figur 5.

GeoGebra kan användas för att beräkna olika statistiska mått och rita diagram



Det som krävs för att få fram allt som efterfrågas i uppgiften är i princip att lägga in rätt värden i kalkylbladet och att veta vilka knapptryckningar som krävs för att GeoGebra ska visa svaren. I det här fallet fungerar alltså GeoGebra som ett kraftfullt beräkningsverktyg. I många sammanhang gör tillgången till digitala verktyg att de numeriska värden som används inte behöver vara tillrättalagda för att ge enkla beräkningar. När det gäller uppgifter inom statistik kan uppgifter göras mer realistiska genom att mängden data inte behöver begränsas på samma sätt.

När vi som lärare ska avgöra om en uppgift ska lösas för hand eller med hjälp av GeoGebra finns det all anledning att fundera på vilka möjligheter och risker en eventuell övergång till att använda GeoGebra innebär. Vilka kunskaper får eleverna inte längre öva på om de nu ska lösa uppgiften med hjälp av GeoGebra? I exemplet ovan är det tydligt att uppgiften går att lösa med hjälp av GeoGebra utan att förstå något av de begrepp som ingår i uppgiften. Vad kan det då finnas för fördelar med att använda GeoGebra inom detta område, förutom att eleverna lär sig att använda digitala verktyg?

En tänkbar fördel med att använda GeoGebra, förutom att de numeriska värdena kan väljas mer fritt, är att mer tid kan ägnas åt andra saker än beräkningsarbete. Exempelvis kan mer tid ägnas åt att diskutera fördelar och nackdelar med de olika läges- och spridningsmåtten och med olika typer av diagram. Det är även enkelt att undersöka hur ändringar av värdena i kalkylbladet påverkar både lådagrammet och de statistiska måtten, tack vare den dynamiska kopplingen som programmet erbjuder. För att GeoGebra ska utnyttjas på ett bra sätt behöver oftast nya typer av frågor ställas. Nedan ges förslag på några frågor, kopplade till exemplet ovan, som skulle kunna ställas till eleverna efter att de har löst uppgiften med hjälp av GeoGebra. För samtliga frågor är tanken att eleverna först ska diskutera sig fram till ett svar, gärna i par eller små grupper, och sedan använda GeoGebra för att testa och eventuellt revidera svaret.

- Hur kommer lådagrammet att ändras om personen som är 61 år flyttar ut och en person som är 30 år flyttar in?
- Ge förslag på hur en av åldrarna kan ändras utan att lådagrammet påverkas.
- Vilken är den största förändringen som går att göra av en av åldrarna utan att lådagrammet påverkas?
- Ge förslag på hur två åldrar kan ändras så att kvartilavståndet ökar samtidigt som medelvärdet inte ändras.
- Ni får ändra vilka åldrar ni vill men lådagrammet får inte ändras. Vilket är det lägsta medelvärdet ni kan få? Vilket är det högsta?

Den här typen av uppgifter, där eleverna först får ge ett förslag och därefter använda GeoGebra för att undersöka hur väl deras förslag stämmer, kan användas inom många olika områden. En fördel är att det inte går att komma fram till ett genomtänkt förslag utan att sätta sig in i problemet. I det aktuella exemplet innebär det att eleverna behöver förstå hur ett lådagram konstrueras samt hur medelvärde, median, undre kvartil och övre kvartil beräknas.

Innan vi lämnar statistikexemplet är det viktigt att poängtera att det ofta kan vara givande att lösa uppgifter både för hand och med GeoGebra. De lösningsstrategier som GeoGebra erbjuder kan fungera som ett komplement till tidigare strategier och därigenom ge ökad förståelse.

GerGebra – många användningsområden

Ett program som GeoGebra kan användas på många olika sätt i matematikundervisningen. Det kan användas som ett lärarverktyg för att exempelvis underlätta demonstrationer och diskussioner i helklass, eller som ett elevverktyg. Läraren kan välja mellan att låta eleverna undersöka färdiga GeoGebra-konstruktioner eller att låta dem själva göra de konstruktioner som behövs. När elever gör egna konstruktioner, utifrån mer eller mindre detaljerade instruktioner, kan deras förståelse för de begrepp som behandlas öka samtidigt som de får en ökad färdighet med programmet. Nya arbetsformer kan växa fram där elever får ta ett större ansvar för sitt eget lärande och där samarbete mellan elever stimuleras, vilket kan öka motivationen och intresset för matematik (Skolverket, 2022). När eleverna blir förtrogna med programmet kan det bli naturligt för dem att använda det mer spontant när de själva ser ett behov av det. GeoGebra på mobilen kan dessutom bli den naturliga räknaren som är likadan oavsett mobilmodell.

Det är förstås många faktorer som påverkar om, hur och i vilken utsträckning lärare använder digitala verktyg i sitt klassrum (Drijvers, 2015). Det är viktigt att vara medveten om att det är en process att integrera ny teknik i undervisningen och att den behöver ske stegvis. Det handlar inledningsvis om att läraren själv behöver bekanta sig med det digitala verktyget. När det gäller GeoGebra så ska detta inte tolkas som att man själv behöver lära sig hela programmet. Liksom program som *Word* och *Excel*, kan GeoGebra ses som ett bottenlöst program, som det är omöjligt att lära sig till fullo även om man har långt tid på sig. Även om GeoGebra är ett kraftfullt och komplext verktyg så har utvecklarna av programmet strävat efter att göra det användarvänligt, vilket gör det enkelt att börja använda programmet i liten skala. I likhet med Word och Excel, så finns det många som använder programmet och har stor behållning av det trots att de bara utnyttjar en bråkdel av de möjligheter som programmet erbjuder.

Referenser

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *ZDM*, *34*(3), 66−72.

Drivers, P. (2015). Digital technology in mathematics education: why it works (or doesn't). I S. J. Cho (red.), *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (s. 135−151). Springer.

Ruthven, K., Hennessy, S. & Deaney, R. (2008). Constructions of dynamic geometry: a study of the interpretative flexibility of educational software in classroom practice. *Computers & Education*, *51*(1), 297−317.

Skolverket. (2022). *Få syn på digitaliseringen på grundskolenivå*. Skolverket.

Wallin, J., Hafsteinsdottir, E., Samulesson, J., Bergman, E., Bergman, M., Fundell, S., Gulz, A., Helenius, O. & Jahnke, A. (2017). *Digitala lärresurser i matematikundervisningen*. Skolforskningsinstitutet.

Zbiek, R. M., Heid, M. K., Blume, G. W. & Dick, T. P. (2007). Research on technology in mathematics education: a perspective of constructs. I F. K. Lester (red.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (vol. 2, s. 1169−1207). NCTM.